

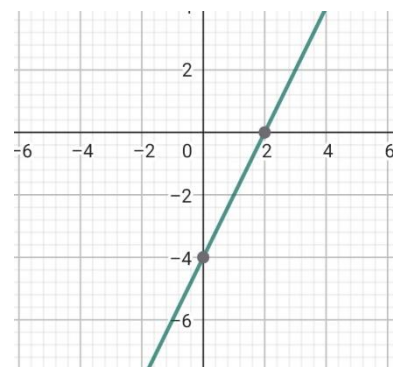
ریاضی ۳ پودمان ۱

به بزرگترین توان در هر چند جمله ای درجه معادله گویند بنابراین به معادله به فرم $ax + b = 0$ که در آن $a \neq 0$ باشد معادله درجه یک گفته میشود. مانند $3x - 7 = 0$ و به توابعی به فرم $y = ax + b$ توابع درجه یک می گوئیم این توابع دارای نمودار خطی هستند برای رسم این توابع کافیست دو نقطه دلخواه به x بدهیم و y را بر اساس آن تعیین کرده و نمودار بر اساس آنها رسم میشود. بهتر است y را مساوی صفر قرار دهیم تا محل تلاقی با محور x ها مشخص شود. و x را مساوی صفر قرار دهیم تا محل تلاقی با محور y ها مشخص شود.

مثال: نمودار تابع $y = 2x - 4$ را رسم کنید.

x	$y = 2x - 4$
۰	$2(0) - 4 = -4$ عرض از مبدا
۱	$2(1) - 4 = -2$
۲	۰

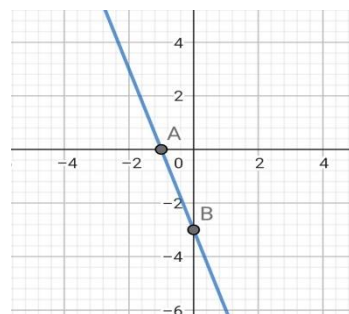
$$y = 2x - 4 \Rightarrow 0 = 2x - 4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2$$



مثال: نمودار تابع $y = -3x - 3$ را رسم کنید.

x	$y = -3x - 3$
۰	$-3(0) - 3 = -3$ عرض از مبدا
۱	$-3(1) - 3 = -6$
-۱	۰

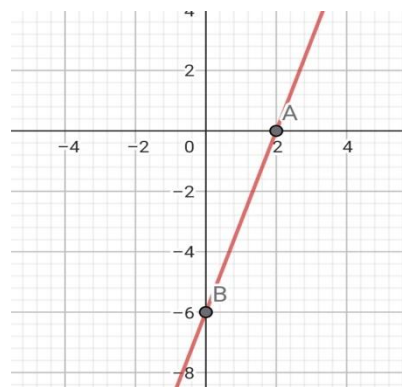
$$y = -3x - 3 \Rightarrow 0 = -3x - 3 \Rightarrow -3x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{-3} = -1$$



مثال: نمودار تابع $6x - 2y = 12$ را رسم کنید

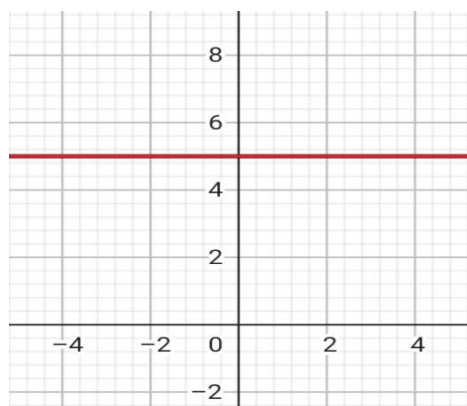
$$6x - 2y = 12 \xrightarrow{y=0} 6x - 2(0) = 12 \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{6} = 2 \Rightarrow A \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$6x - 2y = 12 \xrightarrow{x=0} 6(0) - 2y = 12 \Rightarrow -2y = 12 \Rightarrow y = \frac{12}{-2} = -6 \Rightarrow B \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$



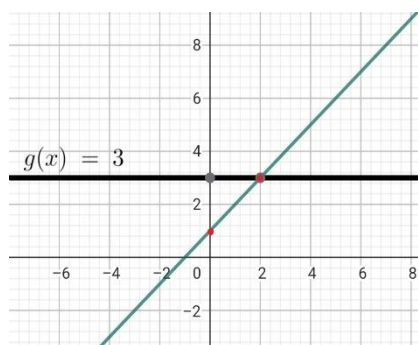
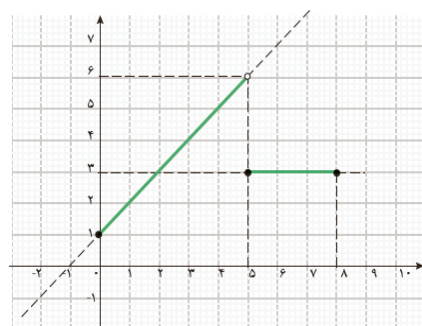
تابع ثابت:

به توابعی گفته می شود که به ازای مقادیر مختلف x مقدار y ثابت باشد. و نمودار آنها خطی به موازات محور x ها است

مثال : نمودار تابع $y = 5$ را رسم کنید

مثال ۱: تابع $g(x) = \begin{cases} x+1 & 0 \leq x < 5 \\ 3 & 5 \leq x \leq 8 \end{cases}$ با دامنه $[0, 8]$ را در نظر بگیرید و نمودار آن را رسم کنید.

ابتدا نمودار هریک ضابطه ها را جداگانه در یک محور مختصات رسم می کنیم سپس براساس محدوده های ارائه شده نقاط اضافی را پاک می کنیم. یا می توان ابتدا و انتهای هر بازه را در ضابطه مربوط به خودش قرار دهیم و براساس مقادیر بدست آمده نمودار را رسم کنیم.

 $\Rightarrow$ 

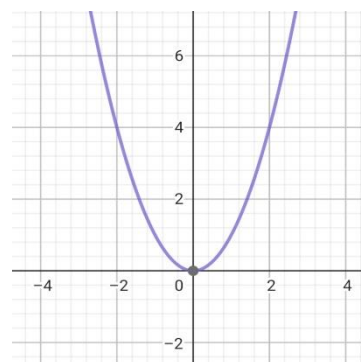
معادله درجه دو

به معادله $ax^2 + bx + c = 0$ معادله درجه دو گویند چون بزرگترین توان x دو است که در آن $a \neq 0$ میباشد. و a, b, c اعداد حقیقی هستند بنابراین معادله $2x^2 - 5x + 8 = 0$ یک معادله درجه دو کامل است چون توان x به ترتیب کم شده است

نمودار های توابع درجه ۲ شبیه U میباشد که جهت آن بستگی به علامت a دارد

برای رسم این توابع حداقل سه نقطه به x میدهیم و y را بدست می آوریم و بر اساس آن نمودار را رسم میکنیم.

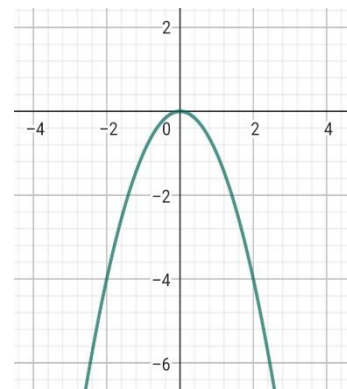
x	$y = x^2$
-۲	$(-2)^2 = +4$
-۱	$(-1)^2 = +1$
۰	$(0)^2 = ۰$
۱	$(+1)^2 = +1$
۲	$(+2)^2 = 4$



(الف)

چون ضریب x^2 مثبت است U به طرف بالا است

x	$y = -x^2$
-۲	$-(-2)^2 = -4$
-۱	$-(-1)^2 = -1$
۰	$-(0)^2 = ۰$
۱	$-(+1)^2 = -1$
۲	$-(+2)^2 = -4$



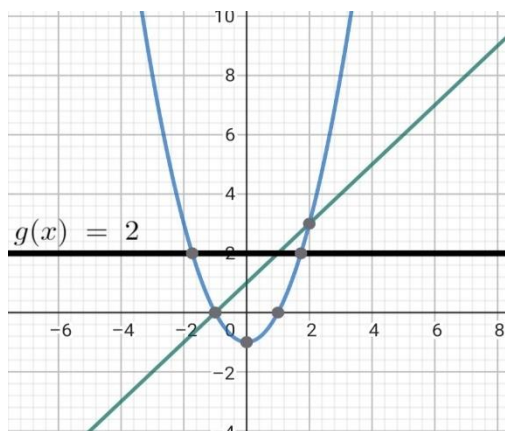
(ب)

چون ضریب x^2 منفی است U به طرف پایین است

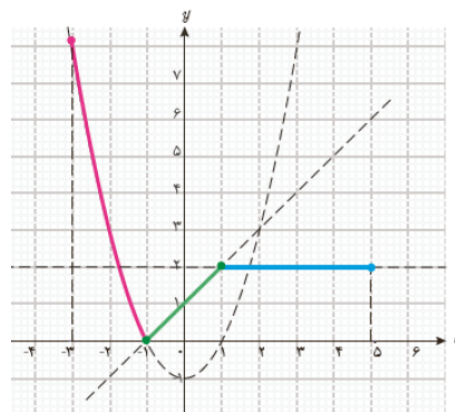
در شکل الف ضریب x^2 مثبت است U به طرف بالا و در شکل ب ضریب x^2 منفی و U به طرف پایین است

مثال ۲: تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & -3 \leq x < -1 \\ x + 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & 1 < x \leq 5 \end{cases}$ با دامنه $[-3, 5]$ را در نظر بگیرید و نمودار آن را رسم کنید.

ابتدا نمودار هریک ضابطه ها را جداگانه در یک محور مختصات رسم می کنیم سپس براساس محدوده های ارائه شده نقاط اضافی را پاک می کنیم. نمودار $y = x^2$ را رسم می کنیم و یک واحد به علت منهای به پایین انتقال می دهیم سپس نمودار $y = x$ را رسم می کنیم. و یک واحد به علت مثبت یک بالا می رویم و در نهایت تابع ثابت $y = 2$ را رسم می کنیم. یا می توان ابتدا و انتهای هر بازه را در ضابطه مربوط به خودش قرار دهیم و براساس مقادیر بدست آمده نمودار را رسم کنیم.

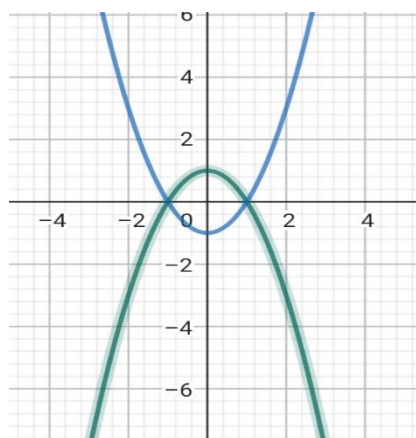


⇒

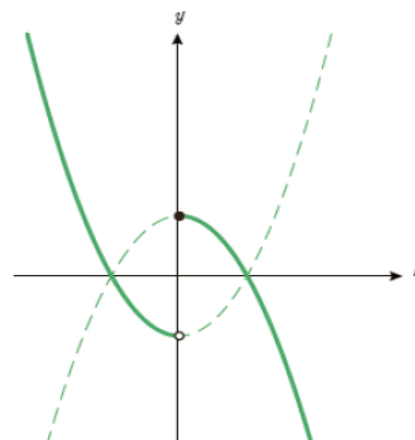


مثال ۳: نمودار تابع چند ضابطه ای $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 0 \\ -x^2 + 1 & 0 \leq x \end{cases}$ را رسم کنید

نمودار $y = x^2$ را رسم می کنیم و یک واحد به علت منهای به پایین انتقال می دهیم در بازه $(-\infty, 0)$ سپس نمودار $y = -x^2$ را رسم می کنیم. و یک واحد به علت مثبت یک بالا می رویم در بازه $[0, +\infty)$



⇒

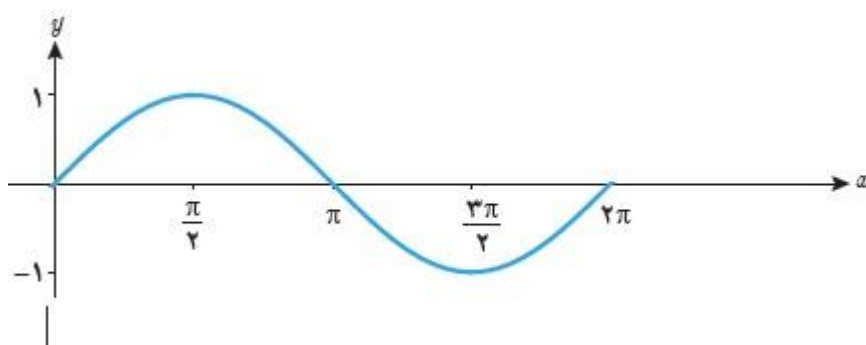


توابع مثلثاتی:

برای رسم توابع مثلثاتی با استفاده از مقدار گذاری این توابع را رسم می کنیم .

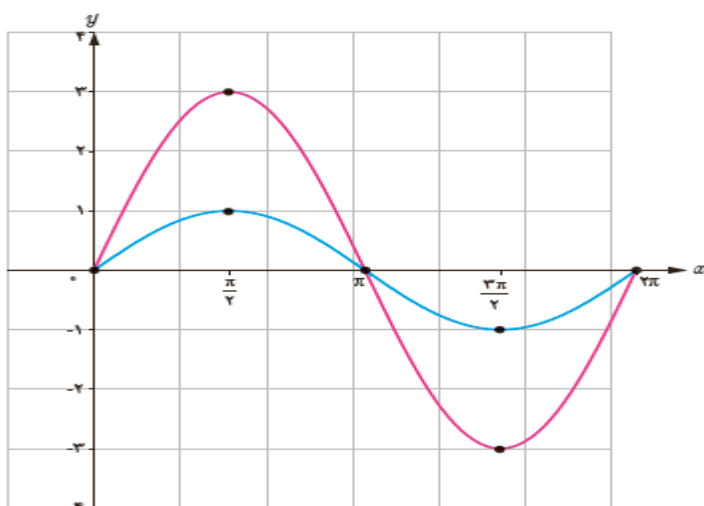
زاویه نسبت مثلثاتی	۰	$۳۰ = \frac{\pi}{۶}$	$۶۰ = \frac{\pi}{۳}$	$۹۰ = \frac{\pi}{۲}$	$۱۸۰ = \pi$	$۲۷۰ = \frac{۳\pi}{۲}$	$۳۶۰ = ۲\pi$
sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱	۰
cos	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰	۱

مثال ۴: تابع $y = \sin x$ را در بازه $[۰, ۲\pi]$ را رسم کنید. و رفتار آن را بنویسید



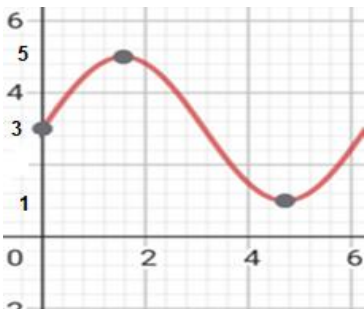
x	y = sin x
۰	۰
$\frac{\pi}{۲}$	۱
π	۰
$\frac{۳\pi}{۲}$	-۱
۲π	۰

مثال ۵: تابع $y = ۳ \sin x$ را در بازه $[۰, ۲\pi]$ را رسم کنید.



x	آبی y = sin x	قرمز y = ۳ sin x
۰	۰	۰
$\frac{\pi}{۲}$	۱	۳
π	۰	۰
$\frac{۳\pi}{۲}$	-۱	-۳
۲π	۰	۰

مثال ۶: تابع $y = 2 \sin x + 3$ را در بازه $[0, 2\pi]$ را رسم کنید.



x	$y = \sin x$	$y = 2 \sin x$	$y = 2 \sin x + 3$
0	0	0	3
$\frac{\pi}{2}$	1	2	5
π	0	0	3
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-2	1
2π	0	0	3

دوره تناوب: تابع f را متناوب می نامیم هر گاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x + T \in D_f$ و $f(x + T) = f(x)$ کوچک ترین عدد مثبت T با این خاصیت را دوره تناوب f می نامیم. در توابع $\sin ax$ و $\cos ax$ دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{|a|}$ و در توابع $\tan bx$ و $\cot bx$ دوره تناوب $T = \frac{\pi}{|b|}$ است

فرکانس (بسامد): به تعداد تناوب در یک ثانیه بسامد گویند و واحد آن هرتز $\text{HZ} = \frac{1}{s}$ است. $f.T = 1 \Rightarrow \begin{cases} f = \frac{1}{T} \\ T = \frac{1}{f} \end{cases}$

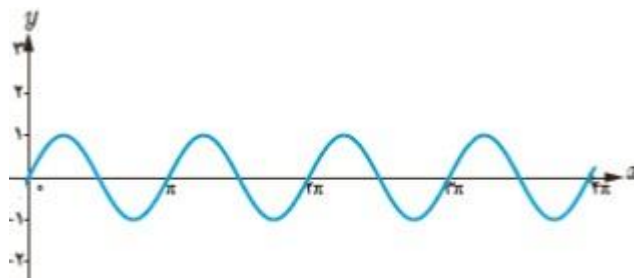
$$n: \text{تعداد دور (نوسان)} \quad t: \text{کل زمان} \quad f = \frac{n}{t}, \quad T = \frac{t}{n}$$

مثال ۷: نمودار تابع $y = \sin 2x$ را رسم کنید و دوره تناوب آن را بدست آورید.

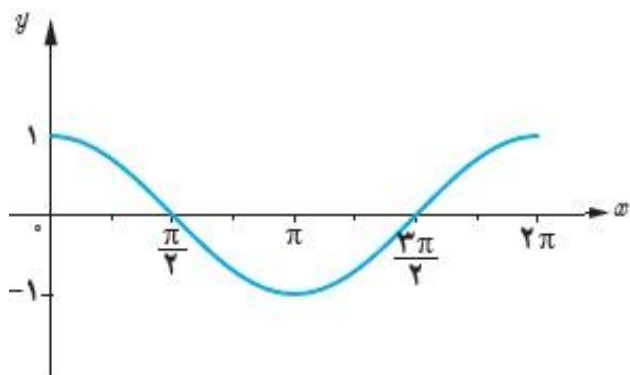
دوره تناوب به صورت زیر محاسبه می شود

$$y = \sin 2x \xrightarrow{a=2} T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{2} = \pi \Rightarrow$$

یعنی در بازه های π عینا تکرار می شود

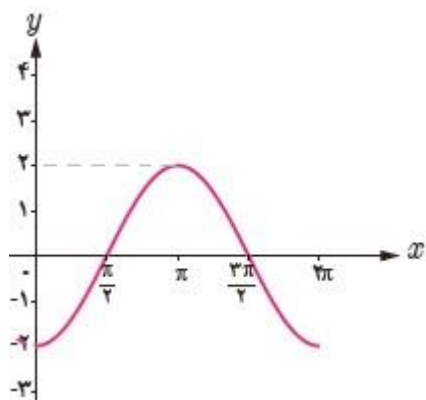


مثال ۸: تابع $y = \cos x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ را رسم کنید.



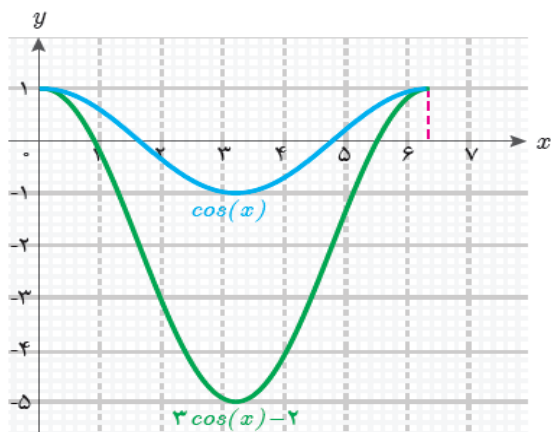
x	$y = \cos x$
۰	۱
$\frac{\pi}{2}$	۰
π	-۱
$\frac{3\pi}{2}$	۰
2π	۱

مثال ۸: تابع $y = -2 \cos x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ را رسم کنید.



x	$y = \cos x$	$y = -2 \cos x$
۰	۱	-۲
$\frac{\pi}{2}$	۰	۰
π	-۱	۲
$\frac{3\pi}{2}$	۰	۰
2π	۱	-۲

مثال ۹: نمودار تابع $y = 3 \cos x - 2$ را رسم کنید



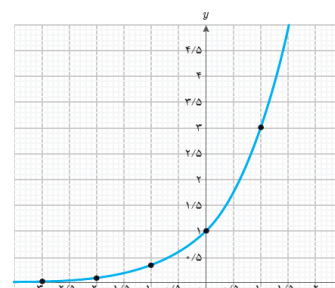
x	آبی $y = \cos x$	سبز $y = 3 \cos x$	$y = 3 \cos x - 2$
۰	۱	+۳	+۱
$\frac{\pi}{2}$	۰	۰	۰
π	-۱	-۳	-۵
$\frac{3\pi}{2}$	۰	۰	۰
2π	۱	+۳	+۱

مثال ۱۰: در تابع مثلثاتی $f(x) = \sin x + \cos x$ با دامنه $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید $f(\frac{\pi}{6})$ را بدست آورید.

$$f(\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{6}) + \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

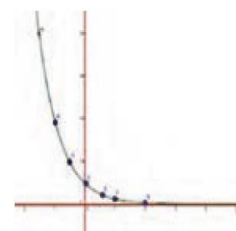
مثال ۱۱: تابع $y = 3^x$ را رسم کنید.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y = 3^x$	$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$	$3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$	$3^0 = 1$	$3^1 = 3$	$3^2 = 9$



مثال ۱۲: تابع $y = (\frac{1}{4})^x$ را رسم کنید.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y = (\frac{1}{4})^x$	$(\frac{1}{4})^{-2} = 4^2 = 16$	$(\frac{1}{4})^{-1} = 4^1 = 4$	$(\frac{1}{4})^0 = 1$	$(\frac{1}{4})^1 = \frac{1}{4}$	$(\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$



مثال ۱۳: شخصی ۱۰۰ میلیون تومان پول در بانک با سود ۲۰ درصد سرمایه گذاری کرده است موجودی شخص در پایان سال پنجم چقدر است؟

r : نرخ سود a : سرمایه اولیه

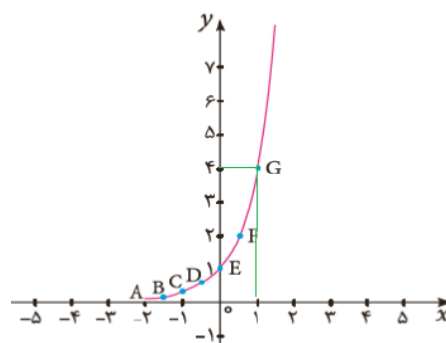
$$a_n = a \cdot (1+r)^n = 100 \times (1+0.2)^5 = 100 \times 1.2^5 = 100 \times 2.48832 = 248.832 \approx 249 \text{ میلیون تومان}$$

مثال ۱۴: در تابع $y = ab^x$ مقادیر a, b را مشخص کنید. سپس $f(2)$ را محاسبه کنید.

مقادیر از روی شکل بدست آمده

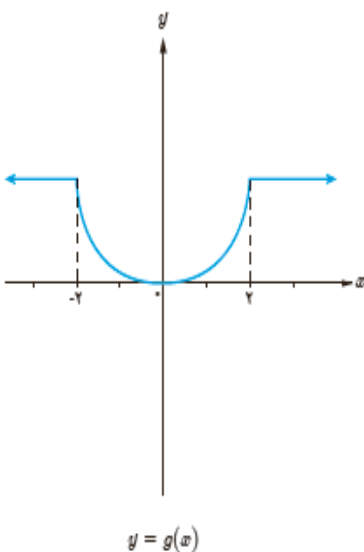
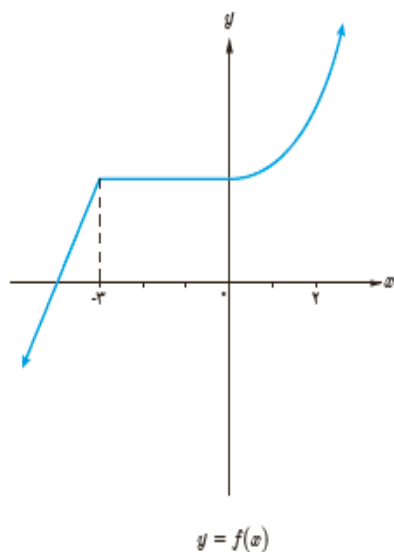
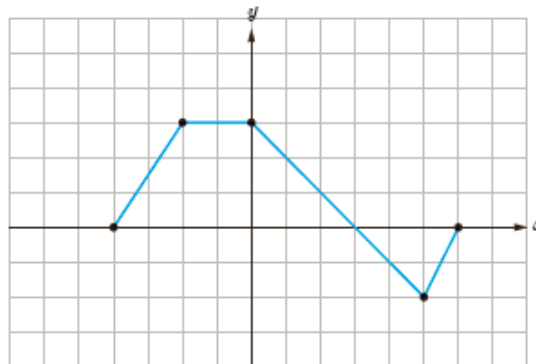
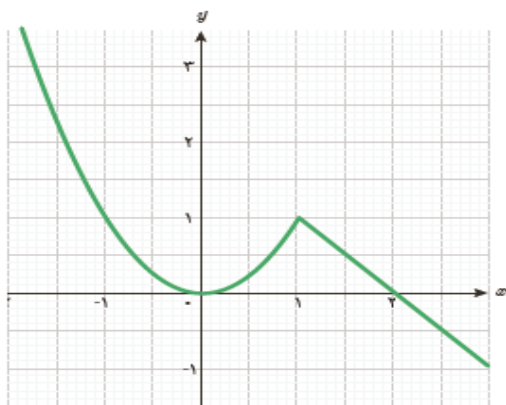
$$\left. \begin{aligned} y = ab^x &\xrightarrow{x=0, y=1} 1 = ab^0 \Rightarrow a = 1 \\ y = ab^x &\xrightarrow{x=1, y=4} 4 = 1 \times b^1 \Rightarrow b = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) = 1 \times 4^x$$

$$f(x) = 1 \times 4^x = 4^x \Rightarrow f(2) = 4^2 = 16$$



نمونه سوال پودمان ۱

۱- در نمودارهای زیر ضابطه تابع را بنویسید



۲- نمودار توابع چند ضابطه ای زیر را رسم کنید. و دامنه تعریف هر کدام را بنویسید

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5 & -3 \leq x < -1 \\ -2 & -1 \leq x < +2 \\ -4x + 3 & +2 \leq x < 4 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < -2 \\ 4 - x^2 & -2 \leq x < +2 \\ x^2 - 4 & +2 \leq x \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & -3 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ 2^x & 1 \leq x < 3 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3 & -2 \leq x < 0 \\ -2x + 5 & 0 \leq x \leq +2 \\ -x^2 + 4 & +2 < x \end{cases}$$

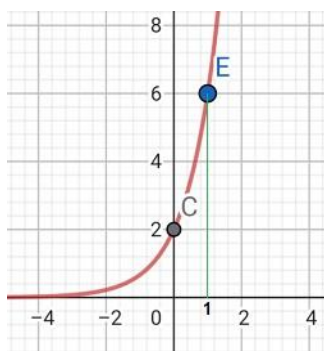
۳- نمودار توابع مثلثاتی زیر را رسم کنید. دامنه تعریف توابع $D_f = [0, 2\pi]$

- a) $\sin x$ b) $\cos x$ c) $\sin 3x$ d) $\cos 3x$
 e) $3 \sin x - 2$ f) $-2 \cos x + 3$ g) $2 \sin x + 3 \cos x$ h) $2 \cos x - 3 \sin x$

۴- الف) در صورتیکه بهای هزینه مصرفی برق کمتر از ۲۰ کیلو وات ۵۰۰۰ تومان باشد و از ۲۰ حداقل کیلو وات تا کمتر از ۱۵۰ کیلو وات به ازای هر کیلو وات ۷۰ تومان و تا ۲۰ کیلو وات همان شرایط قبلی و از ۱۵۰ کیلو وات تا حداکثر ۳۰۰ کیلو وات به ازای هر کیلو وات ۲۰۰ تومان و تا ۱۵۰ کیلو وات همان شرایط قبلی و بیشتر از ۳۰۰ کیلو وات به ازای هر کیلو وات ۴۰۰ تومان باشد. تابع بهای پرداخت برق مصرفی را بنویسید. ب) نمودار آن رسم کنید پ) به ازای مصرف ۱۲۰ کیلو وات هزینه را محاسبه کنید ت) به ازای مصرف ۴۳۰ کیلو وات هزینه را محاسبه کنید

۵- شخصی ۵۰۰ میلیون تومان پول در بانک با سود ۲۰ درصد سرمایه گذاری کرده است موجودی شخص در پایان سال پنجم چقدر است؟

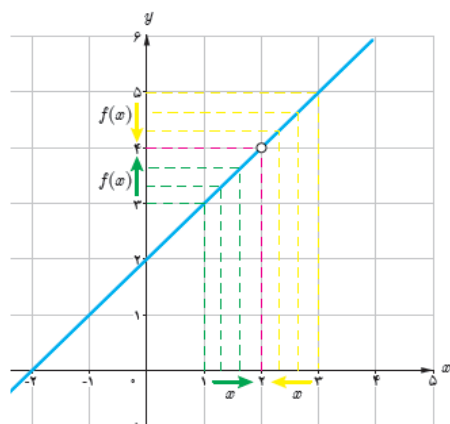
۶- در تابع $y = ab^x$ مقادیر a, b را مشخص کنید. سپس $f(2)$ را محاسبه کنید.



پودمان ۲

مثال ۱: رفتار تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ را در اطراف نقطه $x = 2$ را مشخص کنید

نقطه $x = 2$ در دامنه تعریف تابع نیست چون در کسرها مخرج باید مخالف صفر باشد $x \neq 2 \Rightarrow x - 2 \neq 0$



x از چپ به عدد ۲ نزدیک می شود

x از راست به عدد ۲ نزدیک می شود

x	۱	۱/۵	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	→	۲	←	۲/۰۰۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۵	۳
$f(x)$	۳	۳/۵	۳/۹	۳/۹۹	۳/۹۹۹	→	?	←	۴/۰۰۰۱	۴/۰۰۱	۴/۰۱	۴/۵	۵

$f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می شود

$f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می شود

همانگونه که مشاهده میکنید وقتی x به عدد ۲ نزدیک می شود. مقدار تابع به عدد ۴ نزدیک می شود هم قبل از

عدد ۲ و هم بعد از عدد ۲ در این مواقع میگوییم حد تابع در نقطه $x = 2$ برابر ۴ است و به صورت $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

نمایش می دهیم. بدون ترسیم شکل و یا مقدار گذاری می توانیم با روش های مختلف حد توابع را محاسبه کنیم

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \Rightarrow f(2) = \frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0} \text{ مبهم است}$$

برای رفع ابهام اولین روش تجزیه به کمک اتحادها است

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\overbrace{(x-2) \cdot (x+2)}^{\text{مزدو}}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 2 + 2 = 4$$

مثال ۲: فرض کنید تابع h با قانون $h(t) = \frac{t^2 - 4t - 60}{2t - 20}$ ارتفاع هواپیمایی را در بازه زمانی $(0, 5)$ را مشخص کند.

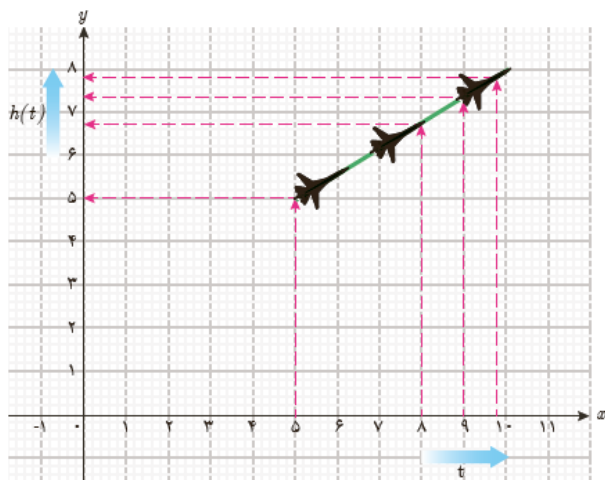
t را بر حسب دقیقه و $h(t)$ را بر حسب کیلومتر در نظر بگیرید. تعیین کنید.

(۱) ارتفاع هواپیما در لحظه $t = 8$ چقدر است؟

$$h(t) = \frac{t^2 - 4t - 60}{2t - 20} \Rightarrow h(8) = \frac{8^2 - 4(8) - 60}{2(8) - 20} = \frac{64 - 32 - 60}{16 - 20} = \frac{-28}{-4} = 7$$

(۲) آیا در لحظه $t = 10$ می توان از طریق تابع h ارتفاع هواپیما را بدست آورد؟ چرا؟

نقطه $t=10$ در دامنه تعریف تابع نیست چون در کسرها مخرج باید مخالف صفر باشد $t \neq 10 \Rightarrow 2t - 20 \neq 0$ بنابراین در لحظه $t=10$ نمی توان ارتفاع را مشخص کرد



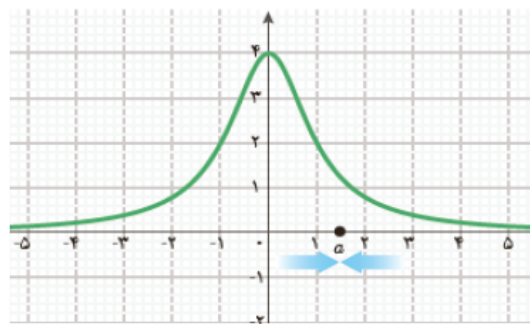
t	5	6	7	8	9	9/9	9/99	9/999 $\rightarrow 10$
$h(t)$	5/5	6/5	7/5	8/5	9/5	9/95	9/995	9/9995 $\rightarrow ?$

همانگونه که مشاهده می کنید . هرچه به $t=10$ نزدیکتر می شویم به ارتفاع ۸ نزدیکتر می شویم

$$h(10) = \frac{10^2 - 4(10) - 60}{2(10) - 20} = \frac{100 - 40 - 60}{20 - 20} = \frac{0}{0} = \text{مبهم است باید رفع ابهام شود}$$

$$\lim_{x \rightarrow 10} h(t) = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{t^2 - 4t - 60}{2t - 20} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\overbrace{(t-10) \times (t+6)}^{\text{جمله مشترک}}}{2(t-10)} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{(t+6)}{2} = \frac{(10+6)}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

مثال ۳: حد تابع $g(x) = \frac{4}{x^2 + 1}$ با دامنه $\mathbb{R}$ در چه نقاطی قابل تعریف است؟

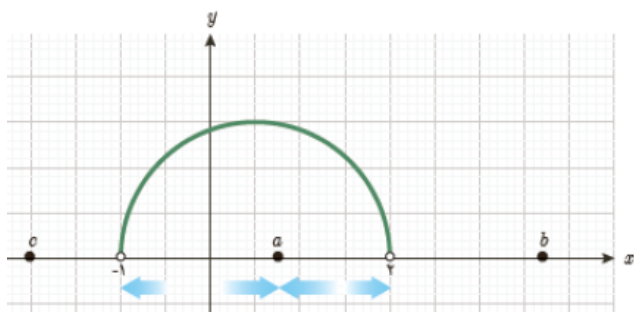


توجه : در کسرها مخرج باید مخالف صفر باشد

$x^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq -1$ این رابطه در کلیه مقادیر دامنه تعریف $\mathbb{R}$ صدق می کند. یعنی هر مقدار دلخواه a در تابع می تواند قرار گیرد .

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{4}{x^2 + 1} = \frac{4}{a^2 + 1}$$

مثال ۴: حد تابع $f(x) = \sqrt{(x+1)(2-x)}$ با دامنه $(-1, 2)$ در چه نقاطی قابل تعریف است؟ و در چه نقاط قابل تعریف نیست؟



از روی نمودار تابع مشخص است که در بازه $(-1, 2)$ از دو طرف مانند نقطه a می توان نزدیک شد بنابراین در بازه $[-1, 2]$ حد قابل محاسبه است ولی خارج از بازه $[-1, 2]$ حد قابل محاسبه نیست مانند نقاط b, c در نقطه -1 حد راست دارد و در نقطه 2 حد چپ دارد

توجه : بدون رسم نمودار با استفاده از جدول تعیین علامت می توان دامنه تعریف را بدست آورد و بر مبنای آن نقاط مثبت جواب است

نکته :

۱- در توابع کسری باید مخرج مخالف صفر باشد تا قابل تعریف باشد

۲- در توابع رادیکالی با فرجه زوج باید زیر رادیکال بزرگتر مساوی صفر باشد تا قابل تعریف باشد

۳- می دانیم $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \approx 1$ و از هم ارزی ها ی زیر در صورت مبهم بودن استفاده می کنیم . (u : چند جمله ای)

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \approx x$	$\lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \tan x \approx x$
$\lim_{u \rightarrow \infty} \sin u \approx u$	$\lim_{u \rightarrow \infty} 1 - \cos u \approx \frac{u^2}{2}$	$\lim_{u \rightarrow \infty} \tan u \approx u$

۴- اتحادهای مهم جهت تجزیه چند جمله ایها

فرمول	کاربرد	اتحاد
$(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$	دوجمله ای با علامت وسط منفی	مزدوج
$(x+a).(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$	سه جمله ایها	جمله مشترک
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	سه جمله ایها	مربع یک دوجمله ای (اتحاد اول)
$a^3 - b^3 = (a-b).(a^2 + ab + b^2)$	دو جمله ای با توان ۳ با علامت منفی وسط	لاگرانژ (چاق و لاغر)
$a^3 + b^3 = (a+b).(a^2 - ab + b^2)$	دو جمله ای با توان ۳ با علامت مثبت وسط	لاگرانژ (چاق و لاغر)

مثال ۵: حد تابع $g(x) = \frac{x^2}{4-x^2}$ در چه نقاطی قابل تعریف است؟

در توابع کسری باید مخرج مخالف صفر باشد تا قابل تعریف باشد

$$g(x) = \frac{x^2}{4-x^2} \Rightarrow 4-x^2 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq \pm 2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

مثال ۶: حد تابع $g(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ را در نقطه $x = 2$ را محاسبه کنید

$$g(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \frac{2^2 - 2 - 2}{2 - 2} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

برای رفع ابهام از تجزیه استفاده می کنیم

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\overbrace{(x-2)(x+1)}^{\text{جمله مشترک}}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 2 + 1 = 3$$

حد مجموع و حاصل ضرب دو تابع

اگر دو تابع f و g با دامنه یکسان در نقطه $x = a$ دارای حد باشند. آنگاه مجموع و تفاضل و حاصل ضرب های این دو تابع در نقطه a حد دارند. یعنی

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) \end{aligned}$$

مثال : حد تابع $f(x) = x^2$ را در نقطه $x = -2$ را محاسبه کنید .

اگر $g(x) = x$ فرض شود $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (x) = -2$ بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} x^2 = \lim_{x \rightarrow -2} (x \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -2} (x) \cdot \lim_{x \rightarrow -2} (x) = -2 \times -2 = 4$$

مثال : حد تابع $f(x) = \sin x \cdot (1 - \cos x)$ را در نقطه $x = \frac{\pi}{3}$ را محاسبه کنید .

چون ضرب دو تابع است حد تک تک توابع را می گیریم و با هم ضرب می کنیم

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sin x \cdot (1 - \cos x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sin x \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (1 - \cos x) = \sin \frac{\pi}{3} \cdot (1 - \cos \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

مثال: حد تابع $f(x) = x^2 + x - 5$ با دامنه $\mathbb{R}$ را در نقطه $x = 2$ را به دست آورید.

چون تابع به صورت جمع چند جمله ای است بنابراین حد تک تک جملات را می گیریم و بایکدیگر جمع یا تفریق

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 5) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 5 = 2^2 + 2 - 5 = 4 + 2 - 5 = 1 \quad \text{می کنیم}$$

حد حاصل تقسیم دو تابع

اگر دو تابع f و g با دامنه یکسان در نقطه $x = a$ دارای حد باشند و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ آنگاه تابع f بر g نیز در نقطه

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad \text{یعنی } a \text{ حد دارند.}$$

مثال: حد تابع $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$ با دامنه $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید.

(۱) حد این تابع را در نقطه $x = -1$ به دست آورید.

(۲) حد این تابع را در نقطه دلخواه a به دست آورید.

(۱) چون در نقطه $x = -1$ مخرج مخالف صفر است و برابر ۲ است بنابراین:

$$۱) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x}{x^2 + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (3x)}{\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 1)} = \frac{3(-1)}{(-1)^2 + 1} = \frac{-3}{1 + 1} = -\frac{3}{2}$$

(۱) چون در نقطه دلخواه $x = a$ مخرج مخالف صفر است و برابر $a^2 + 1$ است بنابراین:

$$۲) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{3x}{x^2 + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} (3x)}{\lim_{x \rightarrow a} (x^2 + 1)} = \frac{3a}{a^2 + 1}$$

مثال: حد تابع $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ با دامنه $(0, 1)$ را در $x = 1$ بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 2)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1)} = \frac{(1)^2 - 3(1) + 2}{(1)^2 - 1} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم است باید رفع ابهام شود}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\overbrace{(x-1)(x-2)}^{\text{جمله بشد تر گ}}}{\underbrace{(x-1)(x+1)}_{\text{مزدو ج}}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x+1} = \frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

مثال: حد تابع $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{-1, +1\}$ را در نظر بگیرید.

(۱) حد این تابع را در نقطه $x = 3$ به دست آورید. (۲) حد این تابع را در نقطه دلخواه a به دست آورید.

(۳) حد این تابع را در نقطه $x = -1$ به دست آورید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = \frac{3^3 + 1}{3^2 - 1} = \frac{27 + 1}{9 - 1} = \frac{28}{8} = \frac{7}{2}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = \frac{a^3 + 1}{a^2 - 1}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = \frac{(-1)^3 + 1}{(-1)^2 - 1} = \frac{-1 + 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم است باید رفع ابهام شود}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - x + 1)}{(x-1)} = \frac{(-1)^2 - (-1) + 1}{(-1) - 1} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

مثال: دامنه تعریف تابع $g(x) = \frac{x-7}{\sqrt{7-x}}$ را بدست آورید و حد تابع وقتی x به سمت ۳ میل میکند را محاسبه کنید

مخرج باید مخالف صفر باشد و زیر رادیکال بزرگتر از صفر $7-x > 0 \Rightarrow 7 > x \Rightarrow D_f = (7, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 7} g(x) = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-7}{\sqrt{7-x}} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{7-7}{\sqrt{7-7}} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم است و تابع در نقطه ۷ دارای حد راست است طبق دامنه}$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{v}} g(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{v}} \frac{x - \sqrt{v}}{\sqrt{v} - x} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{v}} \frac{-(\sqrt{v} - x)}{\sqrt{v} - x} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{v}^+} \frac{-[(\sqrt{v} - x) \cdot (\sqrt{v} - x)]}{\sqrt{v} - x} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{v}^+} [-(\sqrt{v} - x)] = 0$$

مثال: حد تابع $f(x) = \frac{(x^2 + 2) \sin x}{x(x^2 - 1)}$ را در نقطه $x = 0$ محاسبه کنید

$$f(x) = \frac{(x^2 + 2) \sin x}{x(x^2 - 1)} \Rightarrow f(0) = \frac{(0^2 + 2) \sin(0)}{(0)(0^2 - 1)} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم است باید رفع ابهام شود}$$

در هم ارزی ها $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \approx 1$ و به جای یکس مقدار صفر می گذاریم

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2) \sin x}{x(x^2 - 1)} \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2)}{(x^2 - 1)} = \frac{(0^2 + 2)}{(0^2 - 1)} = \frac{2}{-1} = -2$$

مثال: حد تابع $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$ را در نقطه $x = 0$ محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \frac{\sin^2 0}{1 - \cos 0} = \frac{0}{1 - 1} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم است باید رفع ابهام شود}$$

روش اول تجزیه

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2 x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) = (1 + \cos 0) = 1 + 1 = 2$$

روش دوم هم ارزی

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} \xrightarrow[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2}}]{\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \approx x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} = 2$$

توجه : در توابع کسری مخرج باید مخالف صفر باشد

نکته ۱: در صورتیکه دو تابع f و g در نقطه d حد داشته باشند. در این صورت $f \pm g$ و $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ یا $\frac{g}{f}$ حد دارند

نکته ۲: در صورتیکه دو تابع f و g در نقطه d حد نداشته باشند. در این صورت در مورد وجود حد در توابع $f \pm g$ و $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ نمی توان نظر قطعی داد.

نمونه سوال ریاضی ۲ پودمان ۳

۱- تابع ارتفاع یک هواپیما به صورت $h(t) = \frac{t^2 - 8t - 20}{2t - 20}$ است. در بازه زمانی $(0, 50]$ تعیین کنید.

(۱) دامنه تعریف تابع (۲) ارتفاع هواپیما در لحظه ۸ ثانیه (۳) ارتفاع هواپیما در لحظه ۱۰ ثانیه

۲- دامنه تعریف تابع $g(x) = \frac{3-x}{\sqrt{3-x}}$ را بدست آورید و حد تابع وقتی x به سمت ۳ میل میکند را محاسبه کنید

۳- دامنه تعریف تابع $g(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ را بدست آورید و حد تابع وقتی x به سمت ۲ میل میکند را محاسبه کنید

۴- دامنه تعریف تابع $g(x) = \frac{4}{x^2 + 1}$ را بدست آورید و حد تابع وقتی x به سمت مقدار دلخواه میل میکند را محاسبه کنید

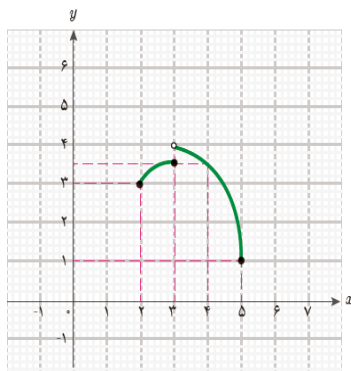
۵- دامنه تعریف تابع $f(x) = \sqrt{(x+5)(4-x)}$ را بدست آورید و حد تابع در چه نقاطی قابل تعریف است.

۶- حد تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ را وقتی x به سمت صفر میل میکند را محاسبه کنید

۷- دامنه تعریف تابع $g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ را بدست آورید و حد تابع وقتی x به سمت یک میل میکند را محاسبه کنید

۸- دامنه تعریف تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$ را بدست آورید و حد تابع وقتی x به سمت ۲ میل میکند را محاسبه کنید

۹- حد تابع در کدامیک از نقاط ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ وجود دارد و در صورت وجود مقدار آن را محاسبه کنید.



۱۰- آیا تابع $g(x) = \frac{x+2}{x-2}$ در نقطه $x=2$ حد دارد با رسم شکل و جدول تعیین علامت توضیح دهید.

۱۱- حد توابع زیر را در نقاط مشخص شده بدست آورید.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 + 2x + 7$

b) $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x^2 - 5x + 8}$

c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+8}{x^2 - 3x + 6}$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$

f) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 4}$

g) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin(x-4)}{x^2 - 16}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 2x^2) \sin x}{x^3 \tan x}$

I) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3 + x) \sin x}{x^2(1-x)}$

J) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^3 + 4t}}{\sqrt{t}}$

k) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3 - 8)(x^2 + 6x + 8)}{x^2 - 4}$

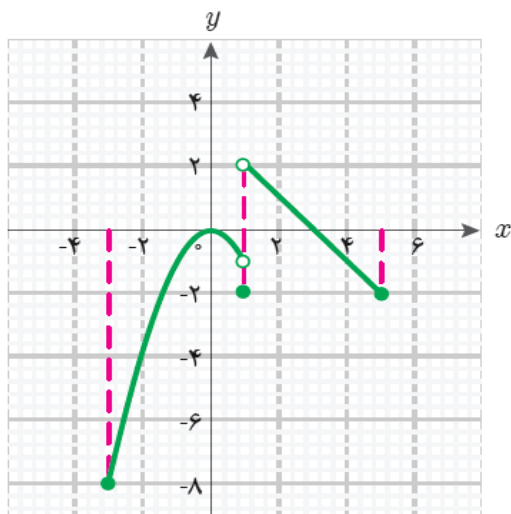
L) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sin(x^2 + 5x + 6)}{x^2 - 9}$

m) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{9t^4 + t^6}}{2t^2}$

n) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8}$

o) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^4 - 6x^2 + 8}{3x^4 + 5x + 10}$

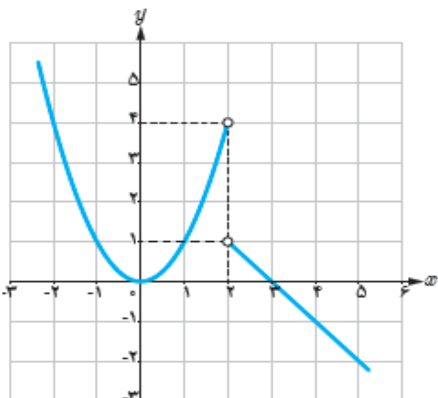
۱۲- حد تابع مقدار تابع در نقاط ۴- و ۳- و ۵ و ۱ و ۶ را بدست آورید.



ریاضی ۳ پودمان ۳

نکته ۱: اگر حد چپ و حد راست برابر باشد یعنی $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ آنگاه تابع حد دارد

مثال ۱: در نمودار شکل زیر آیا تابع در نقطه $x=2$ حد دارد؟

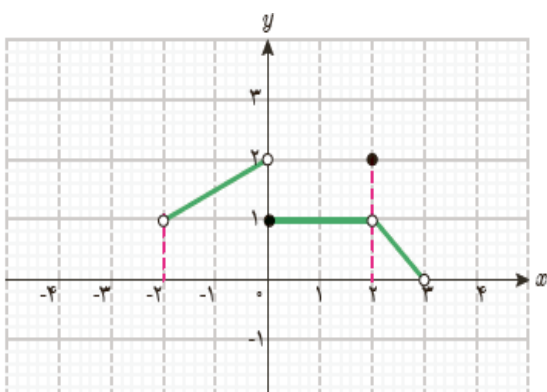


شرط داشتن حد برابری حد چپ و راست است

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 \neq 4 \text{ بنابراین تابع حد ندارد}$$

مثال ۲: در نمودار شکل زیر آیا تابع در نقطه $x = -2, 0, 2, 3$ حد دارد؟



در نقطه $x = -2$ حد چپ ندارد $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +1$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +1, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +1, f(2) = 2$$

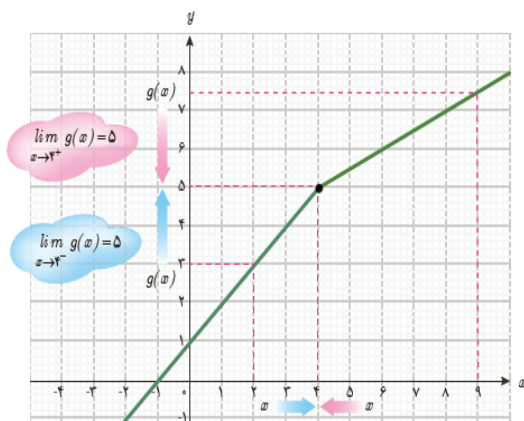
در نقطه $x = 2$ حد دارد ولی پیوسته نیست

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq f(2) \text{ چون}$$

در نقطه $x = 3$ حد راست ندارد و $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0$

مثال ۲: آیا تابع $g(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 4 \\ \frac{x}{2} + 3 & x > 4 \end{cases}$ در نقطه $x = 4$ حد دارد؟

$$\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^-} x+1 = 4+1 = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x}{2} + 3 = \frac{4}{2} + 3 = 2+3 = 5 \end{cases} \Rightarrow 5 = 5 \Rightarrow \text{حد دارد}$$



توجه : اگر حد چپ و حد راست برابر باشد و با مقدار تابع برابر باشد آنگاه تابع پیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

بنابراین تابع $g(x)$ پیوسته است

مثال : آیا تابع $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & x \leq 2 \\ x-4 & x > 2 \end{cases}$ در نقطه a دارای حد است؟

شرط آنکه تابع دارای حد باشد این است که برابری حد چپ و راست است که $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} 2-x^2 = 2-2^2 = 2-4 = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} x-4 = 2-4 = -2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -2 \text{ در } x=2 \text{ حد دارد}$$

مثال : در تابع $f(x) = \begin{cases} ax+2 & x < -1 \\ x^2+a & x > -1 \end{cases}$ مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع دارای حد باشد.

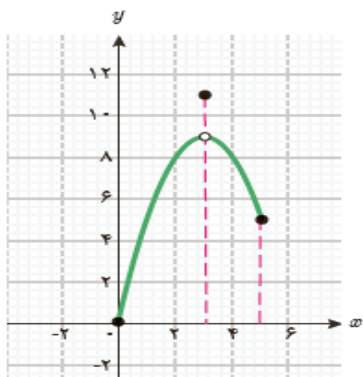
شرط آنکه تابع دارای حد باشد این است که برابری حد چپ و راست است که $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} ax+2 = a(-1)+2 = -a+2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2+a = (-1)^2+a = 1+a \end{cases} \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)} -a+2 = 1+a \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

توجه: شرط پیوستگی تابع این است که $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ مقدار تابع = حد چپ = حد راست است که $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ باشد.

مثال : نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2+6x & x \neq 3 \\ 11 & x = 3 \end{cases}$ با دامنه تعریف تابع $D_f = [0, 5]$ را رسم کنید. و آیا تابع در نقطه

$x=3$ پیوسته است؟



چون علامت مخالف دارد یعنی حد چپ و حد راست از ضابطه اول مشخص می شوند

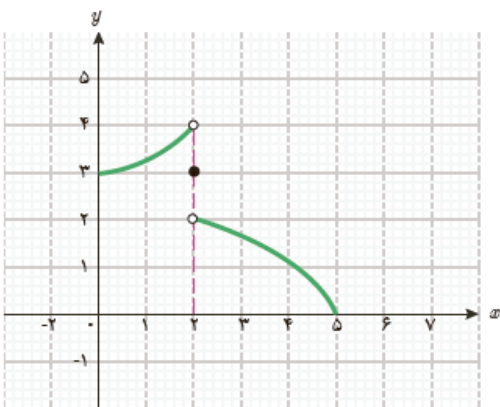
$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} -x^2 + 6x = -(3)^2 + 6(3) = 9$$

چون علامت مساوی دارد یعنی مقدار تابع از ضابطه

دوم مشخص می شود $f(3) = 9$

بنابراین تابع پیوسته نیست $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \neq f(3)$

مثال: با دلیل توضیح دهید آیا نمودار زیر نمودار یک تابع پیوسته در نقطه $x=2$ است؟



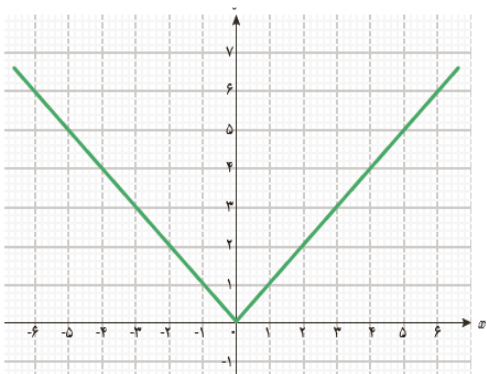
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 \\ f(2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq f(2)$$

بنابر این تابع در نقطه $x=2$ نه حد دارد نه پیوسته است

مثال: آیا تابع $|x|$ در نقطه $x=0$ پیوسته است؟

شرط پیوستگی تابع این است که حد چپ=حد راست=مقدار تابع $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ باشد.

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} |x| = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$



بنابراین $|x|$ در نقطه $x=0$ حد دارد و پیوسته است

نمودار تابع $|x|$ به این صورت است. $\Leftarrow$

مثال : آیا تابع
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$
 در نقطه $x = 0$ پیوسته است ؟ با ذکر دلیل

شرط پیوستگی تابع این است که حد چپ = حد راست = مقدار تابع $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ باشد.

بله چون در هم ارزی ها $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ بنابراین حد چپ و حد راست برابر است و

برابر ۱ می باشد و مقدار تابع در نقطه صفر نیز یک می باشد $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) = 1$

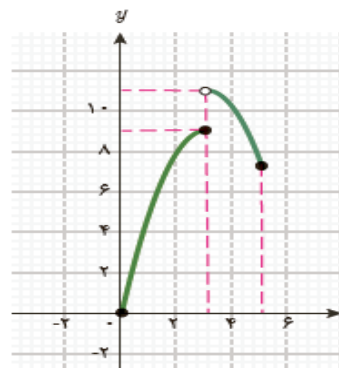
مثال : پیوستگی تابع
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x & 0 \leq x \leq 3 \\ -x^2 + 6x + 2 & 3 < x \leq 5 \end{cases}$$
 را در نقطه $x = 3$ بررسی کنید. دامنه تعریف آن را

بنویسید. و نمودار آن را رسم کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} -x^2 + 6x = -(3)^2 + 6(3) = 9 = f(3) \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} -x^2 + 6x + 2 = -(3)^2 + 6(3) + 2 = 11 \end{cases} \Rightarrow 9 \neq 11 \Rightarrow$$

حد چپ و مقدار تابع برابر ۹ و حد راست برابر ۱۱ است بنابراین این تابع حد ندارد و تابع فقط پیوستگی چپ دارد.

و دامنه تعریف تابع $D_f = [0, 5]$



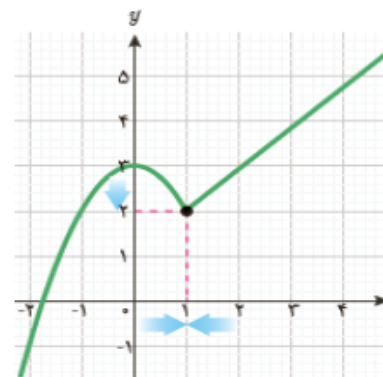
مثال : پیوستگی تابع
$$g(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & x \leq 1 \\ x + 1 & 1 < x \end{cases}$$
 را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید. دامنه تعریف آن را بنویسید. و

نمودار آن را رسم کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} 3 - x^2 = 3 - 1^2 = 2 = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 1 = 1 + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

تابع پیوسته است $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 2$

دامنه تعریف کل اعداد حقیقی است $D_f = \mathbb{R}$

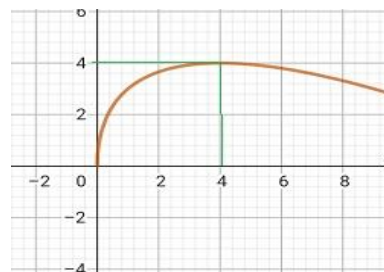


مثال: پیوستگی تابع $g(x) = 4\sqrt{x} - x$ را در نقطه $x = 4$ بررسی کنید. دامنه تعریف آن را بنویسید. و نمودار آن را رسم کنید.

در چند جمله ای ها دامنه تعریف R است ولی چون تابع با فرجه زوج داریم باید زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر باشد بنابراین این $D_f = [0, +\infty)$ است

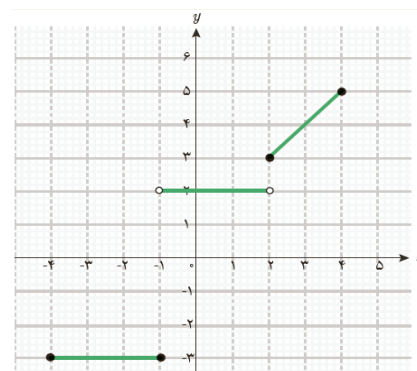
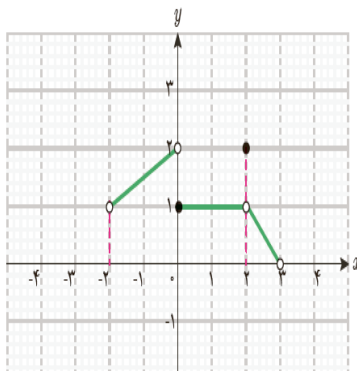
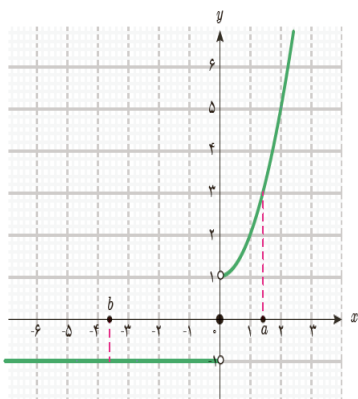
$$\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4} 4\sqrt{x} - x = 4\sqrt{4} - 4 = 4 \times 2 - 4 = 4 = f(4)$$

چون حد و مقدار تابع برابریستند تابع پیوسته است.

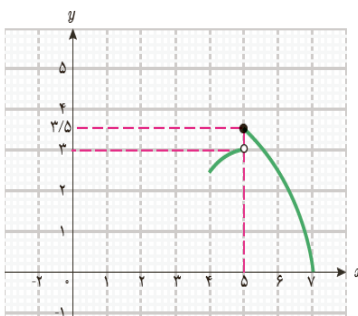


نمونه سوال ریاضی ۳ پودمان ۳

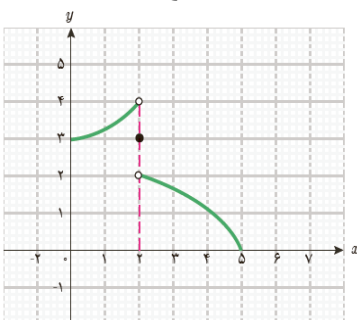
۱- در شکلهای زیر حدچپ و راست و پیوستگی راست و چپ توابع را در نقاط مشخص شده بررسی کنید.



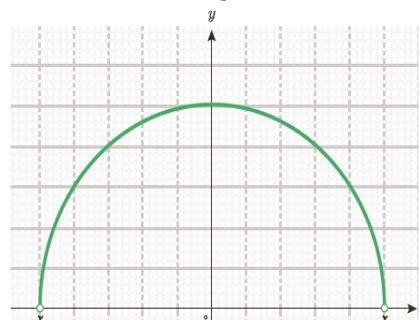
$$x=0$$



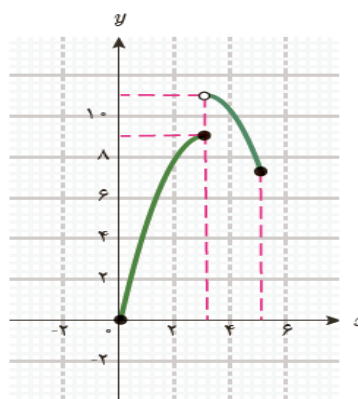
$$x=2 \text{ و } x=0$$



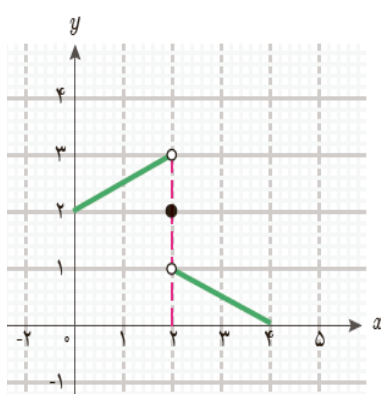
$$x=2 \text{ و } x=-1$$



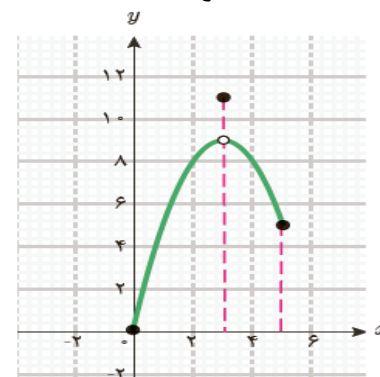
$$x=0$$



$$x=2$$



$$x=-2 \text{ و } x=2$$



$$x=2 \text{ و } x=3 \text{ و } x=0$$

$$x=2$$

$$x=0 \text{ و } x=3 \text{ و } x=0$$

۲- حد و نوع پیوستگی تابع $\begin{cases} x+5 & x > 3 \\ 2x+2 & x \leq 3 \end{cases}$ را در نقطه $x=3$ تعیین کنید.

۳- در تابع $\begin{cases} ax-3 & x > 2 \\ ax+2 & x \leq 2 \end{cases}$ مقدار a را طوری تعیین کنید که در نقطه $x=2$ پیوسته باشد

$$۴- \text{حد و پیوستگی تابع } f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 2 \\ 2x-1 & x = 2 \\ x-1 & x > 2 \end{cases} \text{ را در نقطه } x=2 \text{ بررسی کنید.}$$

۵- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در نقطه $x=3$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} bx-3 & x > 3 \\ 8 & x = 3 \\ ax+2 & x < 3 \end{cases}$$

۶- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در نقطه $x=-1$ پیوسته باشد.

$$g(x) = \begin{cases} bx-3 & x < -1 \\ 3x+5 & x = -1 \\ ax+2 & x > -1 \end{cases}$$

$$۶- \text{حد و پیوستگی تابع } g(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} \text{ را در نقطه } x=1 \text{ بررسی کنید}$$

$$۷- \text{حد و پیوستگی تابع } y = \sqrt{4-2x} + x - 1 \text{ را در نقطه } x=2 \text{ بررسی کنید}$$

۸- دامنه تعریف تابع زیر را بنویسید. و نمودار آن را رسم کنید. و پیوستگی تابع زیر را در نقاط -1 و $+1$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & -3 \leq x < -1 \\ x+1 & -1 \leq x < 1 \\ 2 & 1 < x < 5 \end{cases}$$

۹- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در نقطه $x=-1$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax+2 & x < -1 \\ bx+1 & x = -1 \\ 2ax+2 & x > -1 \end{cases}$$

۱۰- مقدار a و b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در نقطه $x=1$ دارای پیوستگی چپ باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax+1 & x > 1 \\ 2x-a & x = 1 \\ 3ax+2 & x < 1 \end{cases}$$

۱۱- آیا تابع قدر مطلق x در نقطه $x=0$ حد دارد؟ آیا تابع قدر مطلق x در نقطه $x=0$ پیوسته است؟ علت را با رسم نمودار توضیح دهید.

۱۲- آیا توابع $L(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = b^x$, $g(x) = \cos x$, $f(x) = \sin x$ پیوسته هستند با رسم نمودار توضیح دهید.

ریاضی ۳ پودمان ۴

کاربرد های مشتق عبارتند از

(۱) تعیین شیب خط مماس وقائم بر منحنی (۲) سرعت لحظه ای و شتاب لحظه ای (۳) تعیین نقاط و ماکزیمم و مینیمم توابع (۴) جهت تقعر منحنی و غیره که در پودمان ۴ و ۵ توضیح داده می شود
مشتق تابع در یک نقطه:

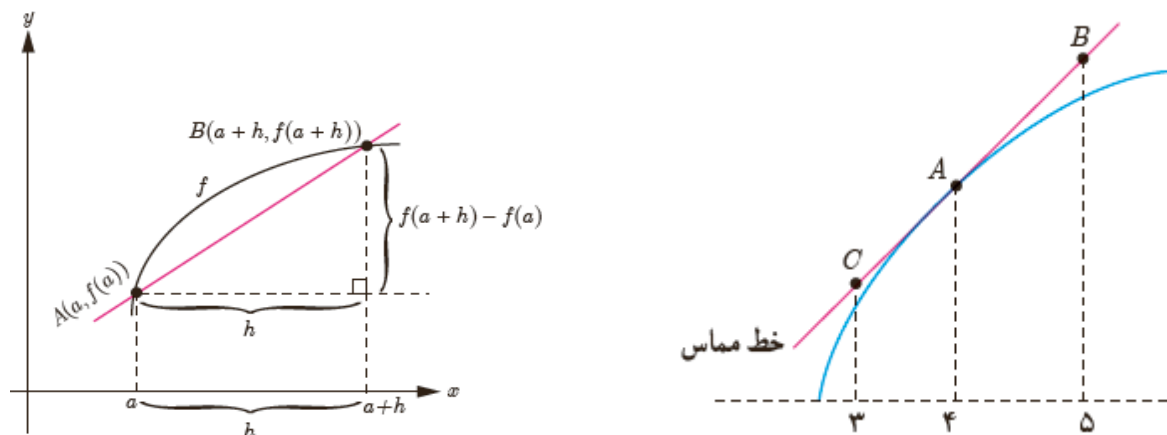
فرض کنید f تابعی با دامنه تعریف D_f باشد. برای نقطه ای مانند a از دامنه این تابع حد زیر را در صورت وجود مشتق مشتق تابع f در نقطه a می نامند و بانماد $f'(x)$ نشان می دهیم. و به صورت زیر تعریف می شود

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \text{ یا } f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

در صورتی که حد بالا وجود نداشته باشد گوییم تابع f در نقطه a مشتق پذیر نیست

نکته: مشتق در نقطه داده شده همان شیب خط است

که مفهوم آن این است که نسبت تغییرات $f(x)$ یعنی $\Delta y = f(a+h) - f(x)$ به ازای کوچکترین تغییرات x یعنی $(\Delta x \text{ یا } h)$ به چه میزان است؟ که این نسبت این در واقع مقدار **شیب خط مماس** بر نمودار در نقطه a را نشان می دهد



مثال: مشتق تابع خطی $f(x) = 3x + 1$ با دامنه $\mathbb{R}$ را در نقاط $x = 1, x = 4$ و نقطه دلخواه a را محاسبه کنید.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \xrightarrow{a=1} f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3(1+h) + 1] - [3(1) + 1]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \xrightarrow{a=4} f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3(4+h) + 1] - [3(4) + 1]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3$$

به طور کلی برای هر نقطه دلخواه a مشتق این تابع به صورت زیر است

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \xrightarrow{a=a} f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3(a+h) + 1] - [3(a) + 1]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3$$

بنابراین می توان گفت اگر $f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$ به عنوان مثال $f(x) = -6x + 50 \Rightarrow f'(x) = -6$

مشتق تابع در هر نقطه دلخواه x :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{یا} \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{تعریف مشتق در حالت کلی به صورت}$$

مشتق تابع $f(x) = 2x - 3$ را با استفاده از تعریف مشتق بدست آورید.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[2(x+h) - 3] - [2x - 3]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x + 2h - 3 - 2x + 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} = 2$$

به طور کلی $f(x) = 10x + 8 \Rightarrow f'(x) = 10$ به عنوان مثال $f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$

مشتق تابع $f(x) = x^2$ را با استفاده از تعریف مشتق بدست آورید.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{(x+h)^2 - x^2}^{\text{اتحاداو ل}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x + 0 = 2x$$

همیشه تابع اولیه خط می خورد

به طور کلی $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = nax^{n-1} = nx^{n-1}$ به عنوان مثال $f(x) = 2x^5 \Rightarrow f'(x) = 5 \times 2x^{5-1} = 10x^4$

مشتق تابع $f(x) = \frac{5}{x^8}$ را با استفاده از تعریف مشتق بدست آورید.

$$f(x) = \frac{5}{x^8} \xrightarrow{a^{-m} = \frac{1}{a^m}} f(x) = 5x^{-8} \Rightarrow f'(x) = (-8)(5)x^{-9} \xrightarrow{a^{-m} = \frac{1}{a^m}} f'(x) = \frac{-40}{x^9}$$

مشتق تابع $y = \sqrt[5]{x^3}$ را با استفاده از تعریف مشتق بدست آورید.

$$y = \sqrt[5]{x^3} \xrightarrow{\sqrt[n]{a^n} = a} y = x^{\frac{3}{5}} \Rightarrow y' = \frac{3}{5} x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} \xrightarrow{a^{-m} = \frac{1}{a^m}} y' = \frac{3}{5x^{\frac{2}{5}}} \xrightarrow{\sqrt[n]{a^n} = a} y' = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$$

به طور کلی $f(x) = \sqrt[n]{x^m} \Rightarrow f'(x) = \frac{n}{m\sqrt[n]{x^{m-n}}}$ به عنوان مثال $y = \sqrt[4]{x^6} \Rightarrow y' = \frac{6}{4\sqrt[4]{x^{6-4}}} = \frac{3}{2\sqrt[4]{x^2}}$

مشتق تابع $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ را با استفاده از تعریف مشتق بدست آورید.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[2(x+h)^2 - 5(x+h) + 3] - [2x^2 - 5x + 3]}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[2x^2 + 4xh + 2h^2 - 5x - 5h + 3] - [2x^2 - 5x + 3]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - 5x - 5h + 3 - 2x^2 + 5x - 3}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4xh + 2h^2 - 5h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4x + 2h - 5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 4x + 2h - 5 = 4x - 5$$

همیشه تابع اولیه خط می خورد

مشتق تابع ثابت $f(x) = 8$ را با استفاده از تعریف مشتق بدست آورید.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[8] - [8]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

به طور کلی $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$ به عنوان مثال $f(x) = -5 \Rightarrow f'(x) = 0$

مشتق تابع ثابت $f(x) = \frac{3}{x}$ را با استفاده از تعریف مشتق بدست آورید.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{3}{x+h}\right] - \left[\frac{3}{x}\right]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3x - 3(x+h)}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3x - 3x - 3h}{(x+h)x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-3h}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3}{(x+h)x} = -\frac{3}{x^2} \end{aligned}$$

به طور کلی $f(x) = \frac{a}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{a}{x^2}$ به عنوان مثال $f(x) = \frac{4}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{4}{x^2}$

مشتق تابع ثابت $f(x) = \sqrt{x}$ را با استفاده از تعریف مشتق بدست آورید.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

به طور کلی $f(x) = \sqrt{ax+b} \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$ به عنوان مثال $f(x) = \sqrt{-2x+3} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{-2x+3}}$

نکته: اگر تابع مشتق پذیر باشد پیوسته است ولی اگر پیوسته باشد نمی توان قطعا گفت مشتق پذیر است

مثال: آیا تابع $|x|$ در نقطه $x=0$ مشتق پذیر است؟

می دانیم تابع $|x|$ در نقطه $x=0$ پیوسته است حال مشتق پذیری را بررسی می کنیم

$$\begin{aligned} f(x) = |x| &= \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \\ f'(x) = |x|' &= \begin{cases} f'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1 \\ f'_-(x) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-(x+h) - (-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-x-h+x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

چون مشتق چپ و راست برابر نیست یعنی $(f'_-(x) \neq f'_+(x))$ بنابراین تابع $|x|$ در نقطه $x=0$ مشتق پذیر نیست

نکته: شرط آنکه تابع مشتق پذیر باشد آن است که مشتق چپ و راست برابر باشند

مثال: تابع دو ضابطه ای $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \leq 3 \\ 2x + 9 & 3 < x \end{cases}$ با دامنه تعریف $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. مشتق پذیری این تابع را در $x=3$ بررسی کنید

ابتدا مشتق چپ را از راه تعریف بدست می آوریم.

$$\begin{aligned} f'_-(a) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{[(3+h)^2 - (3+h)] - [3^2 - 3]}{h} \Rightarrow \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{[9 + 6h + h^2 - 3 - h] - [6]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 + 5h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h(h+5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h + 5 = 5 \end{aligned}$$

حال مشتق راست تابع را بدست می آوریم

$$\begin{aligned} f'_+(a) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{[2 \times (3+h) + 9] - [2 \times 3 + 9]}{h} \Rightarrow \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{[6 + 2h + 9] - [12 + 9]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h - 6}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h}{h} = 2 \end{aligned}$$

چون $2 \neq 5 \Leftrightarrow f'_+(a) \neq f'_-(a)$ بنابراین تابع $f(x)$ در نقطه $x=3$ مشتق پذیر نیست

راه کوتاه با استفاده از فرمول های مشتق

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x \Rightarrow f'_- = 2x - 1 \xrightarrow{x=3} 2 \times 3 - 1 = 5 \\ 2x + 9 \Rightarrow f'_+ = 2 \end{cases} \Rightarrow 2 \neq 5 \quad \text{بنابراین تابع در نقطه } x=3 \text{ مشتق پذیر نیست}$$

مراحل نوشتن معادله خط مماس:

۱- ابتدا از تابع مورد نظر مشتق میگیرم

۲- مقدار x_0 داده شده را در مشتق تابع قرار می دهیم تا شیب خط (m) بدست آید

۳- مقدار x_0 را در تابع اصلی قرار می دهیم تا y_0 بدست آید

۴- معادله خط مماس در نقطه x_0 به صورت $y - y_0 = m(x - x_0)$ نوشته می شود

مثال معادله خط مماس بر منحنی $y = x^2 - 3x$ را در نقطه $x = 1$ را بنویسید.

$$y = x^2 - 3x \Rightarrow y' = 2x - 3 \xrightarrow{x_0=1} m = 2(1) - 3 = -1$$

$$y = x^2 - 3x \xrightarrow{x_0=1} y_0 = (1)^2 - 3(1) = 1 - 3 = -2$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - (-2) = (-1)(x - 1) \Rightarrow y + 2 = -x + 1 \Rightarrow y = -x + 1 - 2 \Rightarrow y = -x - 1$$

نکته ۱: شرط آن که دو خط موازی باشند این است که شیب خط آن ها برابر باشد. یعنی $m = m'$

نکته ۲: شرط آن که دو خط بر هم عمود باشند این است که شیب خط آن ها برعکس و قرینه باشد. یعنی $m' = -\frac{1}{m}$

مثال: معادله خط مماس بر منحنی $y = x^3 - 2x + 4$ را در نقطه $x = -1$ را بنویسید. و معادله خطی را بنویسید که

موازی خط مماس باشد و از نقطه $A \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ عبور کند

$$y = x^3 - 2x + 4 \Rightarrow y' = 3x^2 - 2 \xrightarrow{x_0=-1} m = 3(-1)^2 - 2 = 3 - 2 = 1$$

$$y = x^3 - 2x + 4 \xrightarrow{x_0=-1} y_0 = (-1)^3 - 2(-1) + 4 = -1 + 2 + 4 = 5$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - (5) = (1)(x - (-1)) \Rightarrow y - 5 = x + 1 \Rightarrow y = x + 1 + 5 \Rightarrow y = x + 6$$

شرط آن که دو خط موازی باشند این است که شیب خط آن ها برابر باشد. یعنی $m = m' = 1$ بنابر این

$$y - y_A = m'(x - x_A) \xrightarrow[\substack{x=4 \\ y=-3}]{m=1} y - (-3) = (1)(x - 4) \Rightarrow y + 3 = x - 4 \Rightarrow y = x - 4 - 3 \Rightarrow y = x - 7$$

نکته ۳: مشتق معادله حرکت می شود معادله سرعت و مشتق معادله سرعت می شود شتاب

مثال: معادله حرکت متحرکی به صورت $X(t) = 3t^2 - 12t + 5$ است تعیین کنید.

(۱) معادله سرعت و شتاب

(۲) متحرک پس از چه مدت می ایستد؟

(۳) در چه لحظاتی حرکت تند شونده و در چه لحظاتی کند شونده است؟

$$X(t) = 3t^2 - 12t + 5$$

$$1) x' = v = \frac{dx}{dt} = 6t - 12$$

$$x'' = v' = a = \frac{dv}{dt} = 6$$

$$2) v = 0 \Rightarrow 6t - 12 = 0 \Rightarrow 6t = 12 \Rightarrow t = \frac{12}{6} = 2$$

۳) اگر $av > 0$ باشد تند شونده و اگر $av < 0$ کند شونده

t	۰	۲	$+\infty$
$v = 6t - 12$		مخالف -	موافق +
$a = 6$		+	+
av		-	+
نتیجه		کند شونده	تند شونده

ریاضی ۳ پودمان ۵

مشتق مجموع دو تابع

فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع با دامنه یکسان و در $x=a$ مشتق پذیر باشند. در این صورت تابع $h(x) = f(x) + g(x)$

در $x=a$ مشتق پذیر است. و مشتق آن برابر مشتق مجموع تک تک توابع است. یعنی: $h'(x) = f'(x) + g'(x)$

مثال: مشتق تابع $y = -2x^3 + 8x - 5$ را محاسبه کنید.

چون تابع به صورت مجموع چند تابع است بنابر این مشتق آن برابر مشتق مجموع تک تک توابع است

$$y = -2x^3 + 8x - 5 \Rightarrow y' = -6x^2 + 8$$

مثال: مشتق تابع $y = 4x^3 + \frac{2}{x} - 3\sqrt{x}$ را محاسبه کنید.

$$y = 4x^3 + \frac{2}{x} - 3\sqrt{x} \quad \begin{matrix} f(x) = \frac{a}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-a}{x^2} \\ g(x) = \sqrt{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{matrix} \rightarrow y' = 12x^2 - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

مشتق حاصل ضرب دو تابع

فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع با دامنه یکسان و در $x=a$ مشتق پذیر باشند. در این صورت تابع $h(x) = f(x).g(x)$

در $x=a$ مشتق پذیر است. و مشتق آن برابر است با مشتق اولی در خود دومی بعلاوه مشتق دومی در خود اولی

یعنی: $h'(x) = f'(x).g(x) + g'(x).f(x)$ و به طور کلی در هر نقطه دلخواه $h'(a) = f'(a).g(a) + g'(a).f(a)$

مثال: مشتق تابع $y = (-3x^5 + 10).(2x^6 + 40)$ را محاسبه کنید.

$$y = \underbrace{(-3x^5 + 10)}_{f(x)} \cdot \underbrace{(2x^6 + 40)}_{g(x)} \rightarrow y' = \underbrace{(-15x^4)}_{f'(x)} \cdot \underbrace{(2x^6 + 40)}_{g(x)} + \underbrace{(12x^5 + 40)}_{g'(x)} \cdot \underbrace{(-3x^5 + 10)}_{f(x)}$$

مثال: مشتق تابع $y = (3x^5 - 10x)(2x^3 + 4x)$ را محاسبه کنید.

$$y = \underbrace{(3x^5 - 10x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{(2x^3 + 4x)}_{g(x)} \xrightarrow{h'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)} y' = \underbrace{(15x^4 - 10)}_{f'(x)} \cdot \underbrace{(2x^3 + 4x)}_{g(x)} + \underbrace{(6x^2 + 4)}_{g'(x)} \cdot \underbrace{(3x^5 - 10x)}_{f(x)}$$

برای سهولت در نوشتن فرمول می توانیم به صورت $y = u.v \Rightarrow y' = u'v + v'u$ بنویسیم

مثال: مشتق تابع $y = (3x - \sqrt{x}) \cdot (\frac{5}{x} + 8)$ را محاسبه کنید.

$$y = \underbrace{(3x - \sqrt{x})}_{f(x)} \cdot \underbrace{(\frac{5}{x} + 8)}_{g(x)} \xrightarrow{h'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)} y' = \underbrace{(3 - \frac{1}{2\sqrt{x}})}_{f'(x)} \cdot \underbrace{(\frac{5}{x} + 8)}_{g(x)} + \underbrace{(-\frac{5}{x^2})}_{g'(x)} \cdot \underbrace{(3x - \sqrt{x})}_{f(x)}$$

برای سهولت در نوشتن فرمول می توانیم به صورت $y = u.v \Rightarrow y' = u'v + v'u$ بنویسیم

مثال: با استفاده از رابطه ضرب مشتق دو تابع , مشتق تابع $y = \sqrt{x}$ را محاسبه کنید.

می دانیم $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$ میشود بنابراین از طرفین مشتق می گیریم

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{u \cdot v=u} \xrightarrow{y' = u'v + v'u} 1 = u'u + u'u \Rightarrow 2u'u = 1 \Rightarrow u' = \frac{1}{2u} \Rightarrow u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مشتق تقسیم دو تابع

فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع با دامنه یکسان و در $x=a$ مشتق پذیر باشند. در این صورت به ازای هر x از دامنه

$g(x) \neq 0$. در این صورت تابع $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ نیز در $x=a$ مشتق پذیر است. و مشتق آن برابر است با

مشتق صورت در خود مخرج منهای مشتق مخرج در خود صورت تقسیم بر مخرج به توان دو یعنی :

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2} \quad \text{و به طور کلی در هر نقطه دلخواه} \quad h'(x) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$$

مثال: مشتق تابع $y = \frac{3x^2}{x^3 + 2x}$ را محاسبه کنید.

$$y = \frac{f(x)}{\frac{x^3 + 2x}{g(x)}} \quad h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2} \rightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot \overbrace{(x^3 + 2x)}^{g(x)} - \overbrace{(3x^2 + 2)}^{g'(x)} \cdot \overbrace{(3x^2)}^{f(x)}}{\underbrace{(x^3 + 2x)^2}_{(g(x))^2}}$$

مثال: مشتق تابع $y = \frac{4x-5}{6-2x}$ را محاسبه کنید.

$$y = \frac{4x-5}{6-2x} \quad h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2} \rightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot \overbrace{(6-2x)}^{g(x)} - \overbrace{(-2)}^{g'(x)} \cdot \overbrace{(4x-5)}^{f(x)}}{\underbrace{(6-2x)^2}_{(g(x))^2}} = \frac{24 - 8x + 8x - 10}{(6-2x)^2} = \frac{14}{(6-2x)^2}$$

برای سهولت در نوشتن فرمول می توانیم به صورت $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ بنویسیم

مثال: مشتق تابع $y = \frac{\sqrt{x}-5}{6-\frac{3}{x}}$ را محاسبه کنید.

$$y = \frac{\frac{u}{\sqrt{x}-5}}{6-\frac{3}{x}} \quad y' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cdot \left(6 - \frac{3}{x}\right) - \left(\frac{3}{x^2}\right) \cdot (\sqrt{x}-5)}{\underbrace{\left(6 - \frac{3}{x}\right)^2}_{v^2}}$$

اگر u تابعی از x باشد مشتق توان n ام آن از رابطه $y = u^n \Rightarrow y' = nu^{n-1}u'$ بدست می آید

یا اگر f تابعی از x باشد مشتق توان n ام آن از رابطه $y = f(x)^n \Rightarrow y' = nf'(x)[f(x)]^{n-1}$ بدست می آید

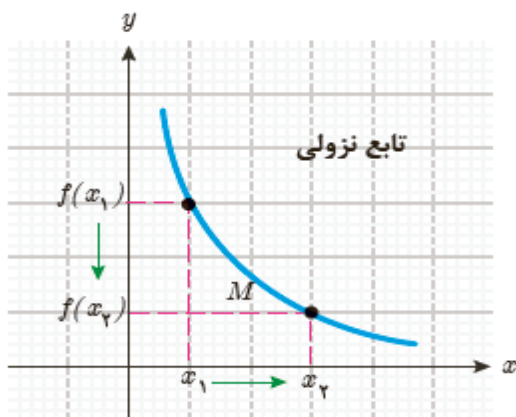
مثال: مشتق تابع $y = \underbrace{(-2x^5 + 10x^3)}_{u^n} \Rightarrow y' = \underbrace{8(-10x^4 + 30x^2)}_n \cdot \underbrace{(-2x^5 + 10x^3)^7}_{u^{n-1}}$ را محاسبه کنید.

اگر تابع به صورت رادیکالی باشد $f(x) = \sqrt[m]{u^n} \Rightarrow f'(x) = \frac{nu'}{m \cdot \sqrt[m]{u^{m-n}}}$

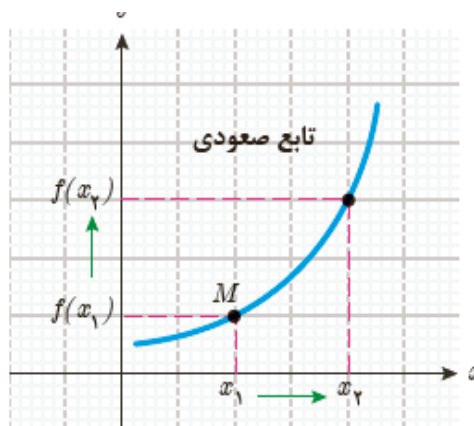
$$y = \sqrt[n]{(x^3 + 2x + 8)^3} \Rightarrow y' = \frac{n \cdot \frac{u'}{u} \cdot (x^3 + 2x + 8)^{\frac{n-1}{n}}}{m \cdot \sqrt[n]{u^{m-n}}} \quad \text{به عنوان مثال}$$

مراحل رسم نمودار توابع

- (۱) مشتق می گیریم و برابر صفر قرار می دهیم تا طول نقاط ماکزیمم یا مینیمم بدست آید
 - (۲) مقادیر بدست آمده را تابع قرار می دهیم تا عرض نقاط ماکزیمم یا مینیمم بدست آید
 - (۳) حد تابع را وقتی x به سمت $\pm\infty$ میل می کند را محاسبه می کنیم
 - (۴) y را برابر صفر می گذاریم تا محل تلاقی با محور x ها مشخص شود
 - (۴) جدول تعیین علامت را رسم می کنیم و رفتار منحنی (صعودی یا نزولی) را مشخص می کنیم
 - (۵) نمودار تابع را رسم می کنیم
- توجه: در توابع بالاتر از درجه ۲ مشتق مرتبه دوم را جهت مشخص کردن تقعر منحنی (نقطه عطف) محاسبه می کنیم



اگر با افزایش x مقدار $f(x)$ کاهش یابد تابع نزولی است یعنی $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$



اگر با افزایش x مقدار $f(x)$ افزایش یابد تابع صعودی است یعنی $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

توجه: اگر در نقطه داده شده مشتق مثبت باشد تابع صعودی و اگر مشتق منفی باشد تابع نزولی است

مثال: نمودار تابع $y = x^2 + 2x + 3$ را رسم کنید و رفتار را مشخص کنید

$$۱) y = x^2 + 2x + 3 \Rightarrow y' = 2x + 2 = 0 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

$$۲) y = x^2 + 2x + 3 \Rightarrow y = (-1)^2 + 2(-1) + 3 = 2$$

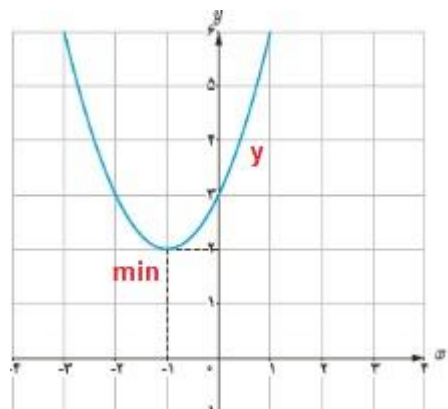
$$۳) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = +\infty$$

$$۴) y = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(1)(3) = -8 < 0$$

در جدول تعیین علامت معادله درجه قبل از ریشه مخالف علامت ضریب x و بعد از ریشه موافق ضریب x علامت گذاری می کنیم

x	-1	$+\infty$
$y' = 2x + 2$	- نزولی	+ صعودی
y	$+\infty$	2

min

بنابراین از $(-\infty, -1]$ نزولی و از $(-1, +\infty)$ صعودی استمثال: نمودار تابع $y = -x^2 + 4x + 5$ را رسم کنید و رفتار را مشخص کنید

$$۱) y = -x^2 + 4x + 5 \Rightarrow y' = -2x + 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$۲) y = -x^2 + 4x + 5 \Rightarrow y = -(2)^2 + 4(2) + 5 = 9$$

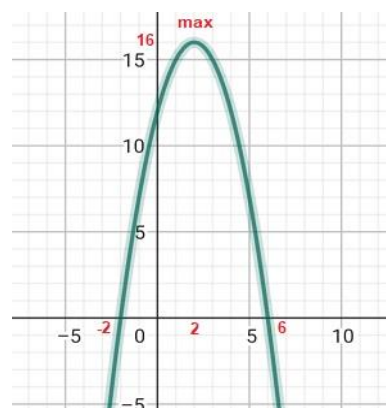
$$۳) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = -\infty$$

$$۴) y = 0 \Rightarrow -x^2 + 4x + 5 = 0 \Rightarrow -(x^2 - 4x - 5) = 0 \Rightarrow (x - 6)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

در جدول تعیین علامت معادله درجه قبل از ریشه مخالف علامت ضریب x و بعد از ریشه موافق ضریب x علامت گذاری می کنیم

x	$-\infty$	-2	2	6	$+\infty$
$y' = -2x + 4$	+ صعودی		- نزولی		
y	$-\infty$	0	9	0	$+\infty$

max

بنابراین از $(-\infty, 2]$ صعودی و از $(2, +\infty)$ نزولی است

مثال: نمودار تابع $y = x^3 - 3x + 2$ را رسم کنید و رفتار را مشخص کنید

$$۱) y = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$۲) y = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = (1)^3 - 3(1) + 2 = 0 \\ x_2 = -1 \Rightarrow y_2 = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4 \end{cases}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$y'' = 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \xrightarrow{\text{عطف}} y = 0^3 - 3(0) + 2 = 2$$

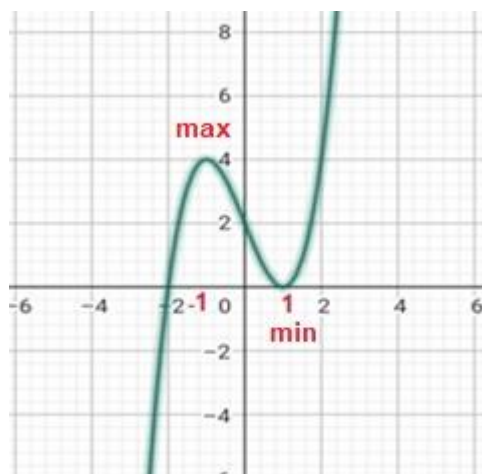
در جدول تعیین علامت معادله درجه ۲ بین دوریشه مخالف علامت

ضریب x^2 و کنار دو ریشه موافق ضریب x^2 علامت گذاری می کنیم

x	$-\infty$	-1	0	+1	$+\infty$
$y' = 3x^2 - 3$		موافق		مخالف	موافق
		+		-	+
رفتار منحنی		صعودی		نزولی	صعودی
$y'' = 6x$			مخالف -		موافق +
y	$-\infty$	4	2	0	$+\infty$

$[+1, +\infty)$ بنابراین از $(-\infty, -1]$ صعودی و از $(-1, +1)$ نزولی و از

صعودی است



مثال: نمودار تابع $y = -x^3 + 12x - 1$ را رسم کنید و رفتار را مشخص کنید

$$۱) y = -x^3 + 12x - 1 \Rightarrow y' = -3x^2 + 12 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = \frac{12}{3} = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

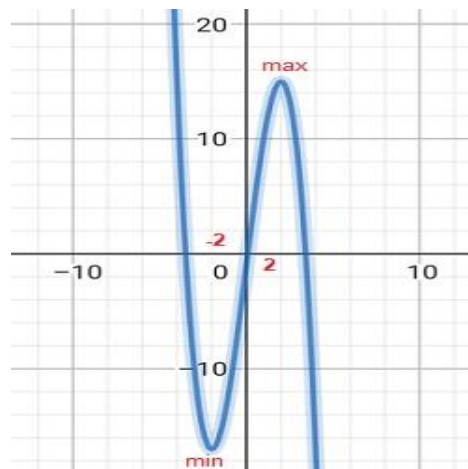
$$۲) y = -x^3 + 12x - 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = -(2)^3 + 12(2) - 1 = 15 \\ x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = -(-2)^3 + 12(-2) - 1 = -17 \end{cases}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = +\infty$$

$$y'' = -6x = 0 \Rightarrow x = 0 \xrightarrow{\text{عطف}} y = 0^3 + 12(0) - 1 = -1$$

در جدول تعیین علامت معادله درجه ۲ بین دو ریشه مخالف علامت ضریب x^2 و کنار دو ریشه موافق ضریب x^2 علامت گذاری می کنیم

x	$-\infty$	-۲	۰	+۲	$+\infty$
$y' = -3x^2 + 12$	موافق	مخالف	موافق	مخالف	موافق
	-	+	-	+	-
رفتار منحنی	نزولی	صعودی	نزولی	صعودی	نزولی
$y'' = -6x$	مخالف	موافق	مخالف	موافق	مخالف
y	$+\infty$	-۱۷	-۱	۱۵	$-\infty$



بنابراین از $(-\infty, -2]$ نزولی و از $(-2, +2)$ صعودی و از $[+2, +\infty)$ صعودی است

نتیجه اگر u و v توابعی بر حسب x باشند و a عدد ثابت باشد. در این صورت داریم.

تابع	مشتق تابع	مثال	مشتق مثال
$y = a$	$y' = 0$	$y = 75$	$y' = 0$
$y = ax^n$	$y' = nax^{n-1}$	$y = 8x^5$	$y' = 5 \times 8x^{5-1} = 40x^4$
$y = u + v + w$	$y' = u' + v' + w'$	$y = 3x^4 + 5x + 10$	$y' = 12x^3 + 5$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	$y = \frac{3x-2}{4x^2+8}$	$y' = \frac{3(4x^2+8) - (8x)(3x-2)}{(4x^2+8)^2}$
$y = uv$	$y' = u'v + v'u$	$y = (-4x^3 + 2)(x^{10} - 8)$	$y' = (-12x^2)(x^{10} - 8) + (10x^9)(-4x^3 + 2)$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	$y = \frac{3x-2}{4x^2+8}$	$y' = \frac{3(4x^2+8) - (8x)(3x-2)}{(4x^2+8)^2}$
$y = \frac{a}{x}$	$y' = -\frac{a}{x^2}$	$y = \frac{6}{x}$	$y' = -\frac{6}{x^2}$

نتیجه: اگر u و v را توابعی از x بگیریم، همهٔ دستورهای محاسبهٔ مشتق را که تاکنون دیده‌ایم می‌توان در جدولی به صورت زیر خلاصه کرد:

تابع	مشتق	مثال
$y = c$	$y' = 0$	$y = 7 \Rightarrow y' = 0$, $y = -\sqrt{3} \Rightarrow y' = 0$, $y = 1373 \Rightarrow y' = 0$
$y = ax + b$	$y' = a$	$y = 4x - 9 \Rightarrow y' = 4$, $y = -5x + 7 \Rightarrow y' = -5$
x^n	nx^{n-1}	$y = x^6 \Rightarrow y' = 6x^5$
au	au'	$y = -3x^5 \Rightarrow y' = -3(5x^4) = -15x^4$
$u + v$	$u' + v'$	$y = x^2 + 4x \Rightarrow y' = 2x + 4$
$u \cdot v$	$u' \cdot v + v' \cdot u$	$y = (3x^2 - x)(2x - 3) \Rightarrow y' = (6x - 1)(2x - 3) + 2(3x^2 - x)$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$	$y = \frac{2x - 1}{3x^2 + 5} \Rightarrow y' = \frac{2(3x^2 + 5) - 6x(2x - 1)}{(3x^2 + 5)^2} = \frac{-6x^2 + 6x + 10}{(3x^2 + 5)^2}$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$y = \frac{1}{x^3} \Rightarrow y' = -\frac{3x^2}{x^6} = -\frac{3}{x^4}$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$	$y = \frac{1}{x^5} \Rightarrow y' = \frac{-5}{x^6} = -5x^{-6}$
$f(u)$	$u'f'(u)$	$y = (3x^2 + 1)^4 \Rightarrow y' = (6x)[4(3x^2 + 1)^3] = 24x(3x^2 + 1)^3$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$y = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}$, $y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$