

سال ۱۳۹۸ ریاضی ۳

۱- دو تابع f و g در اطراف نقطه a تعریف شده اند. در این صورت کدام عبارت در مورد این دو تابع درست است؟

- (۱) اگر f در a دارای حد. ولی g در a فاقد حد باشد. آنگاه $f + g$ در a حد ندارد.
 (۲) اگر f در a دارای حد. ولی g در a فاقد حد باشد. آنگاه $f.g$ در a حد ندارد.
 (۳) اگر دو تابع f و g در نقطه a حد نداشته باشند. آنگاه $f + g$ در a حد ندارد.
 (۴) اگر دو تابع f و g در نقطه a حد نداشته باشند. آنگاه $f.g$ در a حد ندارد.

سال ۱۳۹۸

گزینه ۱ صحیح است

توجه: در توابع کسری مخرج باید مخالف صفر باشد

در صورتیکه دو تابع f و g در نقطه a حد داشته باشند. در این صورت $f \pm g$ و $f.g$ و $\frac{f}{g}$ یا $\frac{g}{f}$ حد دارند

در صورتیکه دو تابع f و g در نقطه a حد نداشته باشند. در این صورت در مورد وجود توابع $f \pm g$ و $f.g$ و $\frac{f}{g}$ نمی توان نظر قطعی داد.

در صورتیکه در توابع f و g یکی از آنها در نقطه a حد نداشته باشند. در این صورت $f \pm g$ قطعاً حد ندارد.

$$۲- \text{تابع } f \text{ به معادله } f(x) = \begin{cases} \frac{2\sin^2 x}{1 - \cos x} & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases} \text{ پیوسته است مقدار } K \text{ کدام است؟}$$

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴ سال ۱۳۹۸

توجه شرط پیوستگی تابع این است که حد چپ=حد راست=مقدار تابع $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ باشد

روش اول

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos^2 x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2(1 + \cos x) = 2(1 + 1) = 4 \Rightarrow k = 4$$

روش دوم: هم ارزی ها

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} = 2 \Rightarrow k = 2$$

گزینه ۴ صحیح است

$$3- \text{تابع } f(x) = \begin{cases} |1-x^2| & |x| \leq 1 \\ ax^2 + bx + c & |x| > 1 \end{cases} \text{ روی } R \text{ مشتق پذیر است. مقدار } a-b-c \text{ کدام است؟}$$

(۱) ۲ (۲) صفر (۳) -۱ (۴) -۲ سال ۱۳۹۸

شرط مشتق پذیری این است که مشتق چپ و راست برابر باشد

$$f(x) = \begin{cases} |1-x^2| & |x| \leq 1 \\ ax^2 + bx + c & |x| > 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + c & x > 1 \text{ \& } x < -1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -2x & -1 \leq x \leq 1 \\ 2ax + b & x > 1 \text{ \& } x < -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2x = 2ax + b \begin{cases} \xrightarrow{x=1} -2(1) = 2a(1) + b \Rightarrow 2a + b = -2 \\ \xrightarrow{x=-1} -2(-1) = 2a(-1) + b \Rightarrow -2a + b = +2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -2 \\ -2a + b = +2 \end{cases} \Rightarrow 2b = 0 \text{ \& } 2a + (0) = -2 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

حال باید پیوستگی را در نقطه یک بررسی می کنیم

$$1-x^2 = ax^2 + bx + c \xrightarrow[a=-1, b=0]{x=1} 1-1 = (-1)(1) + (0)(1) + c \Rightarrow c = 1$$

$$a-b-c = -1-0-1 = -2$$

گزینه ۴ صحیح است

$$4- \text{خط مماس بر نمودار منحنی به معادله } f(x) = \frac{ax-1}{x+1} \text{ با دامنه } (-1, +\infty) \text{ در نقطه به طول یک موازی نیمساز}$$

ناحیه دوم و چهارم است. مقدار d کدام است؟

(۱) -۲ (۲) -۳ (۳) -۴ (۴) -۵ سال ۱۳۹۸

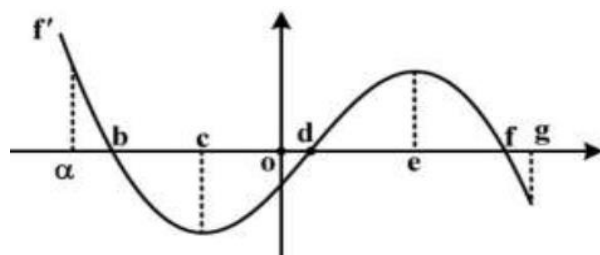
$$f(x) = \frac{ax-1}{x+1} \quad y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \rightarrow f'(x) = \frac{(ax-1)'(x+1) - (x+1)'(ax-1)}{(x+1)^2} = \frac{(a)(x+1) - (1)(ax-1)}{(x+1)^2} = \frac{ax+a-ax+1}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{a+1}{(x+1)^2} \Rightarrow m = f'(x_0) \Rightarrow m = f'(1) = \frac{a+1}{(1+1)^2} = \frac{a+1}{4}$$

چون خط مماس موازی نیمساز ناحیه دوم و چهارم است $y = -x \Rightarrow m = -1$

$$\frac{a+1}{4} = -1 \Rightarrow a+1 = -4 \Rightarrow a = -5$$

گزینه ۴ صحیح است

۵- شکل زیر. نمودار تابع مشتق تابع f . (نمودار f') است در کدام بازه f و f' هر دو صعودی اند؟ سال ۱۳۹۸



(۱) (a, b)

(۲) (c, d)

(۳) (d, c)

(۴) (e, f)

تابع f در قسمتهایی صعودی هست که بالای محور x ها باشد یعنی بازه (d, f)

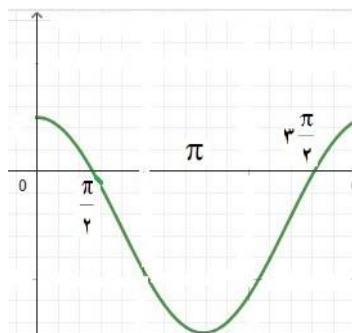
تابع f' در قسمتهایی صعودی هست که شیب خط مثبت باشد یعنی بازه (c, e)

اشتراک دو قسمت جواب است یعنی بازه (d, e)

گزینه ۳ صحیح است

سال ۱۳۹۹

۱- شکل زیر نمودار تابع f روی بازه $[0, 2\pi]$ است. ضابطه تابع f کدام می تواند باشد؟



$$f(x) = 2 \cos(x + \frac{\pi}{2}) - 1 \quad (1)$$

$$f(x) = 2 \sin(x + \frac{\pi}{2}) - 1 \quad (2)$$

$$f(x) = 2 \cos(x - \frac{\pi}{2}) + 1 \quad (3)$$

$$f(x) = 2 \sin(x - \frac{\pi}{2}) + 1 \quad (4)$$

در اینگونه مسائل با مقدار گذاری می توان به جواب مطلوب رسید بهتر است نقاط **max** یا **min** انتخاب شود

$$1) f(x) = 2 \cos(x + \frac{\pi}{2}) - 1 \xrightarrow[x=f(x)=1]{x=0} 1 = 2 \cos(0 + \frac{\pi}{2}) - 1 \Rightarrow 1 \neq -1 \Rightarrow F$$

$$2) f(x) = 2 \sin(x + \frac{\pi}{2}) - 1 \xrightarrow[x=f(x)=1]{x=0} 1 = 2 \sin(0 + \frac{\pi}{2}) - 1 \Rightarrow 1 = 2 \times 1 - 1 \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow T$$

$$3) f(x) = 2 \cos(x - \frac{\pi}{2}) + 1 \xrightarrow[x=f(x)=1]{x=0} 1 = 2 \cos(0 - \frac{\pi}{2}) + 1 \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow T$$

$$4) f(x) = 2 \sin(x - \frac{\pi}{2}) + 1 \xrightarrow[x=f(x)=1]{x=0} 1 = 2 \sin(0 - \frac{\pi}{2}) + 1 \Rightarrow 1 = -2 + 1 \Rightarrow 1 \neq -1 \Rightarrow F$$

گزینه های دو و سه می تواند پاسخ صحیح باشد بنابر این یک نقطه دیگر انتخاب می کنیم

$$2) f(x) = 2 \sin(x + \frac{\pi}{2}) - 1 \xrightarrow[x=f(x)=-3]{x=\pi} -3 = 2 \sin(\pi + \frac{\pi}{2}) - 1 \Rightarrow -3 = -2 - 1 \Rightarrow -3 = -3 \Rightarrow T$$

$$3) f(x) = 2 \cos(x - \frac{\pi}{2}) + 1 \xrightarrow[x=f(x)=-3]{x=\pi} -3 = 2 \cos(\pi - \frac{\pi}{2}) + 1 \Rightarrow -3 \neq 1 \Rightarrow F$$

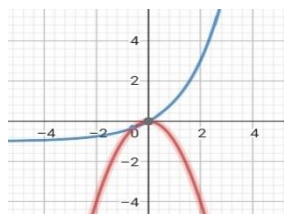
گزینه ۲ صحیح است

۲- تعداد ریشه های معادله $2^x + x^2 - 1 = 0$ کدام است؟

- ۱ (۲) ۳ (۱) ۲ (۴) ۰ (۳) ۱ (۲)

$$2^x - 1 = -x^2$$

$$y_1 \quad y_2$$

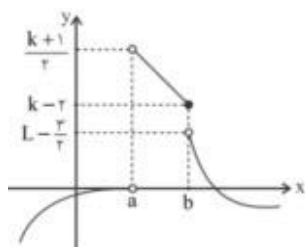


نمودار دو تابع را رسم می کنیم محل تلاقی دو نمودار جواب است که در دو نقطه یکدیگر را قطع می کنند

گزینه ۴ صحیح است

۳- با توجه به شکل زیر اگر $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - 2$ و $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} (f(x) + \frac{1}{2})$ باشد مقدار

$k + L$ کدام است؟



۱ (۱)

۵ (۲)

۳ (۳) صفر

۳ (۴)

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \frac{k+1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = K - 2, \quad \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = L - \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} (f(x) - 2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} 2 = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \Rightarrow 0 = \frac{k+1}{2} - 2 \Rightarrow -2 = \frac{k+1}{2} \Rightarrow K+1=4 \Rightarrow k=3$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} (f(x) + \frac{1}{2}) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow b^+} \frac{1}{2} \Rightarrow k-2 = L - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$3-2 = L + \frac{-3+1}{2} \Rightarrow 1 = L + \frac{-2}{2} \Rightarrow 1 = L - 1 \Rightarrow L = 2$$

$$K + L = 3 + 2 = 5$$

گزینه ۲ صحیح است

۴- تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 - \sqrt{x+1} & x > 0 \\ \frac{|x|}{x} - a - 1 & x < 0 \end{cases}$ در نقطه صفر دارای حد است. مقدار a کدام است؟

(۱) -۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) ۱

شرط داشتن حد $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - \sqrt{x+1} & x > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a(0)^2 - \sqrt{(0)+1} = -1 \\ \frac{|x|}{x} - a - 1 & x < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{-x}{x} - a - 1 = -1 - a - 1 = -2 - a \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Rightarrow -1 = -2 - a \Rightarrow a = -2 + 1 = -1$$

گزینه ۱ صحیح است

۵- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{a(x^3 - x) \sin x}{x^2(1+x)} & x < 0 \\ \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) & x = 0 \\ \frac{b \sin^2 x}{1 - \cos x} & x > 0 \end{cases}$ روی R پیوسته باشد. مقدار $a + b$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

شرط پیوستگی $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

$$f(x) = \begin{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a \cdot x(x^2 - 1) \sin x}{x^2(1+x)} \xrightarrow{\sin x \approx x} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a \cdot x(x-1)(x+1)x}{x^2(1+x)} = a(0-1) = -a \\ \Rightarrow \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow f(0) = \sqrt{2} \sin(2(0) + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b \sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b(1 - \cos^2 x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b(1 - \cos x)(1 + \overbrace{\cos x}^{\cos 0 = 1})}{1 - \cos x} = 2b \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) &\Rightarrow -a = 1 \Rightarrow a = -1 \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) &\Rightarrow 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + b = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۱ صحیح است

سال ۱۴۰۰

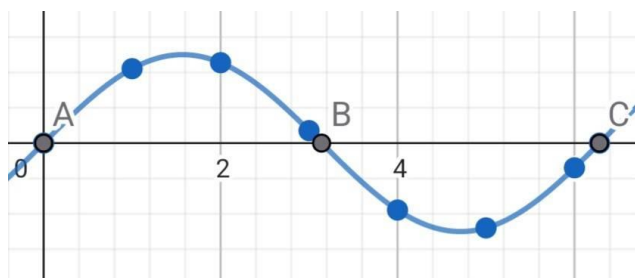
۱- نمودار تابع $y = \sin x$ محور طول ها را در دو نقطه قطع می کند. نمودار $y = \sin 3x$ چند بار محور x را قطع می کند؟

۶ (۴)

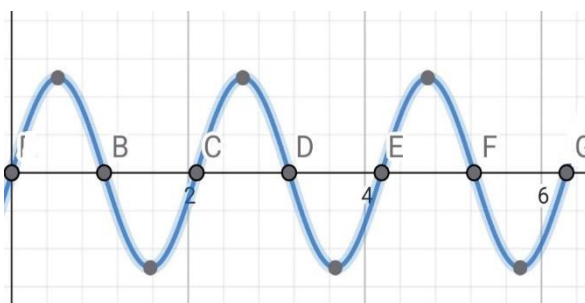
۱ (۳)

۲ (۲)

۴ (۱)



(الف)



(ب)

چون گفته شده دو بار محور طول ها قطع می شود طبق شکل الف نتیجه می گیریم باز $[0, 2\pi]$ است و تابع $y = \sin 3x$ طبق شکل (ب) در شش نقطه نمودار را قطع می کند. و گزینه ۴ صحیح است

گزینه ۴ صحیح است

۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}-\sqrt{x}}$ کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۴)

صفر (۳)

۱ (۲)

$-\frac{1}{3}$ (۱)

گزینه ۳ صحیح است

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}-\sqrt{x}} = \frac{1-1}{\sqrt{1}-\sqrt{1}} = \frac{0}{0}$$

مبهم است و عامل ابهام $x-1$ است

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}-\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}-\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1) \cdot \sqrt{x}-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} \xrightarrow{\text{مزدوج}} \frac{(a-b)(a+b)=a^2-b^2}{\text{ج}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1) \cdot \sqrt{x}-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} \times \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1) \cdot \sqrt{x}-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} \times \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1) \cdot \sqrt{x}-\sqrt{x} \cdot x + \sqrt{x}}{x^2-x} \Rightarrow \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1) \cdot \sqrt{x}-\sqrt{x} \cdot x + \sqrt{x}}{x(x-1)} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x}) \cdot (x+\sqrt{x})}{x} \xrightarrow{x=1} \frac{(\sqrt{1}-\sqrt{1}) \cdot (1+\sqrt{1})}{1} = . \end{aligned}$$

۳- معادله خط مماس بر منحنی $f(x) = x - \frac{2}{x}$ در نقطه $x=1$ کدام است؟

۴) $y = -x + 2$

۳) $y = -x$

۲) $y = 3x - 4$

۱) $y = 3x - 2$

گزینه ۲ صحیح است

۱) $f(x) = x - \frac{2}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{(-2)}{x^2} = 1 + \frac{2}{x^2} \Rightarrow m = f'(1) = 1 + \frac{2}{1^2} = 1 + 2 = 3$

۲) $y_1 \xrightarrow{x_1=1} f(1) = 1 - \frac{2}{1} = 1 - 2 = -1$

۳) $y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - (-1) = (3) \cdot (x - 1) \Rightarrow y + 1 = 3x - 3 \Rightarrow y = 3x - 4$

۴- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c & x < 1 \\ 2x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$ مشتق پذیر است مقدار c کدام است؟

۴) مقدار دلخواه

۳) -۲

۲) صفر

۱) ۲

گزینه ۱ صحیح است

برای آنکه تابع مشتق پذیر باشد باید پیوسته باشد. یعنی $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c & x < 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 + b(1) + c = 1 + b + c \\ 2x + 1 & x \geq 1 \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2(1) + 1 = 3 \end{cases}$$

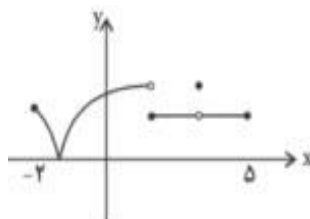
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \Rightarrow 1 + b + c = 3 \Rightarrow b + c = 2$$

برای آنکه تابع مشتق پذیر باشد باید مشتق چپ و راست برابر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c & x < 1 \\ 2x + 1 & x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(1) = \begin{cases} 2(1) + b & x < 1 \\ 2 & x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow 2 + b = 2 \Rightarrow b = 0$$

$$b + c = 2 \xrightarrow{b=0} 0 + c = 2 \Rightarrow c = 2$$

۵- شکل زیر نمودار تابع $y = f(x)$ است. تابع f به ترتیب در بازه $[-2, 5]$ در چند نقطه ناپیوسته و در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

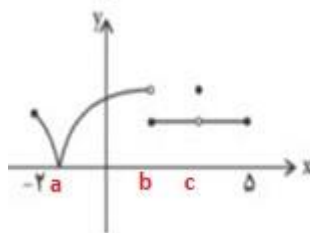


$$2-2 \quad (1)$$

$$3-2 \quad (2)$$

$$3-2 \quad (3)$$

$$4-2 \quad (4)$$



(۱) در نقاط b و c تابع پرش دارد و ناپیوسته است و مشتق پذیر نیست

(۲) در a نقطه مانند تابع قدر مطلق x در نقطه صفر چون شیب خط

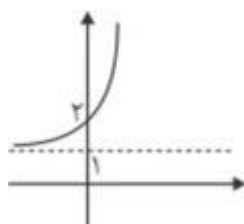
متفاوت است گوشه ایجاد کرده است و مشتق چپ و راست برابر نیست

بنابراین در مجموع سه نقطه مشتق ندارد

گزینه ۳ صحیح است

سال ۱۴۰۱

۱- اگر $f(x) = (a-1) + 2^{(b+x)}$ باشد مقدار $a-b$ کدام است؟



$$2 \quad (1)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$\text{صفر} \quad (3)$$

$$1 \quad (4)$$

$$f(x) = (a-1) + 2^{(b+x)} \Rightarrow \begin{cases} a-1 = 1 \Rightarrow a = 2 \\ 2 = 1 + 2^{(b+0)} \Rightarrow 2^b = 2-1 \Rightarrow 2^b = 1 \Rightarrow b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a - b = 2 - 0 = 2$$

گزینه ۱ صحیح است

۲- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{5x-1}}{ax-b} = \frac{1}{3}$ باشد مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) $\frac{1}{2}$

گزینه ۳ صحیح است

روش اول چون صورت کسر صفر می شود ولی $\frac{1}{3}$ جواب بدست آمده بنابراین مخرج هم باید صفر باشد که پس از رفع

ابهام عدد $\frac{1}{3}$ بدست آمده باشد یعنی

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{5x-1}}{ax-b} = \frac{3 - \sqrt{5(2)-1}}{a(2)-b} = \frac{0}{0} = \frac{1}{3}$$

$$a(2)-b=0 \Rightarrow 2a=b \Rightarrow \frac{b}{a}=2$$

روش دوم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{5x-1}}{ax-b} &= \frac{3 - \sqrt{5(2)-1}}{a(2)-b} = \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{5x-1}}{ax-b} &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{5x-1}}{ax-b} \times \frac{3 + \sqrt{5x-1}}{3 + \sqrt{5x-1}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^2 - (5x-1)}{(ax-b) \times (3 + \sqrt{5x-1})} \Rightarrow \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{9 - 5x + 1}{(ax-b) \times (3 + \sqrt{5x-1})} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{10 - 5x}{(ax-b) \times (3 + \sqrt{5x-1})} = \frac{2(5 - \frac{5x}{2})}{(ax-b) \times \underbrace{(3 + \sqrt{5(2)-1})}_{3+3=6}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \\ (5 - \frac{5x}{2}) &= (ax-b) \Rightarrow \begin{cases} -b = 5 \Rightarrow b = -5 \\ a = -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{-5}{-\frac{5}{2}} = 2 \end{aligned}$$

۳- اگر $f(x) = \begin{cases} 2ax+b & x \geq 2 \\ ax^2 + 2bx+1 & x < 2 \end{cases}$ و $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 6$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 8$ باشد مقدار $a.b$ کدام است؟

(۱) $-\frac{9}{2}$ (۲) $\frac{9}{2}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $-\frac{9}{4}$

$$f(x) = \begin{cases} 2ax + b & x \geq 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} 2ax + b = 2a(2) + b = 4a + b = 8 \\ ax^2 + 2bx + 1 & x < 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} ax^2 + 2bx + 1 = a(2)^2 + 2b(2) + 1 = 4a + 4b + 1 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + b = 8 \\ 4a + 4b + 1 = 6 \end{cases} \xrightarrow{\times -1} \begin{cases} -4a - b = -8 \\ 4a + 4b = 5 \end{cases} \Rightarrow 3b = -3 \Rightarrow b = \frac{-3}{3} = -1$$

$$4a + (-1) = 8 \Rightarrow 4a = 9 \Rightarrow a = \frac{9}{4}$$

$$a \times b = \frac{9}{4} \times -1 = \frac{-9}{4}$$

گزینه ۴ صحیح است

$$f(x) = \begin{cases} 2mx + n & x \leq a \\ 8x^2 & x > a \end{cases} \quad \text{۴- تابع } f \text{ با ضابطه}$$

$$\begin{matrix} 2a & (۱) & -a & (۲) & a & (۳) & -2a & (۴) \end{matrix}$$

گزینه ۲ صحیح است

برای آنکه تابع مشتق پذیر باشد باید پیوسته باشد. یعنی $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

$$f(x) = \begin{cases} 2mx + n & x \leq a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} 2mx + n = 2ma + n \\ 8x^2 & x > a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} 8x^2 = 8a^2 \end{cases} \Rightarrow 2ma + n = 8a^2$$

برای آنکه تابع مشتق پذیر باشد باید مشتق چپ و راست برابر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 2mx + n & x \leq a \Rightarrow f'(x) = 2m \\ 8x^2 & x > a \Rightarrow f'(x) = 16x \Rightarrow f'(a) = 16a \end{cases} \Rightarrow 2m = 16a \Rightarrow m = 8a$$

$$2ma + n = 8a^2 \xrightarrow{m=8a} 16a^2 + n = 8a^2 \Rightarrow n = -8a^2 \Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{-8a^2}{8a} = -a$$

۵- معادله خط مماس بر منحنی $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 1$ در کدام نقطه موازی خط $y = 3x + 1$ است؟

$$\begin{matrix} (4, -21) & (۱) & (0, 19) & (۲) & (0, 21) & (۳) & (4, -19) & (۴) \end{matrix}$$

شرط موازی بودن دو خط این است که شیب دو خط برابر باشد $m = m'$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 3 \Rightarrow m = f'(x_0) = 3x_0^2 - 12x_0 + 3 = 3(x_0^2 - 4x_0 + 1)$$

$$m = m' \Rightarrow 3(x_0^2 - 4x_0 + 1) = 3 \Rightarrow x_0^2 - 4x_0 + 1 = 1 \Rightarrow x_0^2 - 4x_0 = 0 \Rightarrow x_0(x_0 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 1 \xrightarrow{x=4} f(4) = 4^3 - 6(4)^2 + 3(4) - 1 = -21 \\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 1 \xrightarrow{x=0} f(0) = 0^3 - 6(0)^2 + 3(0) - 1 = -1 \end{cases}$$

گزینه ۱ صحیح است.

سال ۱۴۰۲

۱- کدامیک از توابع زیر در بازه $[0, 2\pi]$ زودتر به بیشترین مقدار خود می رسد؟

$$y = \sin\left(\frac{x}{4}\right) \quad (۴) \quad y = 2\sin(x) \quad (۳) \quad y = \sin(2x) \quad (۲) \quad y = \frac{1}{4}\sin(x) \quad (۱)$$

گزینه ۲ صحیح است

$$y = \sin(ax) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{a} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4}\sin(x) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \\ y = \sin(2x) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi \\ y = 2\sin(x) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \\ y = \sin\left(\frac{x}{4}\right) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi \end{cases}$$

توجه: بنابراین می توان گفت در تابع $y = \sin ax$ هر چه ضریب x بزرگتر باشد دوره تناوب کمتر است و زودتر به بیشترین مقدار (max) میرسد.

۲- حد تابع $f(x) = \frac{(4x - x^3)\sin x}{x^2(x+1)}$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟

$$1 \quad (۴) \quad 4 \quad (۳) \quad 3 \quad (۲) \quad 2 \quad (۱)$$

گزینه ۳ صحیح است

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x - x^2) \sin x}{x^2(x+1)} = \frac{(4(\cdot) - (\cdot)^2) \sin(\cdot)}{(\cdot)^2((\cdot)+1)} = \frac{\cdot}{\cdot} \quad \text{مبهم است}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x - x^2) \sin x}{x^2(x+1)} \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \approx x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(4 - x^2)x}{x^2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4 - x^2)}{(x+1)} = \frac{(4 - (\cdot)^2)}{((\cdot)+1)} = 4$$

۳- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & x > 1 \\ a + x & x \leq 1 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟

(۴) هیچ مقدار a (۳) هر مقدار a (۲) $a = 1$ (۱) $a = -1$

گزینه ۳ صحیح است

شرط داشتن حد $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & x > 1 \\ a + x & x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + ax = (1)^2 + a(1) = 1 + a \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} a + x = a + 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow 1 + a = a + 1$$

چون این رابطه همیشه برقرار است بنابراین به ازای کلیه مقادیر a برقرار است۴- خط مماس بر نمودار $y = \frac{1}{x}$ محور x ها را در نقطه ای به طول ۴ و محور عرض ها را در نقطه ای به عرض ۱ قطع

می کند. این خط در چه نقطه ای بر نمودار مماس است؟

$$\left(\frac{1}{2}, 1\right) \quad (۴)$$

$$(2, 1) \quad (۳)$$

$$(1, 2) \quad (۲)$$

$$\left(2, \frac{1}{2}\right) \quad (۱)$$

گزینه ۱ صحیح است

$$\left. \begin{aligned} ۱) y = \frac{1}{x} &\Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow y'_{x_0} = m \\ ۲) m' &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 1}{4 - 0} = -\frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow m = m' \Rightarrow -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$y = \frac{1}{x} \xrightarrow{x=2} y = \frac{1}{2}$$

در گزینه ها مقدار گذاری می کنیم

۵- مشتق تابع $f(x) = \frac{3x-1}{x^2+2x}$ در نقطه ای به طول (-1) کدام است؟

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{3x-1}{x^2+2x} \xrightarrow{y=\frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v-v'u}{v^2}} y' = \frac{\overbrace{(3x-1)'}^3 \cdot \overbrace{(x^2+2x)}^{2x+2} - (x^2+2x)' \cdot (3x-1)}{(x^2+2x)^2} \Rightarrow \\
 &= \frac{(3x^2+6x) - (2x^2+4x-2)}{(x^2+2x)^2} = \frac{-3x^2+2x+2}{(x^2+2x)^2} = \frac{-3(-1)^2+2(-1)+2}{((-1)^2+2(-1))^2} = \frac{-3}{1} = -3
 \end{aligned}$$

گزینه ۴ صحیح است

سال ۱۴۰۳

۱- حد تابع $f(x) = \frac{(x^2-9)\sin x}{x(x^2-4x+3)}$ در نقطه $x=3$ کدام است؟ (گزینه ها بر حسب درجه است)

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi} \Rightarrow D = \frac{360 \cdot R}{2\pi} = \frac{360 \times 3}{2\pi} = \frac{540}{\pi}
 \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{(x^2-9)\sin x}{x(x^2-4x+3)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{(3^2-9)\sin \frac{540}{\pi}}{3(3^2-4(3)+3)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2-9)\sin x}{x(x^2-4x+3)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)\sin x}{x(x-3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)\sin x}{x(x-1)} = \frac{\overbrace{(3+3)}^6 \sin \frac{540}{\pi}}{\underbrace{3(3-1)}_6} = \sin \frac{540}{\pi}$$

گزینه ۴ صحیح است

۲- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2+2ax & x > 1 \\ ax+a+1 & x \leq 1 \end{cases}$ در R پیوسته است. مقدار a کدام است؟

(۱) هر مقدار (۲) فقط صفر (۳) فقط یک (۴) هیچ مقدار

شرط داشتن حد $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax & x > 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1^2 + 2a(1) = 2a + 1 \\ ax + a + 1 & x \leq 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a(1) + a + 1 = 2a + 1 \end{cases} \Rightarrow 2a + 1 = 2a + 1$$

چون این رابطه همیشه برقرار است بنابراین به ازای کلیه مقادیر a برقرار است

گزینه ۱ صحیح است

۳- خط $y = ax + b$ در نقطه $X = 2$ بر تابع $y = x - \frac{2}{x}$ مماس است. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

(۱) $-\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) -2 (۴) $\sqrt{2}$

$$y = x - \frac{2}{x} \xrightarrow{y = \frac{a}{x} \Rightarrow y' = -\frac{a}{x^2}} y' = 1 - \left(-\frac{2}{x^2}\right) = 1 + \frac{2}{x^2} \xrightarrow{x = \sqrt{2}} m = 1 + \frac{2}{(\sqrt{2})^2} = 1 + 1 = 2$$

$$a = m = 2$$

$$y = x - \frac{2}{x} \xrightarrow{x = \sqrt{2}} y = \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$$

بنابراین تابع از نقطه $(\sqrt{2}, 0)$ می گذرد

$$y = ax + b \xrightarrow{y=0, a=2} 0 = 2\sqrt{2} + b \Rightarrow b = -2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

گزینه ۱ صحیح است

۴- خط $y = 4$ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ x^2 + 4 & x < 0 \end{cases}$ را در چند نقطه قطع می کند؟

(۱) ۳ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

شرط اینکه دو نمودار را یکدیگر را قطع کنند این است که عرض آنها برابر باشد. یعنی $y = f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x > 0 \xrightarrow{f(x)=y=4} 2x - 1 = 4 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2.5 \Rightarrow T \\ 0 & x = 0 \xrightarrow{f(x)=y=4} 0 = 4 \Rightarrow F \\ x^2 + 4 & x < 0 \xrightarrow{f(x)=y=4} x^2 + 4 = 4 \Rightarrow 4 = 0 \Rightarrow F \end{cases}$$

بنابراین فقط در یک نقطه قطع می کند **گزینه ۳ صحیح است**

۵- معادله $3 \sin 2x + 2 = 0$ در بازه $[0, 6\pi]$ دارای چند جواب است؟

۱۰ (۴

۸ (۳

۶ (۲

۱۲ (۱

$$3 \sin 2x + 2 = 0 \Rightarrow 3 \sin 2x = -2 \Rightarrow \sin 2x = \frac{-2}{3}$$

$$T = \frac{2\pi}{|a|} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

خطی به موازات محور x ها از نقطه $y = -\frac{2}{3}$ رسم می کنیم که نمودار را در دو نقطه قطع می کند

$$t = 6\pi$$

$$n = \frac{t}{T} = \frac{6\pi}{\pi} = 6 \times 2 = 12$$

گزینه ۱ صحیح است