

تعریف نسبت مستقیم: به نسبت هایی گفته میشود که با افزایش یک کمیت (متغیر) ، کمیت (متغیر) دیگر افزایش یابد و بالعکس مثلاً اگر بخواهیم شربت با یک طعم خاص درست کنیم اگر مقدار آب افزایش یابد مقدار شربت غلیظ نیز افزایش می یابد یا اگر مسافت بیشتری با یک ماشین برویم بنزین بیشتری مصرف میشود و مثالهایی از این قبیل

در حالت کلی دو نسبت a به b و c به d مساوی اند هر گاه برای یک عدد مانند K داشته باشیم

$$a = k \times b \quad , \quad c = k \times d \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

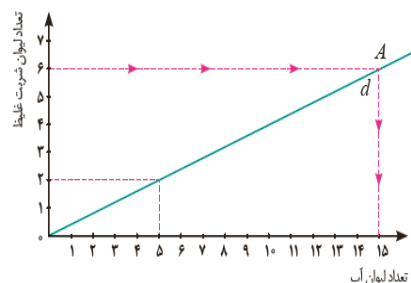
مثال: برای تهیه ۷ لیوان شربت به ۵ لیوان آب ۲ لیوان شربت غلیظ اضافه می کنیم اگر بخواهیم با ۶ لیوان شربت غلیظ با همان طعم شربت درست کنیم چند لیوان آب باید اضافه کنیم؟

با جدول تناسب

روش نمودار

آب	۵	x
شربت	۲	۶

$$\Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{x}{6} \Rightarrow 5 * 6 = 2 * x \Rightarrow x = \frac{5 * 6}{2} = 15$$



مثال: اگر یک ماشین با طی مسافت ۱۰۰ کیلومتر ۸ لیتر بنزین مصرف کند برای مسافت ۲۵۰ کیلومتر چقدر بنزین مصرف میکند.

مسافت	۱۰۰	۲۵۰
بنزین	۸	x

$$\Rightarrow \frac{100}{8} = \frac{250}{x} \Rightarrow 250 * 8 = 100 * x \Rightarrow x = \frac{250 * 8}{100} = 20$$

تعریف نرخ: نسبت دو کمیت متناسب با واحدهای مختلف را نرخ می نامند

به عنوان مثال مبلغ پرداختی با وزن کالا هر چه وزن کالا افزایش یابد قیمت کالا افزایش میابد بنابر این متناسب هستند به همین ترتیب مصرف سوخت با مسافت طی شده متناسب است.

به نام خدا

تهیه و تنظیم : علی زارعی

جزوه کنکور و درس ریاضی ۱ و ۲

انتشارات حافظ پژوه

۳- ثابت فنر (K) کمیتی است که از تقسیم نیروی وارد بر فنر بر میزان کشیده شدن فنر بدست می آید . اگر واحد اندازه گیری نیرو را با $\frac{\text{متر} \times \text{کیلوگرم}}{2(\text{ثانیه})}$ و میزان کشیده شدن فنر را با سانتی متر اندازه گیری کنیم K با چه واحدی اندازه گیری می شود؟

(سال ۱۳۹۸)

$$\begin{array}{l} (1) \quad \frac{\text{کیلوگرم} \times \text{سانتی متر}}{2(\text{ثانیه})} \quad 100 \times \\ (2) \quad \frac{\text{کیلوگرم}}{2(\text{ثانیه})} \quad 100 \times \\ (3) \quad \frac{\text{کیلوگرم} \times \text{متر}}{2(\text{ثانیه})} \quad 100 \times \\ (4) \quad \frac{\text{کیلوگرم}}{2(\text{ثانیه})} \quad 100 \times \end{array}$$

F : نیرو Δl : تغییر طول K : ثابت فنر

$$k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{\frac{\text{kg.m}}{\text{s}^2}}{\text{cm}} = \frac{\text{kg} \times 100 \text{ cm}}{\text{s}^2 \text{ cm}} = 100 \times \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$$

گزینه ۲ صحیح است

تست - مصرف بنزین یک خودرو به طور میانگین به ازای هر ۴۵ کیلومتر ۳ لیتر است . اگر قیمت لیتر بنزین ۳۰۰۰ تومان باشد . هزینه سفر از تهران به مشهد (به مسافت ۹۰۰ کیلومتر) چند هزار تومان است؟

(سال ۱۴۰۰)

۱۸۰(۲)	۳۶۰(۳)	۱۸۰(۴)
۳۶(۱)		
لیتر	کیلومتر	
۳	۴۵	
x	۹۰۰	

$$x = \frac{900 \times 3}{45} = 60 \Rightarrow C = 60 \times 3,000 = 180,000$$

گزینه ۲ صحیح است

۲-نسبت های معکوس

به نسبت هایی گفته میشود که با افزایش یک کمیت (متغیر) ، کمیت (متغیر) دیگر کاهش یابد و بالعکس

به عنوان مثال اگر تعداد کارگران افزایش یابد زمان انجام کار کاهش می یابد و بالعکس به همین ترتیب زمان مطالعه کتاب و زمان اتمام خواندن کتاب یا زمان سوختن شمع و ارتفاع باقیمانده شمع یا سرعت اتومبیل و زمان رسیدن به مقصد یا تعداد شیرهای باز و پر شدن آب استخر

اگر a و b دو کمیت متناسب و معکوس باشند و c و d دو مقدار متناظر باشند داریم

$$k = a \times b = c \times d$$

$$b = \frac{k}{a}, \quad d = \frac{k}{c}$$

(a) مثال: با تعداد ۲ کارگر نقاش کار در ۶ روز تمام میشود در حالتهای زیر تعداد روز برای اتمام کار را بدست آورید.
(۱۲ کارگر نقاش b ۴ کارگر نقاش

(c) اگر بخواهیم در دو روز کار تمام شود چند کارگر نیاز است

(d) نمودار تعداد کارگر بر حسب اتمام روزهای کار را رسم کنید

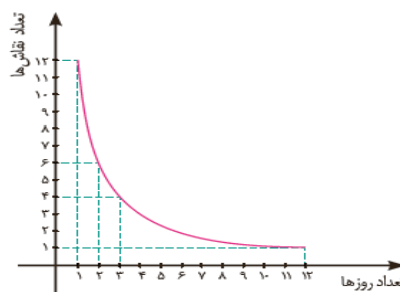
نفر روز است k واحد a

$$a) k = a * b = 2 * 6 = 12$$

$$c = \frac{k}{b} = \frac{12}{4} = 3$$

$$b) c = \frac{k}{b} = \frac{12}{12} = 1$$

$$c) d = \frac{k}{c} = \frac{12}{2} = 6$$



۸ کارگر می توانند کاری را در ۲۰ روز به اتمام برسانند. بعد از گذشت ۵ روز از شروع کار برای آن که کار زودتر تمام شود. ۴ کارگر به تعداد کارگران اضافه می شود. کار چند روزه تمام می شود؟

$$۱۶(۴)$$

$$۱۵(۳)$$

$$۱۲(۲)$$

$$۱۰(۱)$$

$$۸ \times ۲۰ = ۱۶۰$$

نفر روز کل کار

$$۸ \times ۵ = ۴۰$$

نفر روز کار انجام شده

$$۸ + ۴ = ۱۲$$

تعداد کارگران جدید

$$۱۶۰ - ۴۰ = ۱۲۰$$

نفر روز کار باقی مانده

$$۱۲۰ = ۱۲x \Rightarrow x = \frac{۱۲۰}{۱۲} = ۱۰$$

تعداد روز با ۱۲ کارگر

$$۱۰ + ۵ = ۱۵$$

تعداد روز کل انجام کار

روش دوم چون نسبت معکوس است و ثابت نسبت به صورت ضرب است

$$(۸ \times ۲۰) - (۸ \times ۵) = (۸ + ۴)x \Rightarrow ۱۶۰ - ۴۰ = ۱۲x \Rightarrow ۱۲۰ = ۱۲x \Rightarrow x = \frac{۱۲۰}{۱۲} = ۱۰$$

گزینه ۳ صحیح است.

تست - برای آنکه استخری خالی پر از آب شود. لازم است ۸ شیر آب هم اندازه به مدت ۹ ساعت باز باشند . بعد از گذشت ۳ ساعت ۲ شیر آب به علت خرابی بسته می شود . ۶ شیر آب باقی مانده چند ساعت باز باشند تا استخر پر از آب شود؟

۶(۱)	۸(۲)	۹(۳)	۱۰(۴)	(سال ۱۳۹۹)
		نیاز داریم		$۸ \times ۹ = ۷۲$
		کار کرده		$۸ \times ۳ = ۲۴$
		باقی مانده		$۷۲ - ۲۴ = ۴۸$
		تعداد شیر مانده		$۸ - ۲ = ۶$
$۶ \times x = ۴۸ \Rightarrow x = \frac{۴۸}{۶} = ۸$				
$۸ \times (۹ - ۳) = (۸ - ۲) \times x \Rightarrow ۴۸ = ۶x \Rightarrow x = \frac{۴۸}{۶} = ۸$				

یا با تشکیل معادله با نسبت معکوس حل می کنیم

گزینه ۲ صحیح است.

تست - ۸ کارگر با روزی ۶ ساعت کار کاری را در مدت ۱۲ روز به پایان می رسانند . اگر ۲ نفر از کارگران برای انجام کار دیگری در نظر گرفته شوند. بقیه کارگران باید روزی چند ساعت کار کنند تا کار در همان مدت ۱۲ روز به پایان برسد؟

۸(۱)	۷/۵(۲)	۹(۳)	۸/۵(۴)	(سال ۱۴۰۱)
نسبت معکوس است مانند مسئله های قبل				
$۸ \times ۶ \times ۱۲ = (۸ - ۲) \times x \times ۱۲ \Rightarrow x = \frac{۸ \times ۶ \times ۱۲}{۶ \times ۱۲} = ۸$				

گزینه ۱ صحیح است

واحدهای اندازه گیری انگلیسی : طول

همانطور که میدانیم واحدهای طول عبارتند از : SI یعنی اندازه گیری را در یک بعد انجام دهید در سیستم

یعنی میکرو متر μm - یعنی کیلومتر - km یعنی دسی متر - dm - یعنی سانتیمتر cm - یعنی متر - m

تهیه و تنظیم : علی زارعی

$$1m = 100cm$$

$$1m = 1000mm$$

$$1cm = 10mm$$

$$1dm = 10cm$$

$$1m = 10dm$$

$$1km = 1000m$$

$$1\mu m = 10^{-6}m$$

مثال: ۵۰۰ دسی متر چند متر است. چون نسبت مستقیم است

متر m	۱	x
دسی متر dm	۱۰	۵۰۰

$$\Rightarrow x = \frac{500 \times 1}{10} = 50m$$

ولی در سیستم انگلیسی از واحدهای دیگر استفاده میشود هر اینچ (in) تقریباً ۲/۵۴ سانتیمتر است و رابطه واحدهای دیگر بصورت زیر است.

واحد طول در سیستم SI متر است و در سیستم انگلیس یارد است .

۱۲ اینچ (in) = ۱ فوت (ft)
۳ فوت (ft) = ۱ یارد (yd)
۵,۲۸۰ فوت (ft) = ۱ مایل (mi)

مثال : شش فوت چند اینچ است

اینچ in	۱۲	x
فوت ft	۱	۶

$$\Rightarrow x = \frac{6 \times 12}{1} = 72in$$

مثال : یک مایل چند کیلومتر است با اطلاعات بالا محاسبه کنید.

$$1mil = 5280 ft = 5280 \times 12 = 63360in = 63360 \times 2 / 54 = 160934 / 4cm$$

$$\Rightarrow \frac{160934 / 4}{100} = 1609 / 34m \Rightarrow \frac{1609 / 34}{1000} = 1 / 60934km$$

بنابر این $1\text{mil} \approx 1/61\text{km}$ و $1\text{mil} = 160934\text{m}$ است

- در یک مسابقه اتومبیل رانی وقتی اتومبیل برنده مسابقه مسافت ۶۰ مایلی را طی می کند و برنده می شود. آخرین اتومبیل مسافت ۵۹ مایل و ۱۶۰۰ یارد و ۲ فوت را طی کرده است. مسافت باقیمانده که باید اتومبیل آخر طی کند تا به خط پایان برسد چند اینچ است؟
(سال ۱۳۹۸)

۸۶۰۴(۴)

۵۷۳۶(۳)

۴۳۰۲(۲)

۲۸۶۸(۱)

۱۲ اینچ (in) = ۱ فوت (ft)
۳ فوت (ft) = ۱ یارد (yd)
۵,۲۸۰ فوت (ft) = ۱ مایل (mi)

ابتدا مقدار کل مسیر و مسافت پیموده شده را بر حسب اینچ حساب می کنیم

$$60 \times 5280 \times 12 = 3,801,600$$

mil ft inch

$$59 \times 5280 \times 12 + 1600 \times 3 \times 12 + 2 \times 12 = 3,795,864$$

mil ft inch yd ft inch ft inch

از یکدیگر مقدار کل مسیر را از مسافت پیموده شده کم می کنیم

$$3,801,600 - 3,795,864 = 5736\text{inch}$$

گزینه ۳ صحیح است.

تست - یک واحد طولی جدید به نام A به شکلی تعریف شده است که ۰/۳۶ واحد A برابر ۱/۴۴ است. ۱۶۰ سانتی متر . چند سانتی متر چند واحد A است ؟

۴۰ (۴)

۴ (۳)

۰/۴ (۲)

۴۰۰ (۱)

(سال ۱۴۰۲)

واحد A	cm
۰/۳۶	۱۴۴
x	۱۶۰

$$\Rightarrow x = \frac{160 \times 0/36}{144} = 0/4$$

گزینه ۲ صحیح است

واحدهای اندازه گیری انگلیسی : جرم

همانطور که میدانیم در سیستم SI واحد جرم کیلوگرم (Kg) است ولی در سیستم انگلیسی و جرم پوند (Lb) است و

واحد کوچکتر آن اونس (oz) میباشد. با توجه به اینکه هر اونس تقریباً ۲۸ گرم (g) است. میتوانیم روابط بین سیستم

انگلیسی و SI را بدست آوریم **گرم** (g) ۲۸ ≈ (oz) ۱ **اونس** همچنین **اونس** (oz) ۱۶ = (lb) ۱ **پوند**

مثال ۱: قیمت هر اونس طلا در یک روز ۱۸۵۰ دلار و قیمت دلار در همان روز ۲۵۰۰۰ تومان باشد تعیین کنید. (قیمت جهانی)

الف) قیمت هر اونس به تومان ب) قیمت هر گرم به تومان پ) قیمت ۲۰ گرم طلا

الف) قیمت هر اونس به تومان = ۱۸۵۰ * ۲۵۰۰۰ = ۴۶۲۵۰۰۰۰

$$\text{ب) قیمت هر گرم به تومان} \Rightarrow \frac{46250000 * 1}{28} = 1.651.785$$

$$\text{پ) قیمت ۲۰ گرم طلا} = ۲۰ * ۱۶۵۱۷۸۵ = ۳۳۰۳۵۷۱۴$$

مثال ۲: اگر قیمت طلای ۲۴ عیار هر گرم ۱۸۰۰۰۰۰ تومان باشد قیمت طلای ۱۸ عیار چقدر است

$$\text{قیمت طلای ۱۸ عیار} \Rightarrow 1.800.000 * \frac{18}{24} = 1.350.000$$

مثال ۳: جرم مغز انسان به طور متوسط ۳ پوند میباشد جرم مغز انسان تقریباً چند کیلو گرم است

$$1Lb = 28 * 16 = 448g \approx 450g$$

$$= \text{جرم مغز انسان} = 3 * 450 = 1350g / 1000 = 1.35kg$$

اندازه گیری دما : همانگونه که میدانیم دما بر سانتی گراد یا سلسیوس بیان میشود و در سیستم انگلیسی دما بر حسب فارنهایت میباشد که رابطه بین دو دما سنج به صورت زیر است.

F: دما بر حسب فارنهایت و C: دما بر حسب سلسیوس

$$F = \frac{9}{5}C + 32 \quad \text{یا} \quad F = \frac{1}{8}C + 32 \quad \text{بنابراین} \quad F = \frac{1}{8}C + 32 \Rightarrow C = \frac{F - 32}{1/8}$$

مثال ۴: دمای نقطه ای ۵۰ درجه سانتیگراد است دمای این نقطه چند درجه فارنهایت است

$$F = 1/8C + 32 \xrightarrow{C=50} F = 1/8 * 50 + 32 = 122$$

مثال ۵: دمای نقطه ای ۵۰ درجه فارنهایت است دمای این نقطه چند درجه سلسیوس است.

$$F = 1/8C + 32 \xrightarrow{F=50} 50 = 1/8C + 32 \Rightarrow 50 - 32 = 1/8C \Rightarrow 18 = 1/8C \Rightarrow C = \frac{18}{1/8} = 10$$

نمونه سوالات ریاضی ۱ پودمان ۱

- ۱- برای تهیه ۱۰ لیوان شربت، ۷ لیوان آب را به ۳ لیوان شربت غلیظ اضافه می‌کنیم. اگر بخواهیم با ۱۵ لیوان شربت غلیظ، شربتی با همان مقدار شیرینی درست کنیم، چند لیوان آب باید به آن اضافه کنیم؟ نمودار آن را رسم کنید
- ۲- بنزین مصرفی یک ماشین و مسافت طی شده، دو کمیت متناسب اند. برخی ماشین‌ها مسافت ۱۰۰ کیلومتر را با مصرف ۸ لیتر بنزین طی می‌کنند.
- الف) نمودار مصرف بنزین بر حسب مسافت را رسم کنید
- ب) نرخ مسافت طی شده به مصرف بنزین چقدر است و چه چیزی را نشان می‌دهد؟
- پ) نرخ مصرف بنزین به مسافت طی شده چقدر است و چه چیزی را نشان می‌دهد؟
- ۳- علی هر شب ۲ صفحه از کتابی را مطالعه می‌کند. او کتاب را در ۴۰ روز تمام می‌کند. اگر علی بخواهد کتاب را در ۱۵ روز تمام کند، هر شب باید چند صفحه از آن را بخواند؟
- ۴- ۱۰ کارگر می‌توانند کاری را مدت ۱۶ روز به پایان برسانند. بعد از گذشت ۱۵ روز از شروع کار برای آنکه کار زودتر تمام شود. یک کارگر به تعداد کارگران اضافه کردند کار چند روزه تمام می‌شود
- ۵- الف) دمای هوا در نقطه ای ۶۰ درجه سلسیوس است دمای این نقطه چند درجه فارنهایت است
- ب) دمای هوا در نقطه ای ۹۸ درجه فارنهایت است دمای این نقطه چند درجه سانتیگراد است
- ۶- در چه دمایی دماسنج فارنهایت و سلسیوس یک عدد را نشان می‌دهند.
- ۷- در یک مسابقه اتومبیل رانی. اتومبیل برنده مسابقه مسافت ۶۰ مایلی را طی می‌کند و برنده می‌شود آخرین اتومبیل مسافت ۵۸ مایل و ۱۲۰۰ یارد و ۵ فوت را طی کرده است مسافت باقیمانده که باید اتومبیل آخر طی کند تا به خط پایان برسد چند اینچ است.
- ۸- قیمت هر انس طلا در یک روز ۱۸۰۰ دلار است. اگر قیمت دلار در همان روز ۳۵۰۰۰ تومان باشد. قیمت ۸ گرم طلا بر حسب تومان چقدر می‌شود؟ قیمت ۸ گرم طلای ۱۸ عیار چقدر می‌شود.
- ۹- اتومبیلی مسیری را با سرعت ۹۰ کیلومتر بر ساعت در مدت ۶ ساعت طی می‌کند. بعد از گذشت دو ساعت سرعتش به ۱۲۰ کیلومتر بر ساعت می‌رسد. اتومبیل پس از چه مدت به مقصد می‌رسد.

۱۰- در یک مسابقه اتومبیل رانی، اتومبیل برنده مسابقه مسافت ۶۰ مایلی را طی میکند و برنده میشود آخرین اتومبیل مسافت ۵۷ مایل و ۱۸۰۰ یارد و ۸ فوت را طی کرده است مسافت باقیمانده که باید اتومبیل آخر طی کند تا به خط پایان برسد چند اینچ است.

ریاضی ۱ پودمان ۲

درصدها

مثال: پیراهنی به قیمت ۸۰۰۰۰ تومان فروخته میشود اگر ۲۰٪ تخفیف داده شود برای خرید پیراهن چقدر باید پرداخت شود.

$$100\% - 20\% = 80\%$$

$$80000 * 80\% = 80000 * \frac{80}{100} = 64000$$

مثال: برای خرید پیراهنی با ۲۰٪ تخفیف مبلغ ۱۰۰۰۰۰ تومان پرداخت کرده ایم قیمت پیراهن بدون تخفیف چقدر بوده است

$$100\% - 20\% = 80\%$$

۸۰	۱۰۰۰۰۰
۱۰۰	x

$$\Rightarrow 100000 * \frac{100}{80} = 125000$$

- فروشنده ای کالایی را با ۲۰٪ سود به قیمت ۱۲۰,۰۰۰ تومان و بار دیگر کالایی را با ۲۰٪ ضرر به قیمت ۱۲۰,۰۰۰

فروخت در مورد سود یا زیان فروشنده در این دو معادله کدام گزینه درست است؟ (سال ۱۳۹۹)

- (۱) ۱۰۰۰۰ تومان سود کرده است. (۲) ۱۰۰۰۰ تومان ضرر کرده است.

(۳) نه سود و نه زیان کرده است.

(۴) ۳۰۰۰۰ تومان ضرر کرده است

$$۱۰۰\% + ۲۰\% = ۱۲۰\%$$

مبلغ	درصد
x	۱۰۰
۱۲۰۰۰	۱۲۰

$$x = \frac{۱۲۰,۰۰۰ \times ۱۰۰}{۱۲۰} = ۱۰۰,۰۰۰$$

$$۱۲۰,۰۰۰ - ۱۰۰,۰۰۰ = ۲۰,۰۰۰ \text{ سود فروش}$$

$$۱۰۰\% - ۲۰\% = ۸۰\%$$

مبلغ	درصد
x	۱۰۰
۱۲۰۰۰	۸۰

$$x = \frac{۱۲۰,۰۰۰ \times ۱۰۰}{۸۰} = ۱۵۰,۰۰۰$$

$$۱۵۰,۰۰۰ - ۱۲۰,۰۰۰ = -۳۰,۰۰۰ \text{ زیان فروش}$$

بنابراین ده هزار تومان زیان کرده است $-۳۰,۰۰۰ + ۲۰,۰۰۰ = -۱۰,۰۰۰$

گزینه ۲ صحیح است

تست - قیمت کالایی در سال قبل ۶۰,۰۰۰ تومان بوده است. اگر در سال جدید، قیمت کالا ۲۵٪ افزایش پیدا کند و فروشنده بخواهد با همان قیمت قبل، کالایش را بفروشد، چند درصد باید تخفیف بدهد؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۲۰ (۴) ۲۴ (۵) ۳۰ (۶) ۳۵ (۷) ۴۰ (۸) ۴۵ (۹) ۵۰ (۱۰) ۵۵ (۱۱) ۶۰ (۱۲) ۶۵ (۱۳) ۷۰ (۱۴) ۷۵ (۱۵) ۸۰ (۱۶) ۸۵ (۱۷) ۹۰ (۱۸) ۹۵ (۱۹) ۱۰۰ (۲۰) ۱۰۵ (۲۱) ۱۱۰ (۲۲) ۱۱۵ (۲۳) ۱۲۰ (۲۴) ۱۲۵ (۲۵) ۱۳۰ (۲۶) ۱۳۵ (۲۷) ۱۴۰ (۲۸) ۱۴۵ (۲۹) ۱۵۰ (۳۰) ۱۵۵ (۳۱) ۱۶۰ (۳۲) ۱۶۵ (۳۳) ۱۷۰ (۳۴) ۱۷۵ (۳۵) ۱۸۰ (۳۶) ۱۸۵ (۳۷) ۱۹۰ (۳۸) ۱۹۵ (۳۹) ۲۰۰ (۴۰) ۲۰۵ (۴۱) ۲۱۰ (۴۲) ۲۱۵ (۴۳) ۲۲۰ (۴۴) ۲۲۵ (۴۵) ۲۳۰ (۴۶) ۲۳۵ (۴۷) ۲۴۰ (۴۸) ۲۴۵ (۴۹) ۲۵۰ (۵۰) ۲۵۵ (۵۱) ۲۶۰ (۵۲) ۲۶۵ (۵۳) ۲۷۰ (۵۴) ۲۷۵ (۵۵) ۲۸۰ (۵۶) ۲۸۵ (۵۷) ۲۹۰ (۵۸) ۲۹۵ (۵۹) ۳۰۰ (۶۰) ۳۰۵ (۶۱) ۳۱۰ (۶۲) ۳۱۵ (۶۳) ۳۲۰ (۶۴) ۳۲۵ (۶۵) ۳۳۰ (۶۶) ۳۳۵ (۶۷) ۳۴۰ (۶۸) ۳۴۵ (۶۹) ۳۵۰ (۷۰) ۳۵۵ (۷۱) ۳۶۰ (۷۲) ۳۶۵ (۷۳) ۳۷۰ (۷۴) ۳۷۵ (۷۵) ۳۸۰ (۷۶) ۳۸۵ (۷۷) ۳۹۰ (۷۸) ۳۹۵ (۷۹) ۴۰۰ (۸۰) ۴۰۵ (۸۱) ۴۱۰ (۸۲) ۴۱۵ (۸۳) ۴۲۰ (۸۴) ۴۲۵ (۸۵) ۴۳۰ (۸۶) ۴۳۵ (۸۷) ۴۴۰ (۸۸) ۴۴۵ (۸۹) ۴۵۰ (۹۰) ۴۵۵ (۹۱) ۴۶۰ (۹۲) ۴۶۵ (۹۳) ۴۷۰ (۹۴) ۴۷۵ (۹۵) ۴۸۰ (۹۶) ۴۸۵ (۹۷) ۴۹۰ (۹۸) ۴۹۵ (۹۹) ۵۰۰ (۱۰۰)

$$y = ۶۰,۰۰۰ + \frac{۲۵}{۱۰۰} \times ۶۰,۰۰۰ = ۷۵,۰۰۰$$

$$۷۵,۰۰۰ - \frac{x}{۱۰۰} \times ۷۵,۰۰۰ = ۶۰,۰۰۰ \Rightarrow ۷۵,۰۰۰ \times (1 - \frac{x}{۱۰۰}) = ۶۰,۰۰۰ \Rightarrow (1 - \frac{x}{۱۰۰}) = \frac{۶۰,۰۰۰}{۷۵,۰۰۰}$$

$$(1 - \frac{x}{۱۰۰}) = \frac{۶۰,۰۰۰ \div ۱۵,۰۰۰}{۷۵,۰۰۰ \div ۱۵,۰۰۰} \Rightarrow 1 - \frac{x}{۱۰۰} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow 1 - \frac{۴}{۵} = \frac{x}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{x}{۱۰۰} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow x = \frac{۱۰۰}{۵} = ۲۰$$

گزینه ۳ صحیح است

درصد تغییر:

مثال: قیمت کالایی ۴۰۰۰۰ تومان است اگر قیمت این کالا ۲۵٪ افزایش پیدا کند قیمت کالا چقدر میشود

x: قیمت قدیم Δ: تغییر قیمت y: قیمت جدید

$$\Delta = 25\% * 40000 = 40000 * \frac{25}{100} = 10000$$

$$y = x + \Delta = 40000 + 10000 = 50000$$

یا

$$40000 * (1 + 0/25) = 40000 * 1/25 = 50000$$

برای هر دو کمیت متناسب $\frac{\text{مقدار اولیه} - \text{مقدار نهایی}}{\text{مقدار اولیه}} = \text{نسبت تغییر و حاصل } 100 \times \frac{\text{مقدار اولیه} - \text{مقدار نهایی}}{\text{مقدار اولیه}} = \text{درصد تغییر گویند}$

$$\text{بنابر این} \quad \text{درصد تغییر} = \frac{\Delta}{x} * 100 \quad \text{یا} \quad \text{درصد تغییر} = \frac{y - x}{x} * 100$$

مثال: وزن نوزادی در هنگام تولد $3/5$ کیلوگرم بود. در معاینه بعدی وزن او 5 کیلوگرم بود. درصد افزایش وزن کودک چقدر بوده است؟

$$\text{درصد تغییر وزن} = \frac{y - x}{x} * 100 = \frac{5 - 3/5}{3/5} * 100 \approx 43\%$$

مثال: یک کتاب فروشی در آذر ماه 300 جلد کتاب کمتر از ماه آبان فروخته است. اگر در ماه آبان 1200 جلد کتاب فروخته باشد. درصد تغییر میزان فروش این کتاب فروشی چقدر است؟

$$\text{درصد تغییر فروش} = \frac{y - x}{x} * 100 = \frac{\Delta}{x} * 100 = \frac{-300}{1200} * 100 = -25\%$$

علامت منفی یعنی فروش کمتر بوده است.

مثال: اگر درصد تغییر قیمت کالایی 20% و قیمت جدید کالا 80000 تومان باشد قیمت اولیه کالا چقدر بوده است.

$$\begin{aligned} \text{درصد تغییر} = \frac{y - x}{x} * 100 &\Rightarrow -\frac{20}{100} = \frac{80000 - x}{x} \Rightarrow -\frac{2}{10} = \frac{80000 - x}{x} \Rightarrow -2x = 800000 - 10x \\ \Rightarrow 10x - 2x &= 800000 \Rightarrow 8x = 800000 \Rightarrow x = \frac{800000}{8} = 100000 \end{aligned}$$

تست - قیمت کالایی از $75,000$ تومان به $180,000$ تومان افزایش یافته است. درصد افزایش قیمت این کالا کدام است؟

۱۴۰ (۴)

۱۲۰ (۳)

۲۴۰ (۲)

۲۲۰ (۱)

(سال ۱۴۰۱)

$$\text{درصد تغییر} = \frac{180,000 - 75,000}{75,000} \times 100 = \frac{105,000}{75,000} \times 100 \xrightarrow{\div 15,000} = \frac{7}{5} \times 100 = 140\%$$

گزینه ۴ صحیح است

مثال: اگر قیمت اولیه کالا را با x و قیمت جدید را با y نشان دهیم و رابطه $y=4x$ رابطه بین قیمت اولیه و قیمت

جدید این کالا را نشان می دهد .

(a) درصد تغییر را بدست آورید.

(b) اگر قیمت کالا در سال گذشته ۵۰۰۰ تومان بوده باشد امسال چند تومان است.

(c) اگر قیمت کالایی امسال ۸۰۰۰ تومان باشد قیمت کالا سال گذشته چقدر بوده است

$$a) \text{ص} \frac{y-x}{x} * 100 = \frac{4x-x}{x} * 100 = \frac{3x}{x} * 100 = 3 * 100 = 300\%$$

$$b) y = 4x \xrightarrow{x=5000} y = 4 * 5000 = 20000$$

$$c) y = 4x \Rightarrow x = \frac{y}{4} \xrightarrow{y=8000} x = \frac{8000}{4} = 2000$$

مثال: - طول ضلع هریک مکعب بر اثر گرما $0/2$ واحد افزایش یافته اگر طول ضلع اولیه این مکعب ۳ واحد باشد .

درصد تغییر حجم مکعب را حساب کنید

A: طول یک ضلع V_1 : حجم قدیم V_2 : حجم جدید ΔV : درصد تغییر

$$V_1 = a^3 = 3^3 = 27$$

$$V_2 = (3 + 0/2)^3 = 3/2^3 = 32/768$$

$$\% \Delta v = \frac{V_2 - V_1}{V_1} * 100 = \frac{32/768 - 27}{27} * 100 = \frac{5/786}{27} * 100 = 21/36\%$$

تست - شعاع بادکنکی کروی برابر ۶ سانت متر است . بر اثر دمیدن در آن شعاع بادکنک به ۲۱ سانتی متر می رسد .

درصد افزایش حجم بادکنک کدام است؟

(سال ۱۳۹۸)

۴۱۷۸/۵(۴)

۴۱۵۲/۵(۳)

۴۱/۸۷۵(۲)

۴۱/۵۲۵(۱)

برای هر دو کمیت متناسب $\frac{\text{مقدار اولیه} - \text{مقدار نهایی}}{\text{مقدار اولیه}} = \text{نسبت تغییر و حاصل } 100 \times = \frac{\text{مقدار اولیه} - \text{مقدار نهایی}}{\text{مقدار اولیه}} = \text{درصد تغییر گویند}$

$$r_1 = 6\text{cm} \Rightarrow V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{4}{3} \times 3 \times 6^3 = 864\text{cm}^3$$

$$r_2 = 21\text{cm} \Rightarrow V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{4}{3} \times 3 \times 21^3 = 37044\text{cm}^3$$

$$\% \Delta V = \frac{V_2 - V_1}{V_1} \times 100 = \frac{37044 - 864}{864} \times 100 = 41/875\%$$

گزینه ۲ صحیح است

ریاضی ۱ پودمان ۳

به بزرگترین توان در هر چند جمله ای درجه معادله گویند بنابراین به معادله به فرم $ax + b = 0$ که در آن $a \neq 0$

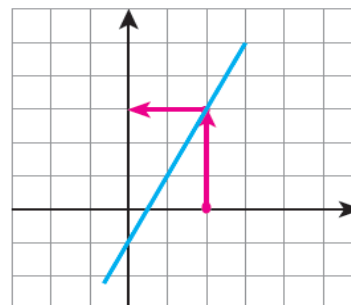
باشد معادله درجه یک گفته میشود. مانند $3x - 7 = 0$

توابع درجه یک دارای نمودار خطی هستند برای رسم این توابع کافیهست دو نقطه دلخواه به x میدهیم و y را بر اساس آن تعیین کرده و نمودار بر اساس آنها رسم میشود

مثال: نمودار تابع $y = 2x - 1$ را رسم کنید.

$$y = 2x - 1 \xrightarrow{x=1} y = 2*1 - 1 = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

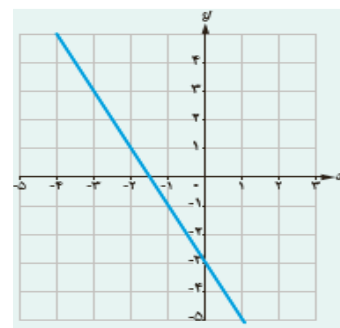
$$y = 2x - 1 \xrightarrow{x=2} y = 2*2 - 1 = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$



مثال: نمودار تابع $y = -6x - 3$ را رسم کنید.

$$y = -6x - 3 \xrightarrow{x=0} y = -6*0 - 3 = -3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

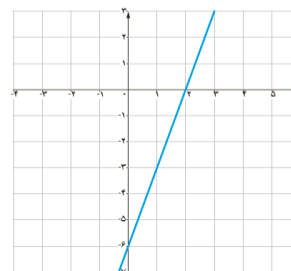
$$y = -6x - 3 \xrightarrow{y=0} 0 = -6x - 3 = 0 \Rightarrow -6x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$



مثال: نمودار تابع $6x - 2y = 12$ را رسم کنید

$$6x - 2y = 12 \xrightarrow{x=0} 6*0 - 2y = 12 \Rightarrow -2y = 12 \Rightarrow y = \frac{12}{-2} = -6 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$6x - 2y = 12 \xrightarrow{y=0} 6x - 2*0 = 12 \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{6} = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$



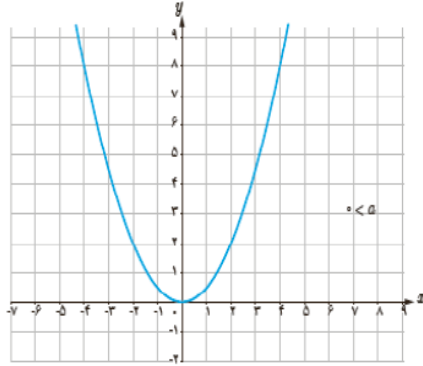
معادله درجه دو

به معادله $ax^2 + bx + c = 0$ معادله درجه دو گویند چون بزرگترین توان x دو است که در آن $a \neq 0$ می باشد. و a, b, c اعداد حقیقی هستند بنابراین معادله $2x^2 - 5x + 8 = 0$ یک معادله درجه دو کامل است چون توان x به ترتیب کم شده است

نمودار های توابع درجه ۲ شبیه U می باشد که جهت آن بستگی به علامت a دارد

برای رسم این توابع حداقل سه نقطه به x میدهیم و y را بدست می آوریم و بر اساس آن نمودار را رسم میکنیم.

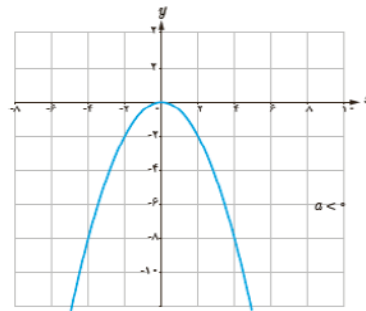
x	$y = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4



چون ضریب x^2 مثبت است u به طرف بالا است

الف

x	$y = -x^2$
-2	-4
-1	-1
0	0
1	-1
2	-4



چون ضریب x^2 منفی است u به طرف پایین است

ب

در شکل الف ضریب x^2 مثبت است u به طرف بالا و در شکل ب ضریب x^2 منفی و u به طرف پایین است

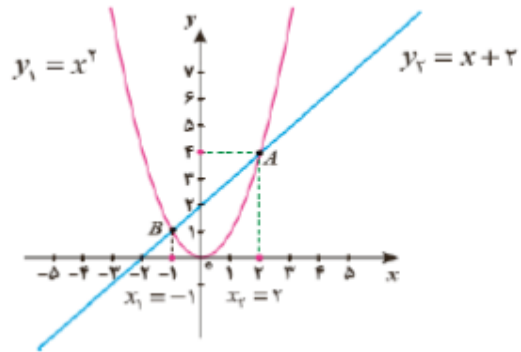
روش هندسی حل معادله درجه ۲ به فرم $x^2 + bx + c = 0$: x^2 را یک طرف معادله و باقی جملات را به طرف دیگر معادله می بریم که علامت آنها قرینه میشود. و نمودار هر طرف معادله را جداگانه رسم می کنیم محل تلاقی دو نمودار جواب معادله است به عبارتی به ازای هر x که y ها برابر باشد جواب معادله است.

مثال: معادله درجه دوم $x^2 - x - 2 = 0$ را به روش هندسی حل کنید

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = x + 2$$

$y_1 \quad y_2$

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y_1 = x^2$	۴	۱	۰	۱	۴
$y_2 = x + 2$	۰	۱	۲	۳	۴



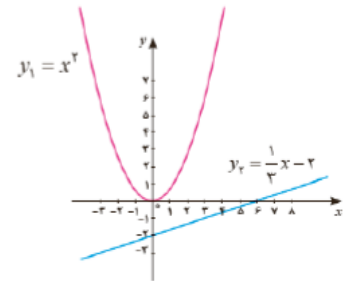
توجه: در جایی که y ها برابر است یعنی x ها جواب (ریشه) معادله است

مثال: معادله درجه دوم $3x^2 - x + 6 = 0$ را به روش هندسی حل کنید.

$$3x^2 - x + 6 = 0 \Rightarrow 3x^2 = x - 6 \xrightarrow{\div 3} x^2 = \frac{x}{3} - 2$$

$y_1 \qquad y_2$

x	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
$y_1 = x^2$	۹	۴	۱	۰	۱	۴	
$y_2 = \frac{x}{3} - 2$	-۳	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{7}{3}$	-۲	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{3}$	-۱



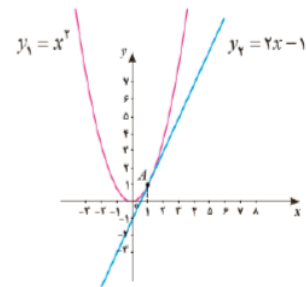
توجه: چون دو نمودار یکدیگر را قطع نمی کنند معادله دارای جواب نیست

مثال ۵: معادله درجه دوم $x^2 - 2x + 1 = 0$ را به روش هندسی حل کنید.

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 2x - 1$$

$y_1 \qquad y_2$

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y_1 = x^2$	۴	۱	۰	۱	۴
$y_2 = 2x - 1$	-۵	-۳	-۱	۱	۳



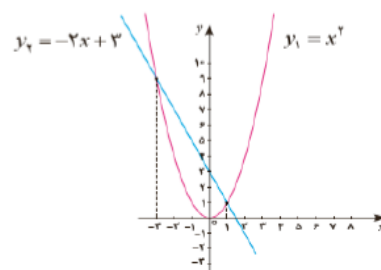
توجه: چون دو نمودار در یک نقطه یکدیگر را قطع می کنند معادله دارای یک جواب است

مثال ۶: معادله درجه دوم $x^2 + 2x - 3 = 0$ را به روش هندسی حل کنید.

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -2x + 3$$

y_1
 y_2

x	-3	-2	-1	0	1	2
$y_1 = x^2$	9	4	1	0	1	4
$y_2 = -2x + 3$	9	7	5	3	1	3



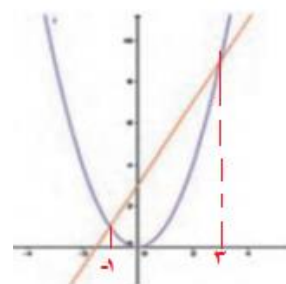
توجه: در جایی که y ها برابر است یعنی x ها جواب (ریشه) معادله است

مثال: معادله درجه دوم $x^2 - 2x - 3 = 0$ را به روش هندسی حل کنید.

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 2x + 3$$

y_1
 y_2

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y_1 = x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$y_2 = 2x + 3$	-3	-1	1	3	5	7	9



تست-اگر خط $y = ax + b$ نمودار منحنی به معادله $y = x^2$ را در نقاط A و B قطع کند. و ریشه های معادله

$x^2 - ax - b = 0$ برابر ۱ و -۳ باشد. حاصل جمع های عرض های A و B کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴) ۱۳۹۹ (سال)

نکته: محل تقاطع دو نمودار ریشه های معادله است

$$x^2 - ax - b = 0 \Rightarrow x^2 = ax + b$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= (x_1)^2 = (-3)^2 = 9 \\ y_2 &= (x_2)^2 = (1)^2 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y_1 + y_2 = 9 + 1 = 10$$

گزینه ۱ صحیح است.

تست - سهمی $y = x^2 + bx + c$ و خط گذرنده از مبدا مختصات $y = x + b$ در نقاط A و B متقاطع اند. اگر حاصل ضرب طول های نقاط A و B برابر ۲- باشد. حاصل جمع عرض آنها کدام است؟

- ۱(۱) ۲(صفر) ۳(۱) ۴(۳)
- (سال ۱۴۰۰)

توجه: از مبدا مختصات می گذرد یعنی $(x=0, y=0)$ بنابراین با جایگذاری داریم.

$$\left. \begin{aligned} y &= x + b \xrightarrow{(x=0, y=0)} 0 = 0 + b \Rightarrow b = 0 \Rightarrow y = x \\ y &= x^2 + bx + c \Rightarrow y = x^2 + (0 \times x) + c \Rightarrow y = x^2 + c \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 + c = x \Rightarrow x^2 - x + c = 0$$

$$x^2 - x + c = 0 \Rightarrow a = 1, b = -1, c = c$$

$$x_1 \times x_2 = -2 \xrightarrow{x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}} \frac{c}{a} = -2 \Rightarrow \frac{c}{1} = -2 \Rightarrow c = -2$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow a = 1, b = -1, c = -2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-2) = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} \end{cases}$$

$$y = x \Rightarrow y_1 + y_2 = x_1 + x_2 = 2 + (-1) = 1$$

گزینه ۱ صحیح است

یادآوری

تابع خطی: فرم کلی توابع خطی به صورت $f(x) = ax + b$ و که رابطه و نمودار آنها به صورت زیر است.

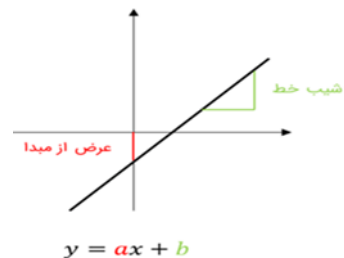
به نام خدا

جزوه کنکور و درس ریاضی ۱ و ۲

تهیه و تنظیم: علی زارعی

انتشارات حافظ پژوه

دامنه
 $y = ax + b$
 عرض از مبدا شیب برد
 شیب
 $\text{شیب} = \frac{\text{تغییرات } y}{\text{تغییرات } x}$



نوشتن معادله خط راست با داشتن مختصات دو نقطه

$$1) a = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$2) y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $A \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ و $B \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$ بگذرد

$$1) m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{11 - 5}{5 - 2} = \frac{6}{3} = 2$$

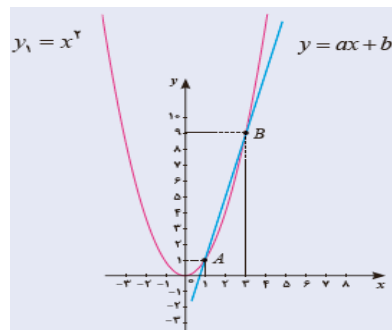
$$2) y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 5 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 4 + 5 \Rightarrow y = 2x + 1$$

مثال: در شکل زیر مقادیر a و b را محاسبه کنید

$$a = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 1}{3 - 1} = 4$$

$$x = 1 \Rightarrow x^2 = ax + b \Rightarrow 1^2 = 4 \times 1 + b \Rightarrow b = 1 - 4 = -3$$

$$\&x = 3 \Rightarrow x^2 = ax + b \Rightarrow 3^2 = 4 \times 3 + b \Rightarrow b = 9 - 12 = -3$$



تست - معادله خط زیر کدام است؟

$$y = \frac{1}{4}x + 2 \quad (4) \text{ (سال ۱۴۰۲)}$$

$$y = \frac{1}{2}x - 2 \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{4}x - 2 \quad (2)$$

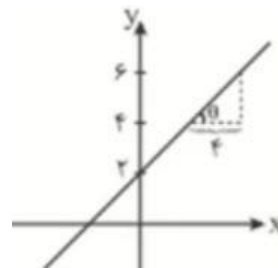
$$y = \frac{1}{2}x + 2 \quad (1)$$

به نام خدا

جزوه کنکور و درس ریاضی ۱ و ۲

تهیه و تنظیم : علی زارعی

انتشارات حافظ پژوه



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 2}{4 - 0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$$

گزینه ۱ صحیح است

حل معادله درجه دو $ax^2 + bx + c = 0$ به روش جبری

برای حل معادله درجه دو به روش جبری با به ترتیب مراحل زیر را انجام دهیم

$$1) \Delta = b^2 - 4ac$$

$$2) x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

Δ : مبین معادله x_1 : ریشه اول (جواب اول) x_2 : ریشه دوم (جواب دوم)

پس از محاسبه معادله مقدار Δ سه حالت امکان دارد رخ دهد

۱) مبین معادله بزرگتر از صفر باشد ($0 < \Delta$) در این صورت معادله دارای دو جواب مختلف است. در واقع در روش هندسی نمودارها در دو نقطه یکدیگر را قطع میکنند

۲) مبین برابر صفر باشد ($\Delta = 0$) در این صورت معادله دارای یک جواب است. و میگوییم ریشه مضاعف دارد. در واقع در روش هندسی نمودارها در یک نقطه بر یکدیگر مماس میشوند

۳) مبین معادله کوچکتر از صفر باشد ($\Delta < 0$) در این صورت معادله دارای جواب نیست. در واقع در روش هندسی نمودارها یکدیگر را قطع نمیکند

توجه : جهت حل مسائل به روش جبری حتما باید معادله مساوی صفر باشد

مثال : معادله $x^2 - 5x + 6 = 0$ را به روش جبری حل کنید.

$$a = 1, \quad b = -5, \quad c = +6$$

$$1) \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times (1) \times (+6) = 25 - 24 = +1 > 0$$

$$2) \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = +3 \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = +2 \end{cases}$$

چون $(0 < \Delta)$ است معادله دو جواب دارد

مثال: معادله $x^2 - 2x - 24 = 0$ را به روش جبری حل کنید.

$$a=1, \quad b=-2, \quad c=-24$$

$$1) \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times (1) \times (-24) = 4 - 96 = +100 > 0$$

چون $(0 < \Delta)$ است معادله دو جواب دارد

$$2) \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{100}}{2 \times 1} = \frac{2+10}{2} = \frac{12}{2} = +6 \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{100}}{2 \times 1} = \frac{2-10}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \end{cases}$$

مثال: معادله $x^2 - 4x = -4$ را به روش جبری حل کنید.

$$x^2 - 4x = -4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$a=1, \quad b=-4, \quad c=+4$$

$$1) \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times (1) \times (+4) = 16 - 16 = 0$$

چون $(\Delta = 0)$ است معادله دارای ریشه مضاعف است

$$2) x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = 2$$

مثال: معادله $x^2 + 5x + 15 = 0$ را به روش جبری حل کنید.

$$a=1, \quad b=+5, \quad c=+15$$

$$1) \Delta = b^2 - 4ac = (+5)^2 - 4 \times (1) \times (+15) = 25 - 60 = -35 < 0$$

چون منفی است یعنی $(\Delta < 0)$ است معادله دارای جواب حقیقی نیست

مثال: معادله $3x^2 - 5x - 2 = 0$ را به روش جبری حل کنید.

$$a=3, \quad b=-5, \quad c=2$$

$$1) \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times (3) \times (2) = 25 - 24 = 1 > 0$$

چون $(0 < \Delta)$ است معادله دو جواب دارد

$$2) \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 3} = \frac{5+1}{6} = \frac{6}{6} = 1 \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 3} = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0/67 \end{cases}$$

مثال: مقدار m را در معادله $x^2 + 8x + m = 0$ طوری تعیین که معادله دارای ریشه مضاعف باشد.

$$a = 1, \quad b = +8, \quad c = m$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (+8)^2 - 4 \times (1) \times (m) = 64 - 4m = 0$$

$$64 - 4m = 0 \Rightarrow 4m = 64 \Rightarrow m = \frac{64}{4} = 16 \Rightarrow m = 16$$

تست - اگر خط $y = ax + b$ نمودار منحنی به معادله $y = x^2$ را در نقاط A و B قطع کند. و ریشه های معادله

$$x^2 - ax - b = 0$$
 برابر ۱ و ۳ باشد. حاصل جمع های عرض های A و B کدام است؟

(سال ۱۳۹۹)

۷ (۴)

۸ (۳)

(۲)

۱۰ (۱)

نکته: محل تقاطع دو نمودار ریشه های معادله است

$$x^2 - ax - b = 0 \Rightarrow x^2 = ax + b$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= (x_1)^2 = (-3)^2 = 9 \\ y_2 &= (x_2)^2 = (1)^2 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y_1 + y_2 = 9 + 1 = 10$$

گزینه ۱ صحیح است.- سهمی $y = x^2 + bx + c$ و خط گذرنده از مبدا مختصات $y = x + b$ در نقاط A و B متقاطع اند. اگر حاصل ضرب

(سال ۱۴۰۰)

طول های نقاط A و B برابر ۲- باشد. حاصل جمع عرض آنها کدام است؟

۳ (۴)

-۱ (۳)

صفر (۲)

۱ (۱)

توجه: از مبدا مختصات می گذرد یعنی $(x = 0, y = 0)$ بنابراین با جایگذاری داریم.

$$\left. \begin{aligned} y &= x + b \xrightarrow{(x=0, y=0)} 0 = 0 + b \Rightarrow b = 0 \Rightarrow y = x \\ y &= x^2 + bx + c \Rightarrow y = x^2 + (0 \times x) + c \Rightarrow y = x^2 + c \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 + c = x \Rightarrow x^2 - x + c = 0$$

$$x^2 - x + c = 0 \Rightarrow a = 1, b = -1, c = c$$

$$x_1 \times x_2 = -2 \xrightarrow{x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}} \frac{c}{a} = -2 \Rightarrow \frac{c}{1} = -2 \Rightarrow c = -2$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow a = 1, b = -1, c = -2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-2) = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{1 + 3}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{1 - 3}{2} = -1 \end{cases}$$

$$y = x \Rightarrow y_1 + y_2 = x_1 + x_2 = 2 + (-1) = 1$$

گزینه ۱ صحیح است

روش های تجزیه برای حل معادلات درجه ۲

(۱) روش فاکتور گیری: در این روش از کوچکترین توان فاکتور میگیریم و مسئله را حل میکنیم

مثال: معادله $x^2 + 6x = 0$ را حل کنید.

$$x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(x + 6) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$$

مثال: معادله $x^3 + 6x^2 + 8x = 0$ را حل کنید.

$$x^3 + 6x^2 + 8x = 0$$

$$x(x^2 + 6x + 8) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

$$a = 1, b = +6, c = +8$$

$$1) \Delta = b^2 - 4ac = (+6)^2 - 4 \times (1) \times (+8) = 36 - 32 = 4 > 0$$

$$2) \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(6) + \sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{-6 + 2}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(6) - \sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{-6 - 2}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \end{cases}$$

با استفاده از اتحاد جمله مشترک $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ برای سه جمله ای ها و اتحاد مزدوج برای دو جمله ای ها با علامت وسط منفی $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ میتوان معادله را حل کرد.

مثال: معادله $x^2 + 3x - 10 = 0$ را حل کنید.

چون سه جمله ای است اتحاد جمله مشترک $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ استفاده میکنیم

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x+5)(x-2) = 0 \Rightarrow x+5=0 \Rightarrow x=-5$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

مثال: معادله $x^2 - 25 = 0$ را حل کنید.

چون دو جمله ای است اتحاد مزدوج $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ استفاده میکنیم

$$x^2 - 25 = 0 \Rightarrow (x+5)(x-5) = 0 \Rightarrow x+5=0 \Rightarrow x=-5$$

$$x-5=0 \Rightarrow x=+5$$

تمرین: معادلات زیر را حل کنید

$$x^2 + 7x = -10$$

$$4x^2 - 9x + 5 = 0$$

نکته ۱: در معادله درجه دو اگر جمع ضرایب صفر شود یکی از ریشه ها یک و دیگری $\frac{c}{a}$ معادله است.

مثال: ریشه های معادله $2x^2 - 7x + 5 = 0$ را بدست آورید.

$$2x^2 - 7x + 5 = 0$$

$$a \quad b \quad c$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(2)(5) = 49 - 40 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-(-7) - \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{7-3}{4} = \frac{4}{4} = 1 \\ x_2 = \frac{-(-7) + \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{7+3}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

راه تستی: چون $a+b+c=0$ است یعنی $2-7+5=0$ بنابراین یکی از جواب ها یک و دیگری $\frac{c}{a} = \frac{5}{2}$ است

نکته ۲: حاصل جمع ریشه های معادله درجه دو $s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ است

نکته ۳: حاصل ضرب ریشه های معادله درجه دو $p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ است

نکته ۴: بر مبنای اتحاد جمله مشترک میتوان معادله درجه دو را به صورت $x^2 - sx + p = 0$ بدست آورد

مثال: حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه های معادله $x^2 - 5x + 6 = 0$ بدست آورید.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 2 + 3 = 5, x_1 \cdot x_2 = 2 \times 3 = 6$$

با توجه به نکته ۲ و ۳ $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\left(\frac{-5}{1}\right) = 5$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \left(\frac{6}{1}\right) = 6$

مثال: معادله درجه دومی بنویسید که جمع ریشه های آن ۱۲ و حاصل ضرب ریشه های آن ۳۲ باشد

$$s = 12, p = 32 \Rightarrow x^2 - sx + p = 0 \Rightarrow x^2 - 12x + 32 = 0$$

نکته: شرط آنکه در یک معادله درجه دو ریشه معکوس یکدیگر باشند این است که $c = a$ باشد چون

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \xrightarrow{x_1=k, x_2=\frac{1}{k}} k \cdot \frac{1}{k} = 1 = \frac{c}{a} \Rightarrow a = c$$

نکته: شرط آنکه در یک معادله درجه دو ریشه قرینه یکدیگر باشند این است که $b = 0$ باشد چون

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \xrightarrow{x_1=k, x_2=-k} k + (-k) = 0 = -\frac{b}{a} \Rightarrow b = 0$$

نکته: شرط آنکه در یک معادله درجه دو ریشه معکوس یکدیگر و مختلف علامت باشند این است که $c = -a$ باشد چون

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \xrightarrow{x_1=k, x_2=\frac{-1}{k}} k \cdot \frac{-1}{k} = -1 = \frac{c}{a} \Rightarrow a = -c$$

تمرین: جواب معادله های زیر را بدست آورید

$$1) 2x^2 + 5x = 0$$

$$a = 2, \quad b = +5, \quad c = +0$$

$$1) \Delta = b^2 - 4ac = (+5)^2 - 4 \times (2) \times (0) = 25 - 0 = 25 > 0$$

$$2) \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(5) + \sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{-5 + 5}{2} = \frac{0}{2} = 0 \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(5) - \sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{-5 - 5}{4} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$2) 3x^2 + 13x + 3 = 0$$

$$a = 3, \quad b = 13, \quad c = 3$$

$$1) \Delta = b^2 - 4ac = (13)^2 - 4 \times (3) \times (3) = 169 - 36 = 133 > 0$$

$$2) \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(13) + \sqrt{133}}{2 \times 3} = \frac{-13 + \sqrt{133}}{6} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(13) - \sqrt{133}}{2 \times 3} = \frac{-13 - \sqrt{133}}{6} \end{cases}$$

$$3) x^2 + x + 2 = 0$$

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 2$$

$$1) \Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times (1) \times (2) = -7 < 0$$

چون مبین معادله منفی است بنابراین معادله دارای جواب نیست.

مثال: اگر یکی از جواب معادله $5x^2 + 13x + c = 0$ برابر (-3) باشد جواب دیگر معادله را بدست آورید

می دانیم ریشه های معادله در خود معادله صدق می کند بنابراین به جای x مقدار می گذاریم

می دانیم جواب معادله، تساوی رابطه را برقرار می کند پس:

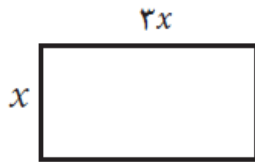
$$5(-3)^2 + 13(-3) + c = 0 \Rightarrow 45 - 39 + c = 0 \Rightarrow c = -6$$

پس معادله درجه دوم به صورت $5x^2 + 13x - 6 = 0$ است.

$$\Delta = (13)^2 - 4(5)(-6) = 289 \Rightarrow x_1 = \frac{-13 + \sqrt{289}}{10} \text{ و } x_2 = \frac{-13 - \sqrt{289}}{10}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-13 + 17}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \text{ و } x_2 = \frac{-13 - 17}{10} = -3$$

مثال: اگر طول مستطیلی سه برابر عرض آن باشد و مساحت مستطیل ۳۰۰ متر مربع باشد طول و عرض و محیط مستطیل را بدست آورید.



$$\begin{aligned} \text{مساحت} &= x \times 3x = 3x^2 = 300 \Rightarrow 3x^2 - 300 = 0 \Rightarrow \\ x^2 - 100 &= 0 \Rightarrow \Delta = (0)^2 - 4(1)(-100) = 400 > 0 \\ \Rightarrow x_1 &= \frac{\sqrt{400}}{2} = 10 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-\sqrt{400}}{2} = -10 \end{aligned}$$

جواب منفی قابل قبول نیست بنابراین طول ۳۰ متر و عرض ۱۰ متر است

$$= (x + y) \times 2 = (30 + 10) \times 2 = 80 \text{ m}$$

مثال: در یک دوزنقه متساوی الساقین قاعده کوچک ۳x و قاعده بزرگ ۱۲ سانتی متر و ارتفاع ۴x است اگر مساحت دوزنقه ۱۰۸ سانتی متر مربع باشد مقدار x را بدست آورید.

می دانیم مساحت دوزنقه = ارتفاع * (قاعده بزرگ + قاعده کوچک) تقسیم بر ۲

ابتدا با توجه به فرمول مساحت یک دوزنقه داریم

$$\begin{aligned} \text{مساحت دوزنقه} &= \frac{(3x + 12)(4x)}{2} \\ \Rightarrow \frac{(3x + 12)(4x)}{2} &= 108 \Rightarrow 12x^2 + 48x - 216 = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

همه جمله ها را بر ۱۲ تقسیم می کنیم

$$x^2 + 4x - 18 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 + 72 = 88$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-4 + \sqrt{88}}{2} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-4 - \sqrt{88}}{2}$$

$x_1 = -2 + \sqrt{22}$ و $x_2 = -2 - \sqrt{22}$ فقط جواب x_1 قابل قبول است که مثبت است زیرا طول نمی تواند منفی شود.

مثال: حاصل ضرب دو عدد متوالی ۱۳۲ است دو عدد را بدست آورید.

عدد کوچک تر را با x نشان می دهیم. عدد متوالی بعد از آن $x+1$ خواهد بود. بنابراین فرض مسئله

$$x(x+1)=132 \Rightarrow x^2+x-132=0 \xrightarrow{\Delta=(1)^2-4(1)(-132)=529}$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{529}}{2} = 11 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{529}}{2} = -12$$

هر دو جواب قابل قبول هستند. دو عدد متوالی ۱۱ و ۱۲ و دو عدد متوالی ۱۲- و ۱۱- هر دو جواب هستند.

مثال: عددی طبیعی بدست آورید که دو برابر آن به اضافه ۳۵ با توان دوم آن عدد مساوی باشد.

این عدد طبیعی را با n نشان می دهیم.

$$2n+35=n^2 \Rightarrow n^2-2n-35=0, \quad \Delta=(-2)^2-4(1)(-35)=4+140=144$$

$$\Rightarrow n = \frac{2+12}{2} = 7 \quad \text{و} \quad n = \frac{2-12}{2} = -5$$

جواب منفی قابل قبول نیست زیرا عدد طبیعی مثبت است.

مثال: در یک مثلث قاعده $3x-1$ سانتی متر و قاعده بزرگ $x+3$ سانتی متر است اگر مساحت مثلث ۲۴ سانتی متر مربع باشد (الف) مقدار x را بدست آورید. (ب) اندازه قاعده و ارتفاع را بدست آورید.

(الف)

$$\text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = \text{مساحت مثلث} \times 2$$

$$24 = \frac{(3x-1)(x+3)}{2} \Rightarrow 3x^2 + 8x - 51 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 3 \quad \text{و} \quad x_2 = -\frac{17}{3}$$

جواب منفی قابل قبول نیست زیرا طول قاعده و ارتفاع منفی نمی تواند باشد.

$$(ب) \quad 3x-1 = 3(3)-1=8 = \text{ارتفاع قاعده}$$

$$x+3 = 3+3=6 = \text{اندازه ارتفاع}$$

تست- اگر یک ریشه معادله $ax^2 - 2x + 3 = 0$, برابر ۳- باشد. مقدار حاصل جمع ریشه دیگر معادله با مقدار a کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) -۳ (۴) -۲ (سال ۱۴۰۱)

ریشه های معادله در خود معادله صدق می کند.

$$ax^2 - 2x + 3 = 0 \xrightarrow{x=-3} a(-3)^2 - 2(-3) + 3 = 0 \Rightarrow 9a + 6 + 3 = 0 \Rightarrow 9a = -9 \Rightarrow a = \frac{-9}{9} = -1$$

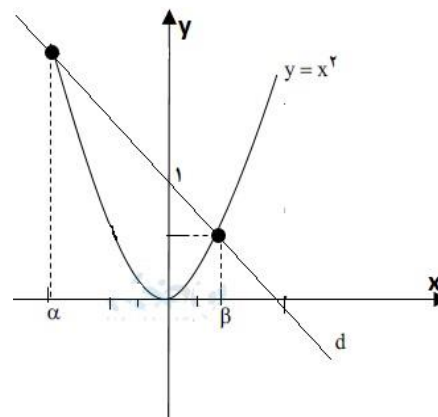
$$(-1)x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow -(x^2 + 2x - 3) = 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+3=0 \Rightarrow x_1 = -3 \\ x-1=0 \Rightarrow x_2 = 1 \end{cases}$$

$$a + x_2 = (-1) + 1 = 0$$

گزینه ۲ صحیح است

تست- در شکل زیر α و β ($\alpha < \beta$) ریشه های معادله درجه دوم $3x^2 + 8x + c = 0$ هستند. اگر خط d در نقطه ۱ محور عرض ها را قطع کند. مقدار c و $\alpha + \beta$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) -۶ (۴) -۵ (سال ۱۴۰۱)



$$3x^2 + 8x + c = 0 \Rightarrow 3x^2 = -8x - c \xrightarrow{\div 3} x^2 = \frac{-8}{3}x - \frac{c}{3}$$

چون تابع خطی محور عرض ها را در نقطه یک قطع کرده است. بنابراین $-\frac{c}{3} = 1 \Rightarrow c = -3$ پس از جایگذاری داریم

$$3x^2 + 8x - 3 = 0$$

a b c

$$\Delta = b^2 - 4ac = (8)^2 - 4(3)(-3) = 64 + 36 = 100$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{-8 + \sqrt{100}}{2 \times 3} = \frac{-8 + 10}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = \beta \\ x_2 = \frac{-8 - \sqrt{100}}{2 \times 3} = \frac{-8 - 10}{6} = \frac{-18}{6} = -3 = \alpha \end{array} \right\} \alpha + \beta \cdot c = -3 + \frac{1}{3}(-3) = -3 - 1 = -4$$

۸- حاصل جمع ریشه های صحیح معادله $0 = -3x^2 + 6x + 7 = (x^2 - 2x - 4)^2 - 3(x^2 - 2x - 4)$ ، کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۲ (سال ۱۴۰۱)

عبارت $x^2 - 2x - 4$ را u فرض می کنیم . و در جمله $3x^2 + 6x$ از -3 فاکتور می گیریم. بنابراین داریم

$$2(\underbrace{x^2 - 2x - 4}_u)^2 - 3x^2 + 6x + 7 = 0 \xrightarrow{-3u = -3(x^2 - 2x - 4)} 2u^2 - 3u - 12 + 7 = 0 \Rightarrow 2u^2 - 3u - 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(-5) = 9 + 40 = 49$$

$$u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{3 + 7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \\ u_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{3 - 7}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \end{array} \right.$$

$$u_1 = \frac{5}{2} \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = \frac{5}{2} \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 13 = 0$$

a b

$$\left. \begin{array}{l} S_1 = x_1 + x_2 \Rightarrow S_1 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-4)}{2} = 2 \\ u_2 = -1 \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = -1 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \\ S_2 = x_1 + x_2 \Rightarrow S_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-2)}{2} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 + S_2 = 3$$

گزینه ۲ صحیح است

تست- حاصل ضرب سه عدد زوج متوالی ، ۳۲ برابر حاصل جمع آن سه عدد است. مجموع ارقام عدد وسط کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۸ (۳) ۵ (۴) ۳ (سال ۱۴۰۲)

اگر $2k$ عدد زوج باشد سه عدد زوج متوالی $x-2, x, x+2 \Leftarrow x=2k$

$$(x-2) \times (x) \times (x+2) = 32 \times [(x-2) + (x) + (x+2)] \Rightarrow (x^2-4)(x) = 32 \times (3x) \Rightarrow$$

$$(x^2-4) = 96 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = \pm 10 \Rightarrow 8, 10, 12, -8, -10, -12 \Rightarrow 1+0=1$$

گزینه ۱ صحیح است.

تست - در یک کارخانه تولید لباس کودک اگر هزینه به ازای x تعداد لباس برابر $7x^2 - x + 20$ و در آمد به ازای x

تعداد لباس برابر $8x^2 - 9x$ باشد. این کارگاه چه تعداد لباس باید تولید کند تا در آمد و هزینه برابر شود؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۰ (سال ۱۴۰۳)

توجه: در نقطه سربه سر تابع هزینه و تابع درآمد با هم برابر هستند

$$8x^2 - 9x = 7x^2 - x + 20 \Rightarrow 8x^2 - 9x - 7x^2 + x - 20 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x - 20 = 0$$

$$\Rightarrow (x-10) \times (x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-10=0 \Rightarrow x_1=10 \\ x+2=0 \Rightarrow x_2=-2 \text{ غ.ق.} \end{cases}$$

گزینه ۴ صحیح است

تست - پنج برابر مربع عدد طبیعی. از مربع سه برابر نصف همان عدد ۹۹ واحد بیشتر است. آن عدد بر کدام گزینه

بخش پذیر است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷ (سال ۱۴۰۳)

$$5x^2 = \left(\frac{3x}{2}\right)^2 + 99 \Rightarrow 5x^2 = \frac{9x^2}{4} + 99 \Rightarrow 5x^2 - \frac{9x^2}{4} - 99 = 0 \xrightarrow{\times 4} 20x^2 - 9x^2 - 396 = 0 \Rightarrow 11x^2 - 396 = 0$$

$$\Rightarrow 11x^2 = 396 \Rightarrow x^2 = \frac{396}{11} = 36 \Rightarrow x = \pm 6 \Rightarrow x = 6$$

گزینه ۳ صحیح است

نمونه سوالات ریاضی ۱ پودمان ۳

۱- حاصل عبارتهای جبری زیر را بدست آورید و درجه آن را بنویسید

$$a)(x^2 - 5x + 3).(2x^3 - 6x)$$

$$b)(3x^4 - 2).(2x^5 - 6x^3)$$

۲- معادله های زیر را به روش هندسی حل کنید.

تهیه و تنظیم: علی زارعی

$$a) x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$b) x^2 + x - 2 = 0$$

$$c) x^2 + 2x + 6 = 0$$

$$d) x^2 - 2x + 1 = 0$$

۳- معادلات زیر را حل کنید.

$$a) x^2 - 8x - 20 = 0$$

$$b) 2x^2 + 5x = 3$$

$$c) x^3 + 7x^2 + 10x = 0$$

$$d) x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$e) x^2 + x - 2 = 0$$

$$f) x^2 + 2x + 6 = 0$$

$$g) x^2 - 2x + 1 = 0$$

۴- در معادله $x^2 - 5x + m = 0$ مقدار m را طوری تعیین کنید که ریشه مضاعف داشته باشد.۵- در معادله $x^2 - 3x + c = 0$ مقدار c را طوری تعیین کنید که (-2) یکی از ریشه های آن باشد داشته باشد.

۶- در یک مثلث ارتفاع مثلث ۴ برابر قاعده آن است اگر مساحت مثلث ۲۰۰ سانتی متر مربع باشد اندازه ارتفاع و قاعده مثلث را بدست آورید

ریاضی ۱ پودمان ۴

یادآوری روابط توان

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \Rightarrow 8^9 \times 8^{10} = 8^{9+10} = 8^{19}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \Rightarrow 5^6 \div 5^4 = 5^{6-4} = 5^2 = 25$$

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m \Rightarrow 3^6 \times 5^6 = (3 \times 5)^6 = 15^6$$

$$a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m \Rightarrow 15^8 \div 5^8 = \left(\frac{15}{5}\right)^8 = 3^8$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \Rightarrow 7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$$

نمایش اعداد به صورت رادیکالی

ریشه n ام a به توان m $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ است به عنوان مثال: $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$

سوال - تفاضل ریشه سوم عدد ۶۴ با عدد $(\sqrt[4]{\frac{1}{4}} \times \sqrt{2} \times \sqrt[4]{\frac{1}{4}})$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳ (سال ۱۴۰۳)

تقسیم باکتری

فرض کنیم جرم m_0 جرم اولیه یک نوع باکتری پس از n مرحله جرم آن به m برسد که در آن $n = \frac{t}{T}$ و t کل زمان و T زمان تقسیم باکتری باشد و a نسبتی است که باکتری افزایش یا کاهش

می یابد. در این صورت $m = m_0 \times a^n \Rightarrow m = m_0 \times a^{\frac{t}{T}}$ و نسبت افزایش است مثلاً اگر گفته شود ۵ برابر میشود $a = 5$ در نظر گرفته میشود.

مثال: وزن یک نوع باکتری پس از یک ساعت ۵ برابر میشود وزن چهارگرم از این باکتری پس از سه ساعت چقدر میشود؟

$$m_0 = 4, T = 1h, t = 3, a = 5$$

$$4 \xrightarrow{T=1} 4 \times 5^1 = 20 \xrightarrow{T=1} 20 \times 5^1 = 100 \xrightarrow{T=1} 100 \times 5^1 = 500$$

$$m = m_0 \times a^{\frac{t}{T}} \Rightarrow m = 4 \times 5^{\frac{3}{1}} = 4 \times 125 = 500$$

مثال: وزن یک نوع باکتری پس از یک ساعت دو برابر میشود وزن یک گرم از این باکتری پس از نیم ساعت چقدر میشود؟

$$m_0 = 1, T = 1h, t = \frac{1}{2}, a = 2$$

$$m = m_0 \times a^{\frac{t}{T}} \Rightarrow m = 1 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

مثال: وزن یک نوع باکتری پس از یک ساعت ۲ برابر میشود وزن یک گرم از این باکتری پس از بیست دقیقه چقدر میشود؟

$$m_0=1, T=1h, t=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}, a=2$$

$$m = m_0 \times a^{\frac{t}{T}} \Rightarrow m = 1 \times 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$$

مثال: وزن یک نوع عنصر رادیو اکتیو پس از یک ساعت نصف میشود وزن یک گرم از این عنصر پس از سه ساعت چقدر میشود؟

$$m_0=1, T=1h, t=3, a=\frac{1}{2}$$

$$m = m_0 \times a^{\frac{t}{T}} \Rightarrow m = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

سوال: وزن یک نوع باکتری پس از یک ساعت ۸ برابر میشود وزن ۵ گرم از این باکتری پس از بیست دقیقه چقدر میشود؟

تعریف: اگر a یک عدد حقیقی و k عدد زوج ($k=2n$) باشد آنگاه $\sqrt[k]{a^k} = |a|$

مثال: حاصل $\sqrt[4]{\left(\frac{2}{3}\right)^4}$, $\sqrt[4]{\left(-\frac{1}{v}\right)^4}$, $\sqrt[4]{(2-\sqrt{v})^4}$ را بدست آورید

$$\sqrt[4]{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \left|\left(\frac{2}{3}\right)\right| = \frac{2}{3} , \quad \sqrt[4]{\left(-\frac{1}{v}\right)^4} = \left|-\frac{1}{v}\right| = -\left(-\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v}$$

$$\sqrt[4]{(2-\sqrt{v})^4} = \underbrace{|(2-\sqrt{v})|}_{\text{منفی}} = -(2-\sqrt{v}) = -2 + \sqrt{v} = \sqrt{v} - 2$$

تعریف: اگر a یک عدد حقیقی و k عدد فرد ($k=2n+1$) باشد آنگاه $\sqrt[k]{a^k} = a$

مثال: حاصل رادیکال $\sqrt[7]{(1-\sqrt{8})^7}$ را محاسبه کنید

$$\sqrt[7]{(1-\sqrt{8})^7} = (1-\sqrt{8})$$

نکته ۱: شرط آنکه دو رادیکال با یکدیگر ضرب یا تقسیم شوند این است فرجه های آنها برابر باشد که در این صورت عبارات زیر رادیکال ضرب یا تقسیم می شوند.

مثال: حاصل رادیکال $\sqrt[3]{32} \times \sqrt[3]{2}$ را محاسبه کنید

$$\sqrt[3]{32} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{32 \times 2} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 2^3 = 8$$

نکته ۲: شرط آنکه دو رادیکال با یکدیگر جمع یا تفریق شوند این است (۱) فرجه های آنها برابر باشد. (۲) عبارات زیر زیر رادیکال برابر باشد. که در این صورت عبارات زیر رادیکال جمع یا تفریق می شوند.

مثال: حاصل رادیکال $\sqrt{32} + \sqrt{18}$ را محاسبه کنید

$$\sqrt{32} + \sqrt{18} = \sqrt{16 \times 2} + \sqrt{9 \times 2} = 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

۳- حاصل عبارت $\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{(-2)^2} - \sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^4} - \sqrt[3]{-8} + \sqrt{(2-\sqrt{2})^2}$ کدام است؟

(۱) $-2\sqrt{2}$ (۲) صفر (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۴ (سال ۱۳۹۹)

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{1+2-2\sqrt{2}} = \sqrt{1-2\sqrt{2}+2} = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = -(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1$$

اثبات حدادو

$$\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2, \quad \sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^4} = |1-\sqrt{2}| = -(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1$$

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{-2^3} = -2, \quad \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} = |2-\sqrt{2}| = 2-\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}-1 + \sqrt{2} - (\sqrt{2}-1) - (-2) + (2-\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 2 + 2 - \sqrt{2} = 4$$

گزینه ۴ صحیح است.

۳- حاصل عبارت $\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot (2-\sqrt{3}) - \sqrt{2-\sqrt{3}}$ کدام است؟ (سال ۱۴۰۰)

(۱) ۱ (۲) $2\sqrt{2-\sqrt{3}}$ (۳) $\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$ (۴) صفر (سال ۱۴۰۰)

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot (2-\sqrt{3}) - \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{2-\sqrt{3}} \times ((\sqrt{2+\sqrt{3}}) \times \sqrt{2-\sqrt{3}} - 1) = \sqrt{2-\sqrt{3}} \times (\sqrt{4-3} - 1) \Rightarrow$$

مزدو ج

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} \times (1-1) = 0$$

ص ف ر

گزینه ۴ صحیح است.

- حاصل عبارت $(\sqrt[3]{49} - \sqrt[5]{5\sqrt{125}})(\sqrt[3]{7\sqrt{7}} + \sqrt[3]{5\sqrt{5}})$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{7} + \sqrt{5}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) $\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{5}$ (سال ۱۴۰۲)

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{49} &= \sqrt[4]{7^2} = \sqrt{7} & \sqrt[5]{5\sqrt{125}} &= \sqrt[5]{\sqrt{5^2 \times 5^3}} = \sqrt[5]{\sqrt{5^5}} = \sqrt[5]{5^5} = \sqrt{5} \\ \sqrt[3]{7\sqrt{7}} &= \sqrt[3]{\sqrt{7^2} \times 7} = \sqrt[3]{\sqrt{7^3}} = \sqrt[6]{7^3} = \sqrt{7} \\ \sqrt[3]{5\sqrt{5}} &= \sqrt[3]{\sqrt{5^2} \times 5} = \sqrt[3]{\sqrt{5^3}} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt{5} \\ (\sqrt[4]{49} - \sqrt[5]{5\sqrt{125}})(\sqrt[3]{7\sqrt{7}} + \sqrt[3]{5\sqrt{5}}) &= \underbrace{(\sqrt{7} - \sqrt{5}) \times (\sqrt{7} + \sqrt{5})}_{\text{مزدو ج}} = 7 - 5 = 2\end{aligned}$$

گزینه ۳ صحیح است

تست - تفاضل ریشه سوم عدد ۶۴ با عدد $(\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2})$ کدام است؟

(سال ۱۴۰۳)

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱) صفر

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

$$A = ((\frac{1}{\sqrt[3]{4}}) \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2}) = (2^{-1}) \times (2^{\frac{1}{2}}) \times (2^{\frac{1}{2}}) \times (2^{\frac{1}{2}}) = 2^{-1} \times 2^{\frac{3}{2}} = 2^{-1} \times 2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}-1} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A = 2^{-\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = 2^0 = 1$$

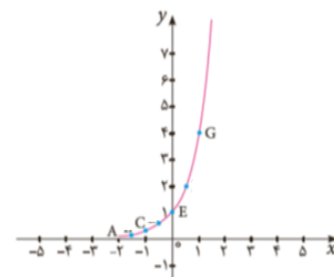
$$\sqrt[3]{64} - A = 4 - 1 = 3$$

گزینه ۴ صحیح است

$y = 4^x$ را رسم کنید.

مثال: تابع

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y = 4^x$	$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$	$4^{-1} = \frac{1}{4^1} = \frac{1}{4}$	$4^0 = 1$	$4^1 = 4$	$4^2 = 16$
نقاط	A	C	E	G	



$y = 2^x$ را رسم کنید.

مثال ۱۱: تابع

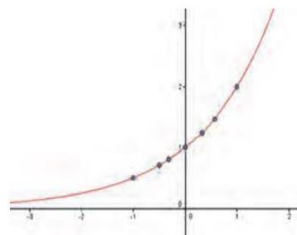
به نام خدا

جزوه کنکور و درس ریاضی ۱ و ۲

تهیه و تنظیم : علی زارعی

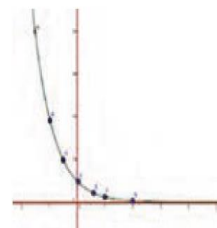
انتشارات حافظ پژوه

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y = 2^x$	$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = ۰/۲۵$	$2^{-1} = \frac{1}{2^1} = ۰/۵$	$2^0 = ۱$	$2^1 = ۲$	$2^2 = ۴$



مثال ۱۲ : تابع $y = (\frac{1}{4})^x$ را رسم کنید.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y = (\frac{1}{4})^x$	$(\frac{1}{4})^{-2} = 4^2 = ۱۶$	$(\frac{1}{4})^{-1} = 4^1 = ۴$	$(\frac{1}{4})^0 = ۱$	$(\frac{1}{4})^1 = ۰/۲۵$	$(\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{۱۶}$



نمونه سوالات پودمان ۴ ریاضی ۱

(حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

$$a) 5^2 \times 4^2 \times 10^6 \times 2^6 \quad b) \sqrt[5]{2^3} \times 2^{\frac{-1}{3}}$$

$$c) \sqrt[8]{(-7)^8} \times \sqrt[4]{(1-\sqrt{5})^4} \quad d) (27^{-2})^{\frac{1}{6}}$$

۲) ریشه سوم $\frac{-8}{27}$ را بدست آورید.

۳) وزن یک نوع باکتری پس از یک ساعت ۴ برابر میشود وزن ۵ گرم از این باکتری پس از چهل دقیقه چقدر میشود؟

۴) وزن یک نوع باکتری پس از یک ساعت ۸ برابر میشود وزن ۵ گرم از این باکتری پس از بیست دقیقه چقدر میشود؟

۵) جرم یک عنصر رادکتیو پس از بیست دقیقه نصف میشود وزن ۱۲۸ گرم از این عنصر پس از دو ساعت چقدر میشود؟

۶) دارایی های یک شرکت در هر سال به میانگین ۱۸۰ درصد سال قبل میشود دارایی شرکت در پایان سال دهم چقدر میشود اگر در زمان تاسیس دارایی شرکت ۵ میلیارد دلار باشد .

۷) نمودار تابع $y = (\frac{1}{2})^x$ و $y = (2)^x$ و $y = (\frac{1}{3})^x$ را جداگانه رسم کنید.

۹) حاصل رادیکالهای زیر را محاسبه کنید.

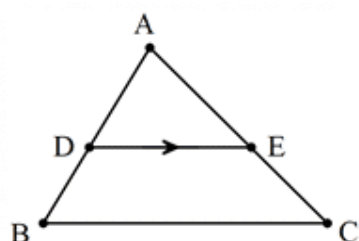
a) $\sqrt[7]{(3 - \sqrt{12})^7}$

b) $\sqrt[8]{(5 - \sqrt{29})^8}$

c) $\sqrt[4]{(8 - \sqrt{67})^4}$

d) $\sqrt[10]{(6 - \sqrt{39})^{10}}$

قضیه تالس: اگر دو خط راست موازی با یکدیگر، دو خط متقاطع را قطع کنند، آنگاه بر روی آن دو خط متقاطع پاره خط‌های متناسب ایجاد می‌شود.

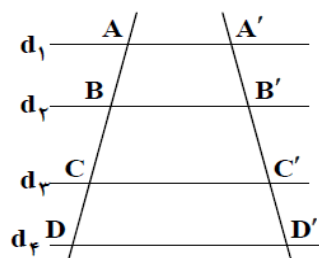


$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow DE \parallel BC$$

قضیه تالس در خطوط موازی: اگر چند خط موازی مفروض باشند و دو خط آن‌ها را قطع کنند، مطابق شکل، پاره خط‌های متناظر ایجاد شده، متناسب اند. در واقع داریم:

$$d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4 \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$$



حالت‌های تشابه دو مثلث: اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر مساوی باشند، آن دو مثلث متشابه هستند. اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر متناسب بوده و زاویه بین این دو ضلع در دو مثلث مساوی باشند، آن دو مثلث متشابه هستند. اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، آن دو مثلث متشابه هستند.

به طور کلی سه روش برای اثبات این که دو مثلث با هم مساوی هستند وجود دارد.

۱- روش سه ضلع (ضضض): وقتی سه ضلع دو مثلث با هم برابر باشند، آن دو مثلث با هم برابرند.

۲- دو ضلع و زاویه بین آنها (ضضز): وقتی در دو مثلث دو ضلع و زاویه بین آنها با هم برابر باشند، آن دو مثلث با هم برابرند.

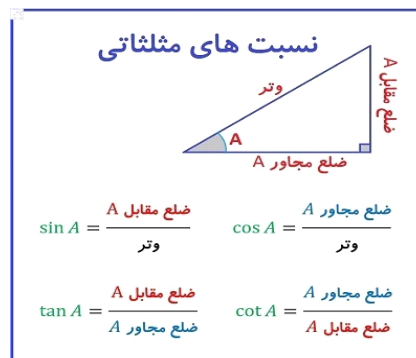
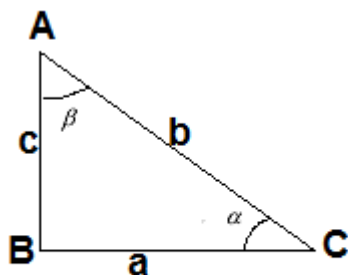
۳- دو زاویه و ضلع بین آنها (ضزز): وقتی در دو مثلث دو زاویه و ضلع بین آنها با هم برابر باشند، آن دو مثلث با هم برابرند.

در مثلث قائم الزاویه

(الف) وتر و یک زاویه تند: اگر در دو مثلث قائم‌الزاویه وتر و یکی از زاویه‌های تند با هم برابر باشند، آن دو مثلث با هم برابرند.

(ب) وتر و یک ضلع: اگر در دو مثلث قائم‌الزاویه وتر و یکی از ضلع با هم برابر باشند، آن دو مثلث با هم برابرند.

نسبتهای مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه به صورت زیر تعریف میشود



دو زاویه α و β متمم یکدیگرند چون مجموع آنها ۹۰ درجه است $\alpha + \beta = 90^\circ$ و نسبتهای آنها به صورت زیر است.

نسبتهای مثلثاتی آلفا (α)	نسبتهای مثلثاتی بتا (β)
$\sin \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$	$\sin \beta = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$
$\cos \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$	$\cos \beta = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$
$\tan \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$	$\tan \beta = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$
$\cot \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$	$\cot \beta = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$

روابط مهم:

قضیه فیثاغورث

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow b^2 = c^2 + a^2$$

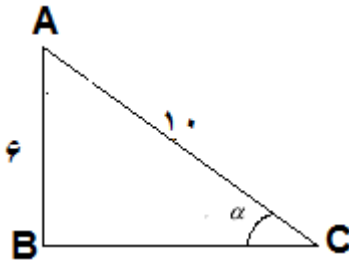
$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

مثال: نسبتهای مثلثاتی زاویه α را بدست آورید.



$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow 10^2 = 6^2 + BC^2 \Rightarrow BC^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow BC = \sqrt{64} = 8$$

$$\sin \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} = \frac{6}{10} = 0.6$$

$$\cos \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b} = \frac{8}{10} = 0.8$$

$$\tan \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$\cot \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1.333$$

مثال: نسبتهای مثلثاتی زاویه α را بدست آورید.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow 5^2 = AB^2 + 3^2 \Rightarrow AB^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

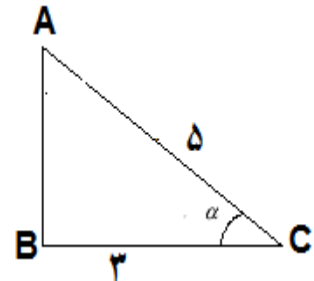
$$\Rightarrow AB = \sqrt{16} = 4$$

$$\sin \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$\cos \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$\tan \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a} = \frac{4}{3} = 1.333$$

$$\cot \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c} = \frac{3}{4} = 0.75$$



جدول مثلثاتی

زاویه نسبت مثلثاتی	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰
جهت حفظ شدن راحت	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
sin	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰
tan	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞ نامعین
cot	∞ نامعین	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰

این جدول حفظ شود $\pi = 180^\circ$

زاویه نسبت مثلثاتی	۰	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$
sin	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰
tan	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞ نامعین
cot	∞ نامعین	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰

نکته ۱) با زیاد شدن زاویه α مقدار cos کاهش می یابد.

نکته ۲) بطور کلی sin و cos بین ۱- و ۱+ است

مثال: در روابط زیر مقادیر را محاسبه کنید

$$\begin{aligned}
 a) \frac{\sin 60 + \tan 45 - \cos 30}{1 + \sin 30} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \\
 b) \frac{\tan 60 + 2\cos 30 - 2\sqrt{3}}{1 + \sin 60} &= \frac{\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} = 0 \\
 c) \sin 30 + \cos 30 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \\
 d) \frac{2\cos 30 - 2\sin 30}{2\tan 45 - 3\cos 60} &= \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \frac{1}{2}}{2 \times 1 - 3 \times \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\frac{4 - 3}{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\frac{1}{2}} = 2(\sqrt{3} - 1) \\
 e) 1 - 2\sin 30 &= 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 1 - 1 = 0
 \end{aligned}$$

کاربردهای مثلثات

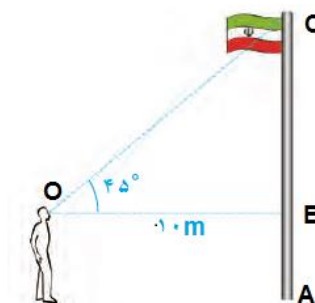
یکی از بیشترین کاربردها محاسبه اضلاع است با داشتن زاویه و یک ضلع

مثال: اگر فاصله شخصی از میله پرچم مطابق شکل زیر ۱۰m باشد و قد شخص ۱۷۰cm باشد ارتفاع میله پرچم تقریباً چقدر است.

تائزانت $\times$ ضلع مجاور = ضلع مقابل

$$\tan 45^\circ = \frac{BC}{OB} \Rightarrow BC = OB \cdot \tan 45^\circ = 10 \times 1 = 10$$

$$AC = AB + BC = 1.7 + 10 = 11.7m$$

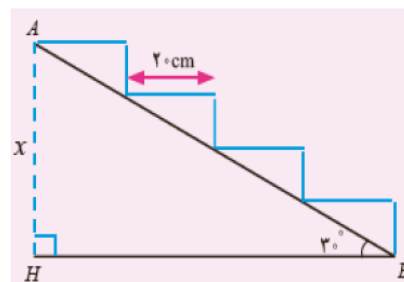


مثال: در شکل زیر ارتفاع AH را محاسبه کنید

$$BH = 4 \times 20 = 80 \text{ cm}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{AH}{BH} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{x}{BH} \Rightarrow$$

$$x = BH \cdot \tan 30^\circ = 80 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 80 \times 0.577 = 46.188 \text{ cm}$$

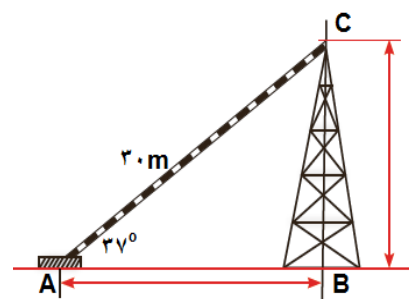


مثال: ارتفاع دکل و فاصله دکل تا پایه را محاسبه کنید.

ضلع مجاور = وتر $\times$ کسینوس زاویه و ضلع مقابل = وتر $\times$ سینوس زاویه

$$\sin 37^\circ = \frac{BC}{AC} \Rightarrow BC = AC \cdot \sin 37^\circ = 30 \times 0.6 = 18 \text{ m}$$

$$\cos 37^\circ = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = AC \cdot \cos 37^\circ = 30 \times 0.8 = 24 \text{ m}$$



تست - در شکل زیر $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$ و $\cos E = \frac{3}{5}$ است مقدار $\tan B + \sin C$ کدام است؟

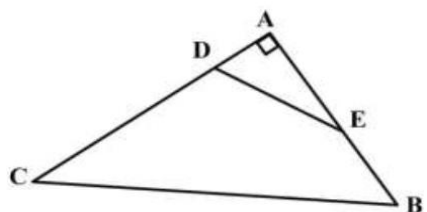
(سال ۱۳۹۸)

$$\frac{33}{20} \quad (4)$$

$$\frac{8}{5} \quad (3)$$

$$\frac{31}{20} \quad (2)$$

$$\frac{7}{5} \quad (1)$$



$$\cos E = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin^2 E + \cos^2 E = 1 \Rightarrow \sin^2 E = 1 - \cos^2 E \Rightarrow \sin E = \pm \sqrt{1 - \cos^2 E}$$

$$\Rightarrow \sin E = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

چون زاویه ی $E=C$ و با D و B متمم هستند بنابراین

$$\cos D = \sin E = \cos B = \frac{4}{5}, \quad \cos E = \sin D = \sin B = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

$$\tan B + \sin c = \frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{15}{20} + \frac{16}{20} = \frac{31}{20}$$

گزینه ۲ صحیح است

تست - در مثلث زیر $B = 60^\circ$ و $C = 30^\circ$ است. اگر اندازه BC برابر ۱۰ سانتی متر باشد. مقدار AB چند سانتی متر است؟

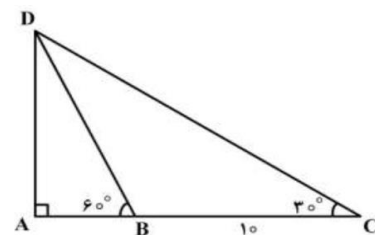
(سال ۱۳۹۸)

۴ $\sqrt{3}$ (۴)

$\frac{10\sqrt{3}}{3}$ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)



$B = 60^\circ \quad C = 30^\circ \quad BC = 10 \quad AB = ?$

$$\cos C = \frac{AC}{DC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{10 + AB}{DC}$$

$$\sin C = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow AD = \frac{1}{2} DC$$

$$\tan B = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AD = \sqrt{3} AB$$

$$\cos C = \frac{AC}{DC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{10 + AB}{DC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{10 + AB}{2\sqrt{3}AB} \Rightarrow 3AB = 10 + AB \Rightarrow 2AB = 10 \Rightarrow AB = \frac{10}{2} = 5$$

تست - اگر $\alpha = \frac{\pi}{6}$ باشد. مقدار $\sin^2 \alpha + \sqrt{2} \cos \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2} \right) + \frac{1}{2} (\tan 2\alpha)^2$ کدام است؟

(سال ۱۳۹۸)

۴ (۴)

۳ (۳)

$\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (۲)

$2\sqrt{2}$ (۱)

$$2 \sin^2 \alpha + \sqrt{2} \cos 6 \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} (\tan 2\alpha)^2 \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{6} = 30^\circ} 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{6} \right) + \sqrt{2} \cos 6 \left(\frac{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\tan 2 \left(\frac{\pi}{6} \right) \right)^2 \Rightarrow$$

$$2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \sqrt{2} \cos 6 \left(\frac{\pi}{6 \times 4} \right) + \frac{1}{2} \times (\sqrt{3})^2 = 2 \left(\frac{1}{4} \right) + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times 3 = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

گزینه ۳ صحیح است

در شکل زیر $BE = C$ است. با توجه به اندازه های روی شکل مقدار x, y کدام است؟

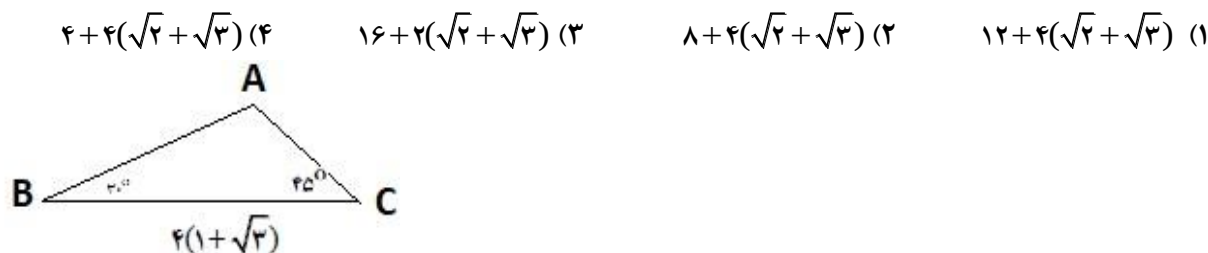


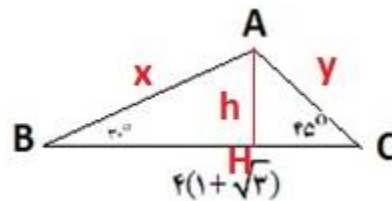
$$BE = C \Rightarrow \triangle ABC \approx \triangle BED \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{4}{y+6} = \frac{6}{4+12} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{8} = \frac{3}{8} &\Rightarrow x = \frac{3 \times 8}{8} = 3 \\ \frac{4}{y+6} = \frac{3}{8} &\Rightarrow 32 = 3y + 18 \Rightarrow 3y = 32 - 18 \Rightarrow 3y = 14 \Rightarrow y = \frac{14}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x, y = 3 \times \frac{14}{3} = 14$$

گزینه ۴ صحیح است.

۵- در شکل زیر $B = 30^\circ$ و $C = 45^\circ$ است اگر $BC = 4(1 + \sqrt{3})$ باشد. محیط مثلث ABC کدام است؟ (سال ۱۳۹۹)





$$\left. \begin{aligned} \sin C = \frac{h}{y} &\Rightarrow h = y \cdot \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y \\ \sin B = \frac{h}{x} &\Rightarrow h = x \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y \Rightarrow x = \sqrt{2}y$$

$$\cos C = \frac{CH}{y} \Rightarrow CH = y \cdot \cos C \Rightarrow CH = y \cdot \cos 45^\circ \Rightarrow CH = \frac{\sqrt{2}}{2} y$$

$$\cos B = \frac{BH}{x} \Rightarrow BH = x \cdot \cos B \Rightarrow BH = x \cdot \cos 30^\circ \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{3}}{2} x$$

$$\left. \begin{aligned} BH + CH &= \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{2} y \xrightarrow{x=\sqrt{2}y} \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2} y = \frac{\sqrt{2}}{2} y(1 + \sqrt{3}) \\ BH + CH &= 2(1 + \sqrt{3}) \end{aligned} \right\} \frac{\sqrt{2}}{2} y(1 + \sqrt{3}) = 2(1 + \sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 8$$

$$p = x + y + BC = 8 + 4\sqrt{2} + 2(1 + \sqrt{3}) = 8 + 4\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{3} = 10 + 4(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

گزینه ۱ صحیح است.

- حاصل عبارت $\frac{(\sin^2 25^\circ + \sin^2 65^\circ)(\tan 50^\circ)}{(\sin^4 50^\circ + \sin^4 40^\circ + 2\sin^2 50^\circ \cdot \sin^2 40^\circ)(\cot 40^\circ)} + \frac{\sin \frac{3\pi}{4}}{\cos \frac{7\pi}{4}}$ کدام است؟ (سال ۱۳۹۹)

۱(۴)

۲(۳)

$\cos^2 50^\circ$ (۲)

$\tan^2 50^\circ$ (۱)

نکته: در دو زاویه متمم $\alpha + \beta = 90^\circ$ $\sin \beta = \cos \alpha$, $\sin \alpha = \cos \beta$

$$\sin^2 25^\circ + \sin^2 65^\circ \xrightarrow{\sin 65^\circ = \cos 25^\circ} \sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ = 1, \quad \tan 50^\circ = \cot 40^\circ$$

$$\left. \begin{aligned} \underbrace{\sin^4 50^\circ + \sin^4 40^\circ + 2\sin^2 50^\circ \cdot \sin^2 40^\circ}_{\text{اثر حاداو}} &= (\sin^2 50^\circ + \sin^2 40^\circ)^2 \\ \sin^2 50^\circ + \sin^2 40^\circ &\xrightarrow{\sin 40^\circ = \cos 50^\circ} \sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin^4 50^\circ + \sin^4 40^\circ + 2\sin^2 50^\circ \cdot \sin^2 40^\circ = 1$$

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{7\pi}{4} = \cos(2\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(\sin^2 25^\circ + \sin^2 65^\circ)(\tan 50^\circ)}{(\sin^4 50^\circ + \sin^4 40^\circ + 2\sin^2 50^\circ \cdot \sin^2 40^\circ)(\cot 40^\circ)} + \frac{\sin \frac{3\pi}{4}}{\cos \frac{7\pi}{4}} = \frac{(1)(\tan 50^\circ)}{(1)(\cot 50^\circ)} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 + 1 = 2$$

گزینه ۳ صحیح است.

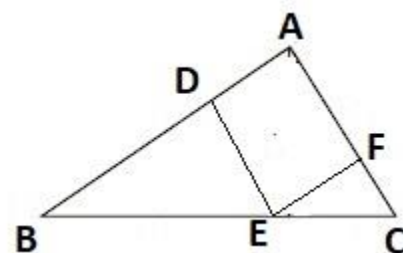
- در شکل زیر چهار ضلعی ADEF متوازی الاضلاع $\frac{BD}{AD} = \frac{3}{5}$ و $AC = 5$ است. اندازه پاره خط AF کدام است؟ (سال ۱۴۰۰)

$$\frac{25}{8} \text{ (۴)}$$

$$\frac{10}{8} \text{ (۳)}$$

$$\frac{15}{8} \text{ (۲)}$$

$$\frac{20}{8} \text{ (۱)}$$



$$\left. \begin{aligned} AB \parallel EF &\Rightarrow \frac{AF}{CF} = \frac{BE}{CE} \\ DE \parallel AF &\Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{BE}{CE} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AF}{CF} = \frac{BD}{AD} = \frac{3}{5} \Rightarrow CF = \frac{5}{3} AF$$

$$AC = AF + CF \Rightarrow 5 = AF + \frac{5}{3} AF \Rightarrow 5 = \frac{8}{3} AF \Rightarrow AF = \frac{15}{8}$$

گزینه ۲ صحیح است

در مثلث $\triangle ABC$, $\sin B = \frac{3}{5}$ است اگر طول AB برابر ۴ باشد. اندازه وتر BC کدام است؟

(سال ۱۴۰۱)

$$\frac{4}{8} \text{ (۴)}$$

$$\frac{4}{2} \text{ (۳)}$$

$$\frac{5}{4} \text{ (۲)}$$

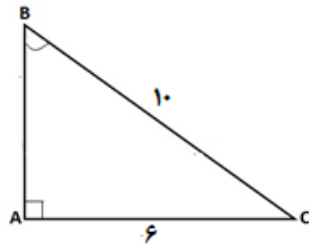
$$5 \text{ (۱)}$$

به نام خدا

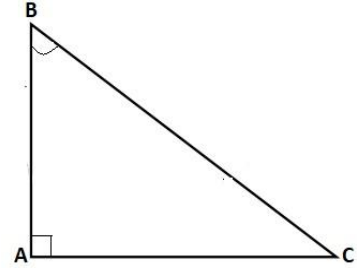
جزوه کنکور و درس ریاضی ۱ و ۲

تهیه و تنظیم: علی زارعی

انتشارات حافظ پژوه



$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$



روش اول با استفاده قضیه فیثاغورث

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow 10^2 = AB^2 + 6^2 \Rightarrow AB^2 = 64 \Rightarrow AB = \pm 8$$

$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \Rightarrow BC = 5$$

روش دوم روابط مثلثاتی

$$\sin^2 B + \cos^2 B = 1 \Rightarrow \cos^2 B = 1 - \sin^2 B \Rightarrow \cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{6}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{64}{100}} = \pm \frac{4}{5}$$

$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \Rightarrow BC = 5$$

چون $AB = 4$ است بنابراین $BC = 5$ است

گزینه ۱ صحیح است.

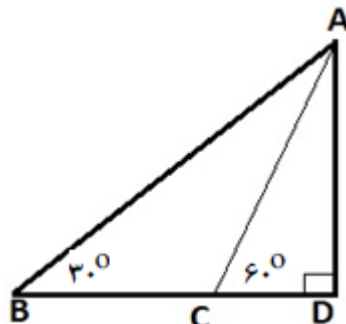
- در شکل زیر $\hat{B} = \hat{C} = 30^\circ$ است. اگر $BC = 18$ باشد. مساحت مثلث ABC کدام است؟

(۴) $\frac{243\sqrt{3}}{4}$ (سال ۱۴۰۲)

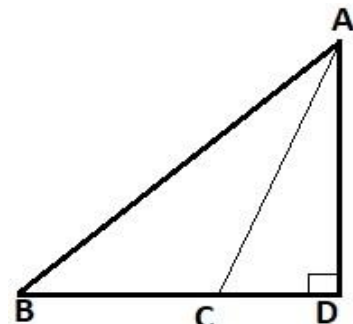
(۳) $\frac{81\sqrt{3}}{2}$

(۲) $\frac{81\sqrt{3}}{4}$

(۱) $\frac{243\sqrt{3}}{2}$



با توضیحات در سوال



$$\left. \begin{aligned} \tan 60^\circ &= \frac{AD}{CD} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow AD = \sqrt{3}CD \\ \tan 30^\circ &= \frac{AD}{BD} = \frac{AD}{BC+CD} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AD}{18+CD} \Rightarrow 3AD = \sqrt{3}(18+CD) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3\sqrt{3}CD = \sqrt{3}(18+CD)$$

$$3\sqrt{3}CD = \sqrt{3}(18+CD) \Rightarrow 3CD = 18+CD \Rightarrow 2CD = 18 \Rightarrow CD = \frac{18}{2} = 9 \Rightarrow BD = 18+9 = 27$$

$$AD = \sqrt{3}CD \Rightarrow AD = \sqrt{3} \times 9 = 9\sqrt{3}$$

$$S = \frac{BD \times AD}{2} = \frac{27 \times 9\sqrt{3}}{2} = \frac{243\sqrt{3}}{2}$$

گزینه ۱ صحیح است

- با توجه به شکل زیر. اگر $\sin(\alpha) = \frac{12}{13}$, $\hat{A} = 90^\circ$, $BC = DC = 13$, باشد. $\tan(\frac{\alpha}{2})$ کدام است؟

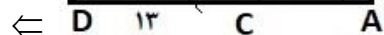
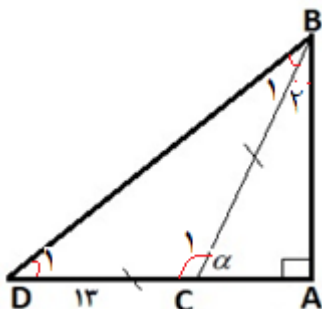
(سال ۱۴۰۳)

(۴) $\frac{4}{3}$

(۳) $\frac{3}{4}$

(۲) $\frac{3}{2}$

(۱) $\frac{2}{3}$



$$BC = DC = 13, \hat{A} = 90^\circ, \sin(\alpha) = \frac{12}{13}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{13} \Rightarrow \begin{cases} AB = 12 \\ BC = 13 \end{cases}$$

$$\triangle ABC \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$$

$$AC^2 = 25 \Rightarrow AC = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

$$BC = DC = ۱۳ \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1$$

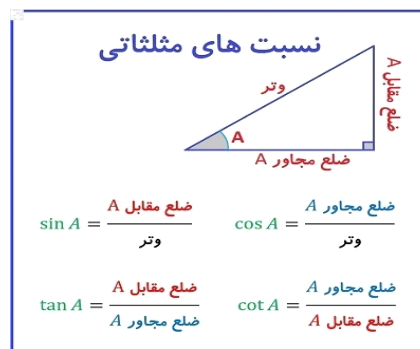
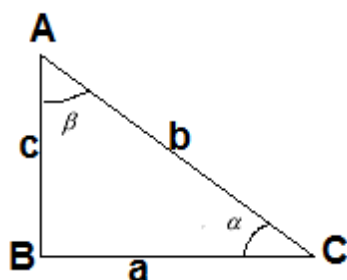
$$\left. \begin{array}{l} \hat{B}_1 + \hat{D}_1 + \hat{C}_1 = ۱۸۰ \\ \hat{C}_1 + \alpha = ۱۸۰ \end{array} \right\} \hat{B}_1 + \hat{D}_1 = \alpha \xrightarrow{\hat{B}_1 = \hat{D}_1} \hat{B}_1 = \hat{D}_1 = \frac{\alpha}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \tan D_1 = \frac{AB}{AD} = \frac{AB}{DC + AC} = \frac{۱۲}{۱۳ + ۵} = \frac{۱۲}{۱۸} = \frac{۲}{۳}$$

گزینه ۱ صحیح است

پودمان ۳ ریاضی ۲

یاد آوری همانگونه که می دانیم نسبتهای مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه به صورت زیر تعریف میشود



⇐

دو زاویه α و β متمم یکدیگرند چون مجموع آنها ۹۰ درجه است $\alpha + \beta = 90^\circ$ و نسبتهای آنها به صورت زیر است

نسبتهای مثلثاتی آلفا) (α)	نسبتهای مثلثاتی بتا) (β)
$\sin \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$	$\sin \beta = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$
$\cos \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$	$\cos \beta = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$
$\tan \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$	$\tan \beta = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$
$\cot \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$	$\cot \beta = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$

روابط مهم:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

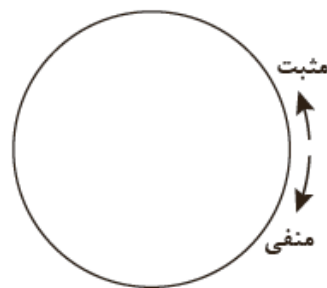
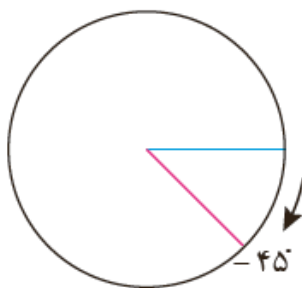
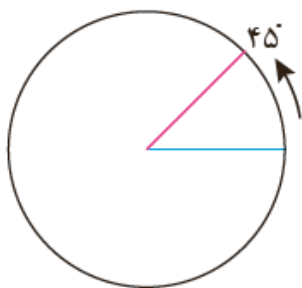
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow b^2 = c^2 + a^2 \quad \text{قضیه فیثاغورث}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

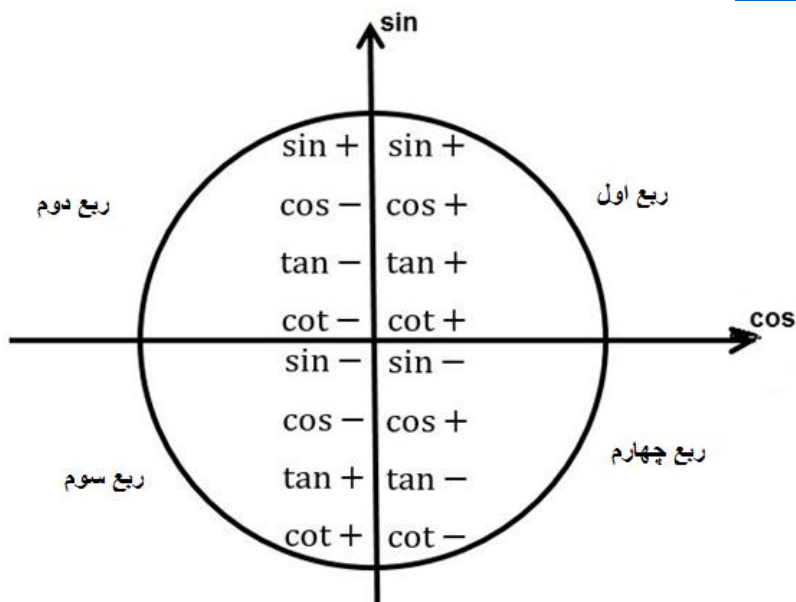
$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

تعریف: دایره مثلثاتی دایره ای است با شعاع واحد یعنی شعاع یک که در آن محور xها در واقع محور cos ها و محور yها در واقع محور sinها است

نکته: در دایره مثلثاتی خلاف جهت گردش عقربه های ساعت جهت مثبت و جهت گردش عقربه های ساعت جهت منفی مثلثاتی در نظر گرفته میشود



بنابر این در دایره مثلثاتی علامت نسبت‌های مثلثاتی به صورت زیر است



بنا بر این

$$\begin{aligned}\sin 30 &= \frac{1}{2} \Rightarrow \sin(-30) = -\frac{1}{2} \\ \cos 30 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos(-30) = +\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan 30 &= \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan(-30) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cot 30 &= \sqrt{3} \Rightarrow \cot(-30) = -\sqrt{3}\end{aligned}$$

واحدهای مختلف زاویه

هردایره ۳۶۰ درجه و 2π رادیان و ۴۰۰ گراد است بنابراین میتوان گفت

$$\begin{aligned}\frac{D}{360} &= \frac{R}{2\pi} \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \\ \frac{D}{360} &= \frac{G}{400} \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{G}{200}\end{aligned}$$

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} = \frac{G}{200} \quad \text{به طور کلی میتوان گفت:}$$

مثال ۱: ۶۰ درجه چند رادیان است؟

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{60}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \pi \times \frac{60}{180} \Rightarrow R = \frac{\pi}{3}$$

مثال ۲: ۱۸۰ درجه چند رادیان است؟

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{180}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{180 \cdot \pi}{180} = \pi \approx 3.14$$

مثال ۳: $\frac{5\pi}{6}$ چند درجه است؟

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{\frac{5\pi}{6}}{\pi} \Rightarrow D = 180 \times \frac{5\pi}{6\pi} = 30 \times 5 = 150$$

مثال ۴: یک رادیان چند درجه است؟

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{1}{\pi} \Rightarrow D = \frac{1 \times 180}{\pi} = \frac{180}{3.14} \approx 57.3$$

مثال ۵: ۴۵° چند گراد است؟

$$\frac{D}{180} = \frac{G}{200} \Rightarrow \frac{45}{180} = \frac{G}{200} \Rightarrow G = \frac{200 \times 45}{180} = 50$$

توجه: می دانیم محیط دایره از رابطه $L = 2\pi r$ بدست می آید که در ۳۶۰ درجه دایره توزیع شده است بنابراین میتوان گفت:

$$\frac{L}{D} = \frac{2\pi r}{360} \Rightarrow \frac{L}{D} = \frac{\pi r}{180} \Rightarrow D = \frac{\pi}{180} \times \frac{L}{r}$$

که در واقع $\frac{L}{r}$ تعریف رادیان است که در واقع L طول کمان و r دایره است

مثال: طول کمان مقابل یک زاویه ۵۰ cm است اگر شعاع دایره ۳۰ cm باشد زاویه چند درجه است

$$\frac{L}{D} = \frac{2\pi r}{360} \Rightarrow \frac{50}{D} = \frac{2\pi \times 30}{360} \Rightarrow D = \frac{360 \times 50}{60\pi} = \frac{300}{\pi} \approx 95.5^\circ$$

مثال: طول کمان مقابل زاویه ۱۲۰ درجه از دایره ای به شعاع ۲۰ cm را بدست آورید

$$\frac{L}{D} = \frac{2\pi r}{360} \Rightarrow \frac{L}{120} = \frac{2\pi \times 20}{360} \Rightarrow L = \frac{40\pi \times 120}{360} = \frac{40\pi}{3} = \frac{40 \times 3.14}{3} = 41.86$$

تست - در دایره ای به شعاع r نقطه A کمانی به طول L را در جهت مثبت طی می کند زاویه چرخش آن نقطه بر حسب درجه کدام است؟ (سال ۱۳۹۸)

$$\frac{\pi r}{180 \cdot L} \quad (4)$$

$$\frac{\pi L}{180 \cdot r} \quad (3)$$

$$\frac{180 \cdot r}{\pi L} \quad (2)$$

$$\frac{180 \cdot L}{\pi r} \quad (1)$$

به نام خدا

جزوه کنکور و درس ریاضی ۱ و ۲

تهیه و تنظیم: علی زارعی

انتشارات حافظ پژوه

کل دایره	زاویه 360°	محیط $2\pi r$
جزء خواسته شده	زاویه $D = ?$	طول L

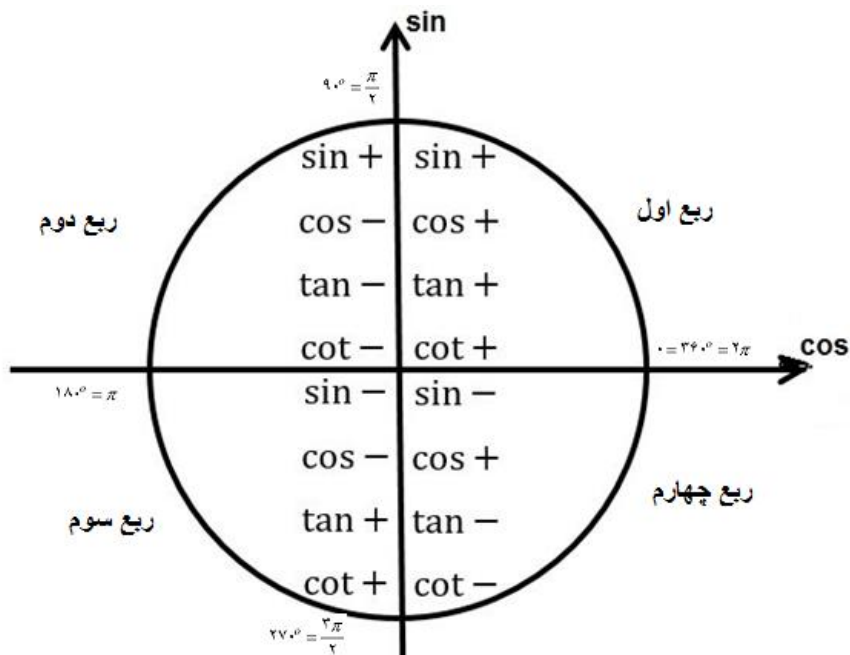
$$\Rightarrow D = \frac{L \times 360}{2\pi r} = \frac{L \times 180}{\pi r}$$

گزینه ۱ صحیح است

بنابر این جدول مثلثاتی در ربع اول به صورت زیر میشود

زاویه	°	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$
نسبت مثلثاتی					
sin	°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	°
tan	°	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞ نامعین
cot	∞ نامعین	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	°

با توجه به مطالب گفته شده در دایره مثلثاتی به شکل زیر نقاط مشخص میشود



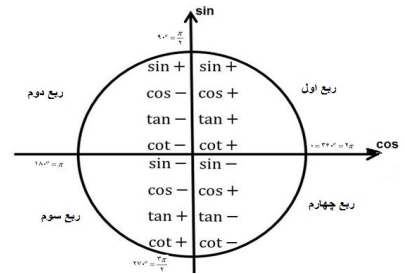
بنابر این جدول مثلثاتی در نقاط ابتدایی و انتهایی هر ربع به صورت زیر میشود

زاویه	°	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$	$180^\circ = \pi$	$270^\circ = \frac{3\pi}{2}$	$360^\circ = 2\pi$
-------	---	----------------------------	-------------------	------------------------------	--------------------

نسبت مثلثاتی					
sin	+	1	+	-1	+
cos	1	+	-1	+	1
tan	+	∞	+	∞	+
cot	∞ نامعین	+	∞ نامعین	+	∞ نامعین

محاسبه نسبتهای مثلثاتی ربع دوم (۹۰ تا ۱۸۰ درجه یا $\frac{\pi}{2}$ تا π): علامتها را طبق دایره مثلثاتی که قبلاً آموزش

داده شده بود قرار میدهیم



$$\begin{aligned}\sin(180 - \theta) &= \sin(\pi - \theta) = +\sin \theta \\ \cos(180 - \theta) &= \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta \\ \tan(180 - \theta) &= \tan(\pi - \theta) = -\tan \theta \\ \cot g(180 - \theta) &= \cot g(\pi - \theta) = -\cot g \theta\end{aligned}$$

روش دوم :

$$\begin{aligned}\sin(90 + \theta) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = +\cos \theta \\ \cos(90 + \theta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta \\ \tan(90 + \theta) &= \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot g \theta \\ \cot g(90 + \theta) &= \cot g\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\tan \theta\end{aligned}$$

مثال: نسبتهای مثلثاتی 120° را بنویسید.

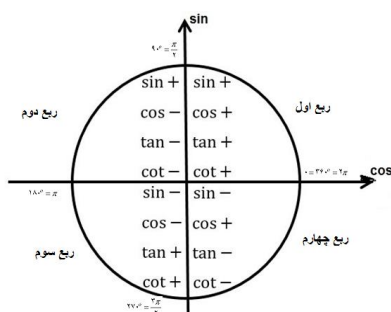
$$\sin 120 = \sin(180 - 60) = +\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120 = \cos(180 - 60) = -\cos 60 = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120 = \tan(180 - 60) = -\tan 60 = -\sqrt{3}$$

$$\cot g 120 = \cot g (180 - 60) = -\cot g 60 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

محاسبه نسبت‌های مثلثاتی ربع سوم (۱۸۰ تا ۲۷۰ درجه یا π تا $\frac{3\pi}{2}$):



$$\sin(180 + \theta) = \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(180 + \theta) = \cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$$

$$\tan(180 + \theta) = \tan(\pi + \theta) = +\tan \theta$$

$$\cot g (180 + \theta) = \cot g (\pi + \theta) = +\cot g \theta$$

مثال: نسبت‌های مثلثاتی 240° را بنویسید.

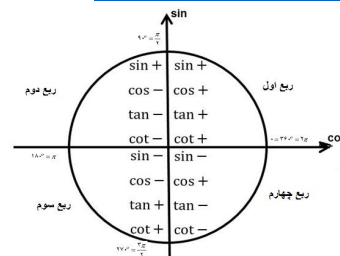
$$\sin 240 = \sin(180 + 60) = -\sin 60 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240 = \cos(180 + 60) = -\cos 60 = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 240 = \tan(180 + 60) = \tan 60 = \sqrt{3}$$

$$\cot g 240 = \cot g (180 + 60) = \cot g 60 = +\frac{\sqrt{3}}{3}$$

محاسبه نسبت‌های مثلثاتی ربع چهارم (۲۷۰ تا ۳۶۰ یا صفر درجه یا $\frac{3\pi}{2}$ تا 2π):



$$\sin(360 - \theta) = \sin(2\pi - \theta) = \sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(360 - \theta) = \cos(2\pi - \theta) = \cos(-\theta) = +\cos \theta$$

$$\tan(360 - \theta) = \tan(2\pi - \theta) = \tan(-\theta) = -\tan \theta$$

$$\cot g(360 - \theta) = \cot g(2\pi - \theta) = \cot g(-\theta) = -\cot g \theta$$

مثال سینوس و کسینوس 30° را محاسبه کنید

$$\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}, \quad \cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال: سینوس و کسینوس $-\frac{5\pi}{6}$ را محاسبه کنید

$$\sin(-\frac{5\pi}{6}) = -\sin(\frac{5\pi}{6}) = -\sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(-\frac{5\pi}{6}) = \cos(\frac{5\pi}{6}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال:

$$a) \sin^2 60 = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \quad b) \tan^4 30 = (\frac{\sqrt{3}}{3})^4 = \frac{(\sqrt{3})^4}{3^4} = \frac{3^2}{3^4} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$c) (\sin 15 + \cos 15)^2 = \sin^2 15 + \cos^2 15 + 2 \sin 15 \times \cos 15 = 1 + 2 \times 0.258 \times 0.965 = 1 + 0.49794 \approx 1.5$$

$$d) \cos 15^2 + \sin 15^2 = \cos 225 + \sin 225 = \cos(180 - 45) + \sin(180 - 45) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$- \text{حاصل عبارت } \frac{5 \tan 225^\circ + \cos 240^\circ + 2 \sin 330^\circ + 4 \cot 135^\circ}{4 \cot 315^\circ + \cos 45^\circ - \tan 135^\circ + 2 \sin 210^\circ} \text{، کدام است؟}$$

$$(1) \frac{1}{4} \quad (2) \frac{1}{2} \quad (3) \frac{1}{8} \quad (4) \frac{1}{6}$$

ابتدا هریک از نسبت‌های مثلثاتی را جداگانه حساب می‌کنیم و جایگذاری می‌کنیم

$$\tan 225^\circ = \tan(180^\circ + 45^\circ) = 1 \quad \cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\frac{1}{2}$$

$$\cot 135^\circ = \cot g(180^\circ - 45^\circ) = -1 \quad \sin 330^\circ = \sin(360^\circ - 30^\circ) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\frac{1}{2} \quad \cos 450^\circ = \cos(360^\circ + 90^\circ) = 0$$

$$\cot 315^\circ = \cot g(360^\circ - 45^\circ) = -1 \quad \tan 135^\circ = \tan(180^\circ - 45^\circ) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{5 \tan 225^\circ + \cos 240^\circ + 2 \sin 330^\circ + 4 \cot 135^\circ}{4 \cot 315^\circ + \cos 450^\circ - \tan 135^\circ + 2 \sin 210^\circ} = \frac{5 \times 1 + (-\frac{1}{2}) + 2 \times (-\frac{1}{2}) + 4(-1)}{4(-1) + (0) - (-1) + 2 \times (-\frac{1}{2})} = \frac{1}{8}$$

محاسبه نسبتهای مثلثاتی بیشتر از ۳۶۰ درجه:

کافی است زاویه مورد نظر را بخش بر ۳۶۰ یا 2π کنیم و برای باقیمانده نسبتهای مثلثاتی بنویسیم همانطور که قبلاً گفتیم مضارب صحیح ۳۶۰ و 2π در مقدار نسبت مثلثاتی تاثیر ندارد.

مثال: نسبتهای مثلثاتی ۱۸۶۰ درجه را بدست آورید.

$$\left. \begin{array}{l} 1860 \quad | 360 \\ 1800 \quad | 5 \\ 60 \end{array} \right\} 1800 = (360 \times 5) + 60 \Rightarrow \quad \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60 = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60 = \sqrt{3}, \quad \cot g = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

تست - در دایره مثلثاتی، انتهای کمان ۱۵۳۶ درجه در چه ربعی قرار می گیرد؟

(۱) چهارم	(۲) اول	(۳) دوم	(۴) سوم	(سال ۱۴۰۲)
-----------	---------	---------	---------	------------

$$\left. \begin{array}{l} 1536 \quad | 360 \\ 1440 \quad | 4 \\ 96 \end{array} \right\} 1536 = (360 \times 4) + 96 \Rightarrow$$

چون $90^\circ < 96^\circ < 180^\circ$ بنابراین در ربع دوم است.

گزینه ۳ صحیح است.

نوشتن معادله خط راست با داشتن مختصات یک نقطه و زاویه با محور xها:

نکته: منظور از شیب خط همانطور که قبلاً گفته بودیم همان $\tan$ زاویه است

$$1) \tan \theta = a = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$2) y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $A \begin{vmatrix} 2 \\ 5 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 5 \\ 11 \end{vmatrix}$ بگذرد.

$$1) m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{11 - 5}{5 - 2} = \frac{6}{3} = 2$$

$$2) y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 5 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 4 + 5 \Rightarrow y = 2x + 1$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که با محور xها زاویه 60° درجه ساخته و محور طولها را در نقطه ۵ قطع کند.

چون گفته محور طولها را قطع کند یعنی $y = 0$

$$x_1 = 5 \quad y_1 = 0 \quad \tan 60 = m = \sqrt{3}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = \sqrt{3}(x - 5) \Rightarrow y = \sqrt{3}x - 5\sqrt{3}$$

نکته: اگر گفته شود محور طولها را قطع کند یعنی $y = 0$ و اگر گفته شود محور عرضها قطع شود یعنی $x = 0$

استاندارد کردن معادله خط: فرم استاندارد معادله خط به صورت $y = mx + b$ است بنابراین اگر معادله به فرم

$Ax + By + C = 0$ باشد به صورت زیر عمل میکنیم. تا ضریب y مثبت یک شود.

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow By = -Ax - C \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \xrightarrow{m = -\frac{A}{B}, b = -\frac{C}{B}} y = mx + b$$

تست - زاویه بین دو خط به معادله $ax - by = 2$ و جهت مثبت محور طولها برابر $\frac{5\pi}{6}$ است. اگر این خط محور

طولها را در نقطه ۲- قطع کند. مقدار $a + b$ چقدر است؟

(سال ۱۳۹۸)

$$\sqrt{3} - 3 \quad (4)$$

$$3 - \sqrt{3} \quad (3)$$

$$1 - \sqrt{3} \quad (2)$$

$$\sqrt{3} - 1 \quad (1)$$

ابتدا معادله خط را استاندارد می کنیم تا ضریب y مثبت یک شود.

$$ax - by = 2 \Rightarrow by = ax - 2 \Rightarrow y = \frac{a}{b}x - \frac{2}{b}$$

سپس شیب خط را محاسبه می کنیم

$$\theta = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{5 \times 180}{6} = 150 \Rightarrow m = \tan 150 = \tan(180 - 30) = -\tan 30 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

بنابر این پس از جایگذاری در روابط بدست آمده داریم:

$$\begin{aligned} m = \frac{a}{b} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2}{b} \Rightarrow 0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(-2) - \frac{2}{b} \Rightarrow \frac{2}{b} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \Rightarrow b = \frac{2}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} \\ \left. \begin{aligned} \frac{a}{b} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = \sqrt{3} \times -\frac{\sqrt{3}}{3} = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + b = -1 + \sqrt{3} = \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

تست - مساحت مثلثی که از تقاطع خطی که با محور x ها زاویه ۱۲۰ درجه می سازد و از نقطه (۲,۰) عبور می کند . با محورهای مختصات کدام است؟

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt{3} & (1) & \frac{\sqrt{3}}{3} & (2) & \frac{\sqrt{3}}{2} & (3) & 2\sqrt{3} & (4) & \text{(سال ۱۴۰۳)} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \theta = 180 - 120 = 60 \Rightarrow \tan \theta = \tan 60 = \sqrt{3} \\ \left. \begin{aligned} \tan 60 = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AB}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow AB = 2\sqrt{3} \\ S = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{2\sqrt{3} \times 2}{2} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

گزینه ۴ صحیح است

ریاضی ۲ پودمان ۱

تابع:

رابطه بین کمیت ها:

همان گونه که در درس فیزیک خواندیم رابطه بین سرعت و مسافت و زمان $x = v.t$ و رابطه گرما به صورت $Q = m.c.\Delta\theta$ می باشد. و میدانیم که با داشتن بعضی از مقادیر میتوان مقادیر مجهول را با استفاده از عملیات ریاضی به دست آورد. در واقع بین این کمیتها رابطه وجود دارد.

مثال ۱: مفتولی به طول $x = 100 \text{ cm}$ را به شکل مربع در میاوریم رابطه بین طول میله x و مساحت $S(x)$ را بدست آورید.

میدانیم طول میله همان محیط مربع است



طول هر ضلع میشود $a = \frac{x}{4}$ و مساحت مربع یک ضلع ضربدر خودش است بنابراین

$$s = a^2 \Rightarrow S_{(x)} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 \Rightarrow S_{(x)} = \frac{x^2}{16}$$

$$S_{(x)} = \frac{x^2}{16} \quad x=100 \quad S_{(x)} = \frac{100^2}{16} = 625 \text{ cm}^2$$

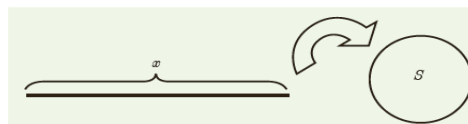
مثال ۲: مفتولی به طول $L = x = 62.8 \text{ cm}$ را به شکل دایره در میاوریم رابطه بین طول میله L و مساحت $S_{(x)}$ را بدست

آورید. میدانیم طول میله همان محیط دایره است

$$L = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{L}{2\pi}$$

$$s = \pi r^2 \Rightarrow S_{(L)} = \pi \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \Rightarrow S_{(L)} = \pi \frac{L^2}{4\pi^2} \Rightarrow S_{(L)} = \frac{L^2}{4\pi}$$

$$S_{(L)} = \frac{62.8^2}{4\pi} = \frac{3943.84}{4 \times 3.14} = 314 \text{ cm}^2$$



تعریف:

دامنه: مجموعه ای از مقادیر ورودی است که می توانند به یک تابع داده شوند. به عبارتی مجموعه مقادیر ورودی مجاز

برد: مجموعه ای از مقادیر خروجی است که تابع می تواند تولید کند. به عبارتی برد نشان می دهد که می دهد که پس از اعمال تابع بر روی مقادیر خروجی چه عددیایی ممکن است به دست آید. یعنی مجموعه مقادیر خروجی ممکن

در مثال یک و دو به مقادیری که طول میله میتواند داشته باشد **دامنه** گویند مجموعه مقادیری که مساحت به ازای مقدار طول میله (دامنه) بدست می آید **برد** گویند. و به فرمولهای به دست آمده برای مساحت **قانون یا ضابطه تابع** گویند.

مثال: الف) رابطه طول فنر (x یا L) و جرم آویزان شده از آن (m یا a) در یک فنر به صورت $L = \frac{m}{15} + 10$ است و

حداکثر طول فنر ۶۰ سانتیمتر است دامنه تابع را بنویسید و ضابطه جرم متصل به فنر با طول فنر را بدست آورید. ب) در صورتیکه طول ۴۰ سانتیمتر باشد جرم متصل به آن چقدر است.

این مثال در واقع اساس کار ترازوهای فنری است که در وانتی ها هنگام خرید و فروش استفاده میشود

$$\{ L \in \mathbb{R} | 10 \leq L \leq 60 \}$$

دامنه تعریف

ضابطه تابع

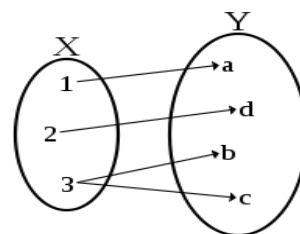
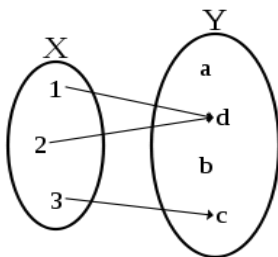
$$L = \frac{m}{15} + 10 \Rightarrow L = \frac{m+150}{15} \Rightarrow 15L = m+150 \Rightarrow m = 15L - 150$$

مقدار تابع $m = 15L - 150$ $L = 40$ $m = 15 \cdot (40) - 150 \Rightarrow m = 450$

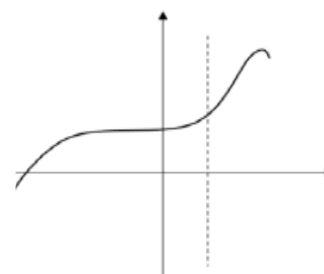
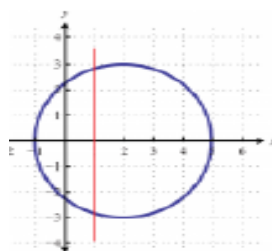
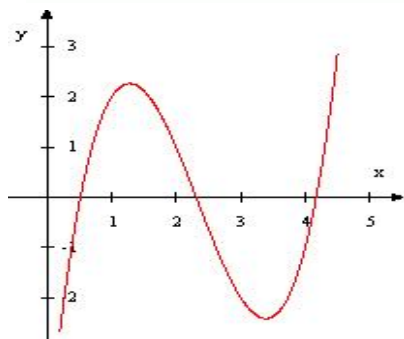
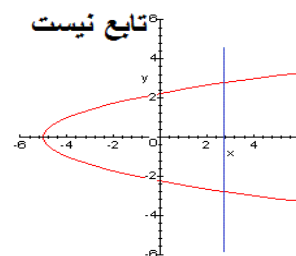
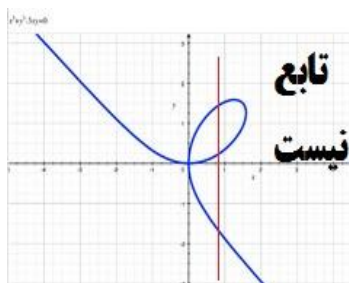
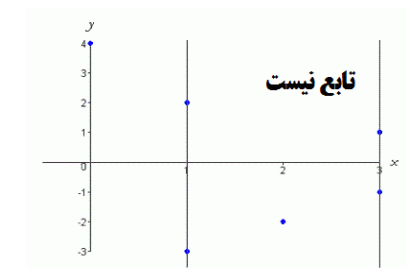
تعریف تابع: یک رابطه دوتایی روی دو مجموعه است که هر عنصر در مجموعه اول (دامنه D_f) را دقیقاً به یک عنصر در مجموعه دوم (برد R_f) مرتبط می‌کند با ضابطه یا قانون $f(x) = y$ مرتبط میکند. در مثال جرم متصل به فنر ازای هر طول یک جرم متصل به آن بوده است یعنی به ازای هر مقدار L در D_f یک مقدار برای m بردبست می‌آید

توجه: برای اینکه تابع باشد به ازای هر x فقط یک مقدار در y باید وجود داشته باشد

تابع نیست چون $x=3$ به دو نقطه در y یعنی b و c وصل شده تابع هست چون هر x به یک y متصل شده است و
اینکه چند x به یک y متصل شود باز تابع هست



تشخیص تابع از روی نمودار: کافی است خطی به موازات محور $f(x) = y$ رسم کنیم اگر نمودار تابع را فقط در یک نقطه قطع کند تابع هست و اگر بیش از یک نقطه قطع کند تابع نیست.



تابع هست

تابع نیست

تابع هست

همانطور که میدانیم این علامتها $[\text{و} \bullet]$ و $\leq$ و $\geq$ یک مفهوم دارند یعنی آن مقدار متعلق به مجموعه هست

همانطور که میدانیم این علامتها $(\text{و} \circ)$ و $<$ و $>$ یک مفهوم دارند یعنی آن مقدار متعلق به مجموعه نیست

مثال: مجموعه جواب نامعادله $3x - 5 \geq 7$ را به صورتهای زیر نمایش دهید.

ابتدا نامعادله را حل میکنیم

$$3x - 5 \geq 7 \Rightarrow 3x \geq 7 + 5 \Rightarrow 3x \geq 12 \Rightarrow x \geq \frac{12}{3} \Rightarrow x \geq 4$$

الف) توصیف مجموعه: مجموعه اعداد بزرگتر مساوی ۴

ب) نمایش با بازه: $[4 + \infty)$ چون ۴ علامت بزرگتر مساوی دارد علامت بسته گذاشتیم و بینهایت همیشه

علامت باز است

پ) نمایش با نماد مجموعه ها: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$

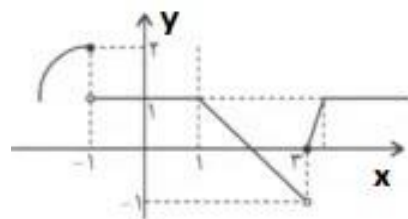


ج) نمایش روی محور اعداد: که در اینجا $a=4$ است

نکته: وقتی مقدار تابع را میخواهیم کفایت مقدار متغیر در دامنه تعریف D_f را در ضابطه تابع قرار دهیم

تست - شکل زیر نمودار تابع $y = f(x)$ را نشان می دهد. مقدار $f(2) + 3f(-1) - 2f(1)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر (سال ۱۴۰۰)



$$\bullet + (3 \times 2) - (2 \times 1) = 6 - 2 = 4 \Leftarrow$$

با توجه به شکل

گزینه ۳ صحیح است

تعیین دامنه تعریف توابع از ضابطه تابع

(۱) **توابع چند جمله ای**: این توابع به صورت $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots$ می باشند که دامنه تعریف آنها کل اعداد حقیقی میباشد

مثال: دامنه تعریف تابع $y = 5x^6 + 10x^3 - 2x + 5$ را بدست آورید.

چون تابع خطی هست بنابراین دامنه تعریف کل اعداد حقیقی است یعنی $D_f = \mathbb{R}$

(۲) دامنه تعریف **توابع کسری** کل اعداد حقیقی است بجز ریشه های مخرج یعنی مخرج را مساوی صفر قرار میدهیم و جوابهای آن را محاسبه کرده سپس از اعداد حقیقی حذف میکنیم

مثال: دامنه تعریف تابع $f(x) = \frac{3x^2 - 5x}{4x - 8}$ را بدست آورید

باید ابتدا جواب مخرج را بدست آوریم $4x - 8 = 0 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

(۳) **توابع رادیکالی بافرجه فرد**: با در نظر گرفتن دو شرط بالا محاسبه میشود به عبارتی رادیکال را در نظر نمیگیریم

مثال: دامنه تعریف تابع زیر $f(x) = \sqrt[5]{\frac{3x^2 + 8}{2x + 6}}$ را بدست آورید

چون فرجه فرد فقط باید مخرج مخالف صفر باشد $2x + 6 = 0 \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow x = \frac{-6}{2} = -3 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$

(۴) **توابع رادیکالی بافرجه زوج**: زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار میدهیم

مثال: دامنه تعریف تابع زیر $f(x) = \sqrt[6]{3x - 12}$ را بدست آورید.

چون فرجه زوج است باید عبارت زیر رادیکال بزرگتر مساوی صفر باشد

$$3x - 12 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 12 \Rightarrow x \geq \frac{12}{3} \Rightarrow x \geq 4 \Rightarrow D_f = [4, +\infty)$$

تست - برای بازه متناهی $[a, b]$ داریم $a + b = 4$ بازه $(1 - 2a, 2b + 1)$ کدام است؟

(۱) $(-1, 7)$ (۲) $(-1, 5)$ (۳) $(-3, 7)$ (۴) $(-3, 3)$ (سال ۱۴۰۰)

$$2b + 1 = 5 \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = \frac{4}{2} = 2$$

$$a + b = 4 \Rightarrow a = 4 - b \Rightarrow a = 4 - 2 = 2 \Rightarrow 1 - 2a = 1 - 2(2) = -3$$

نمونه سوال

۱- با میله ای به طول L یک مربع درست کرده ایم تابعی بنویسید که نشان دهنده مساحت مربع باشد. اگر طول میله ۸۰ سانیمتر باشد مساحت مربع چقدر میشود

۲- با میله ای به طول L یک دایره درست کرده ایم تابعی بنویسید که نشان دهنده مساحت دایره باشد. اگر طول میله ۱۲۰ سانیمتر باشد مساحت دایره چقدر میشود

۳- وزن جلد کتابی با ۲۰۰ صفحه ۴۰ گرم است اگر وزن هر ورق $\frac{1}{8}$ گرم باشد تابعی بنویسید نشان دهنده وزن کتاب بر اساس بر حسب تعداد ورق باشد. اگر کتاب ۱۵۰ صفحه باشد وزن آن چقدر است.

۴- اگر نرخ ورودیه تاکسی ۵۰۰۰ تومان باشد و به ازای هر ۲ کیلومتر ۱۵۰۰ تومان کرایه دریافت شود اگر تابعی بنویسید که نشان دهنده نرخ کرایه هر مسافر بر حسب کیلومتر باشد. اگر شخصی ۱۰ کیلومتر با این تاکسی حرکت کند چقدر کرایه باید بدهد.

۵- روی محور نشان دهید

الف) $[-2, 3]$ ب) اعداد بین ۱- تا ۲

پ) اعداد بزرگتر مساوی ۲- ج) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 3\}$

۶- اگر تابع $h(x)$ به صورت $h(x) = 3x^2 - 2x + 4$ در دامنه $[-5, 10]$ تعریف شده باشد مقادیر $h(-1)$ و $h(\frac{1}{2})$ و $h(2)$ را حساب کنید و توضیح دهید آیا $h(\sqrt{25})$ معنی دار است

۷- دامنه تعریف تابع $f(x) = \frac{3x-7}{4x-24}$ را بدست آورید.

۸- اگر تابع $f(x) = 5x^2 + a$ با دامنه $[-4, 1]$ تعریف شده باشد و $f(-1) = 10$ باشد تعیین کنید.

الف) مقدار a ب) مقدار $f(3)$ پ) آیا $F(7)$ معنی دارد

۹- اگر تابع $h(x)$ به صورت $h(x) = 2x^4 - 5x + 3$ در دامنه $[-7, 12]$ تعریف شده باشد مقادیر $h(-1)$ و $h(\frac{1}{2})$ و $h(2)$ را حساب کنید و توضیح دهید آیا $h(\sqrt{25})$ معنی دار است

۱۰- اگر تابع $f(x) = 3x^3 + a$ با دامنه $[-4, 1]$ تعریف شده باشد و $f(2) = 25$ باشد تعیین کنید.

به نام خدا

تهیه و تنظیم: علی زارعی

جزوه کنکور و درس ریاضی ۱ و ۲

انتشارات حافظ پژوه

الف) مقدار a (ب) مقدار (پ) آیا $f(\sqrt{9})$ معنی دارد

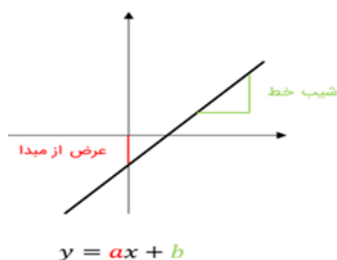
۱۱- در نمودار زیر تعیین کنید الف) دامنه تعریف (ب) جوابهای معادله (ج) آیا $f(20)$ معنی دارد

۱۲- جواب معادله را بدست آورید

ریاضی ۲ پودمان ۲

تابع خطی: فرم کلی توابع خطی به صورت $f(x) = ax + b$

تابع خطی: تابع خطی تابعی است که رابطه و نمودار آنها به صورت زیر است.



دامنه

$$y = ax + b$$

عرض از مبدا شیب برد

$$\text{شیب} = \frac{\text{تغییرات } y}{\text{تغییرات } x}$$

نکته: جهت رسم توابع خطی دو نقطه از دامنه تعریف را در تابع قرار داده و بر اساس آن تابع را رسم میکنیم

مثال ۱: تابع خطی $f(x) = -2x + 1$ را با دامنه $[-1, 3]$ را رسم کنید

$$f(x) = -2x + 1 \xrightarrow{x=-1} f(-1) = -2 * (-1) + 1 = 3$$

$$f(x) = -2x + 1 \xrightarrow{x=3} f(3) = -2 * (3) + 1 = -5$$



تست- اگر برای تابع خطی گذرنده از مبدا مختصات داشته باشیم $f(a+1) = 6, f(a) = 4$. آنگاه $f(-2/5) + f(0/5)$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۴ (۳) -۱ (۴) -۲ (سال ۱۴۰۱)

چون تابع خطی از مبدا می گذرد یعنی عرض از مبدا ندارد. بنابراین $f(x) = y = mx$

$$f(x) = y = mx \Rightarrow \begin{cases} \frac{f(a)}{f(a+1)} = \frac{ma}{m(a+1)} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{a}{(a+1)} \Rightarrow 6a = 4(a+1) \Rightarrow 6a = 4a + 4 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = mx \Rightarrow f(2) = m(2) \Rightarrow 4 = 2m \Rightarrow m = \frac{4}{2} = 2$$

$$f(-2/5) + f(0/5) = 2 \times (-2/5) + 2 \times (0/5) = -4/5 + 0 = -4/5$$

گزینه ۲ صحیح است.

تست- در تابع خطی f با ضابطه $f(x) = (a-1)x^2 + 2x - 3$ مقدار $f(a)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴) ۱ (سال ۱۴۰۲)

توجه: چون گفته شده تابع خطی ضریب x^2 برابر صفر هست.

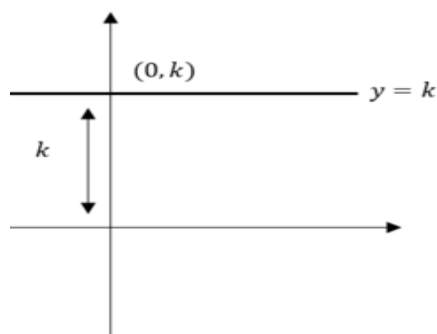
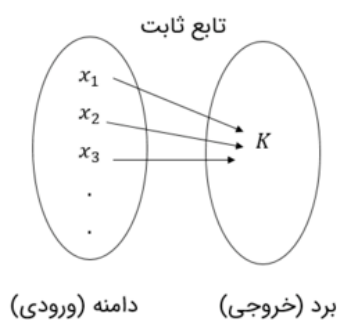
$$f(x) = (a-1)x^2 + 2x - 3 \Rightarrow a-1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$f(x) = (1-1)x^2 + 2x - 3 = 2x - 3 \xrightarrow{a=1} f(a) = (2 \times 1) - 3 = -1$$

گزینه ۳ صحیح است.

تابع ثابت: تابعی را که به ازای تمام مقادیر متغیر مقداری ثابت داشته باشد تابع ثابت گویند

به عبارتی هر چه مقدار x تغییر کند مقدار (y) تابع ثابت میماند



تست- اگر رابطه $f = \{(x, y), (1, x^2), (2, 4x-4), (y, x+2), (x+y, 4z)\}$ یک تابع ثابت باشد. حاصل جمع اعضای مجموعه دامنه تابع f کدام است؟

(سال ۱۴۰۱)

۱۴ (۴)

۱۳ (۳)

۱۶ (۲)

۱۵ (۱)

چون تابع ثابت است بنابراین باید مولفه های دوم با هم برابر باشند

$$4x-4 = x+2 \Rightarrow 4x-x = 2+4 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow 4x-4 = 4(2)-4 = 2, \quad x+2 = 2+2 = 4$$

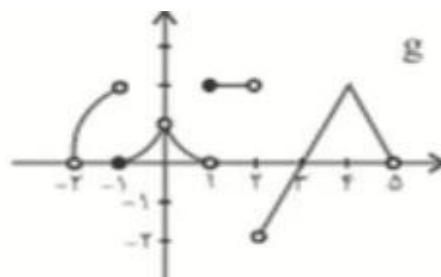
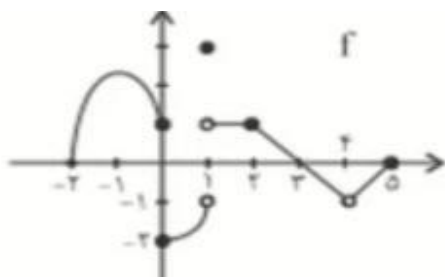
چون مولفه های دوم باید برابر باشد. بنابراین $y = 4$ است

$$f = \{(1, y=4), (1, 2^2=4), (2, 4x-4), (y=4, x+2), (2+4=6, 4z)\}$$

$$\Rightarrow 2+1+2+4+6 = 15$$

گزینه ۱ صحیح است.

- دو تابع f و g رسم شده اند. چند عضو صحیح مشترک در دامنه دو تابع وجود دارد؟



(سال ۱۴۰۳)

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

نکته: تعداد نقاط مشترک تو پر اشتراک دامنه تعریف دو تابع است.

$$\left. \begin{aligned} D_f &= [-2, -5] - \{4\} \\ D_g &= (-2, -5) - \{0, 2\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_f \cap g = \{-1, 1, 3\}$$

نوشتن معادله خط راست با داشتن مختصات دو نقطه

$$1) a = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$2) y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $A \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ و $B \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$ بگذرد

$$1) m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{11 - 5}{5 - 2} = \frac{6}{3} = 2$$

$$2) y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 5 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 4 + 5 \Rightarrow y = 2x + 1$$

سوال - برای تابع خطی $f(x) = ax + b$ و هر مقدار x داریم $f(x) - 2f(-x) = 4x$. مقدار $f(3)$ کدام است؟
(سال ۱۴۰۰)

$$4(4)$$

$$-4(3)$$

$$-3(2)$$

$$3(1)$$

طریقه نوشتن قانون $f(x) = ax^2 + bx + c$ به فرم $f(x) = k(x - q)^2 + p$:

ابتدا $\frac{b}{2a}$ را محاسبه میکنیم سپس مقدار بدست آمده را به توان ۲ رساتده و به عبارت داده اضافه و کم میکنیم و با

استفاده از اتحاد اول $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ به فرم $f(x) = k(x - q)^2 + p$ تبدیل میکنیم.

مثال: معادله $f(x) = x^2 + 8x - 2$ را به فرم $f(x) = k(x - q)^2 + p$ بنویسید.

$$a = 1, b = 8, c = -2$$

$$\frac{b}{2a} = \frac{8}{2 \cdot 1} = 4$$

$$f(x) = x^2 + 8x - 2 \Rightarrow f(x) = x^2 + 8x \pm (4)^2 - 2 = \underbrace{x^2 + 8x + 16}_{(x+4)^2} - 16 - 2 = x^2 + 8x + 16 - 18$$

$$f(x) = (x + 4)^2 - 18 \Rightarrow k = 1, q = -4, p = -18$$

مثال: معادله $f(x) = x^2 - 6x + 5$ را به فرم $f(x) = k(x - q)^2 + p$ بنویسید.

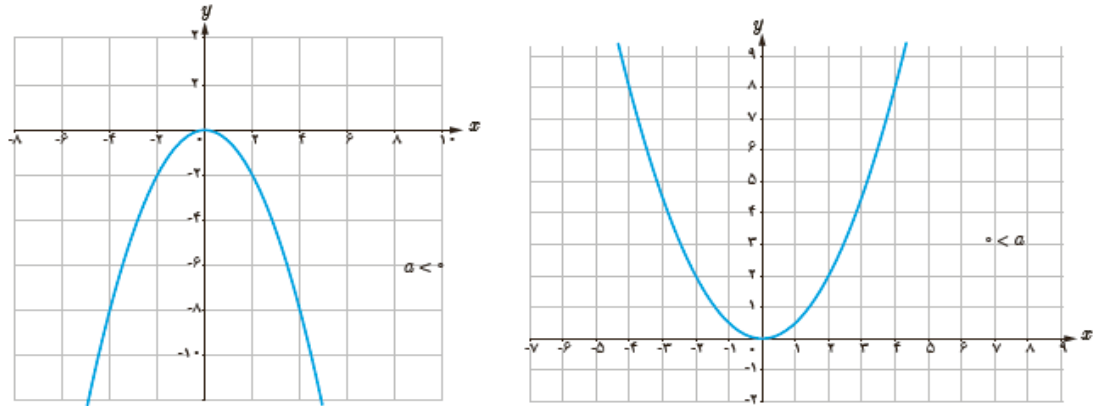
$$a = 1, b = -6, c = +5$$

$$\frac{b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot 1} = -3$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 5 \Rightarrow f(x) = x^2 - 6x \pm (-3)^2 + 5 = x^2 - 6x + 9 - 9 + 5 = x^2 - 6x + 9 - 4$$

$$f(x) = (x - 3)^2 - 4 \Rightarrow k = 1, q = 3, p = -4$$

همانگونه که میدانیم فرم کلی نمودار ax^2 به صورت زیر است



که برای رسم به روش انتقال به اندازه p روی محور y ها و به اندازه q روی محور x ها مشخص میکنیم که بر اساس ضریب x^2 یعنی k نقطه ماکزیمم یا مینیمم مشخص میشود (اگر $k > 0$ باشد نقطه $\min$ و اگر $k < 0$ باشد نقطه $\max$ است)

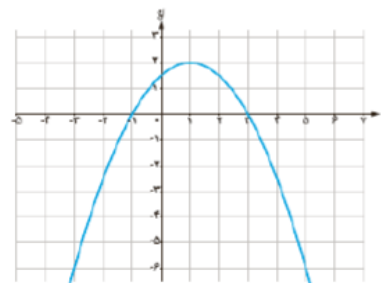
مثال ۵: نمودار تابع $y = (x-2)^2 - 1$ را رسم کنید.

$$y = (x-2)^2 - 1 \Rightarrow \begin{cases} k = +1 \\ x-2 = 0 \Rightarrow x = 2 = q \\ p = -1 \end{cases}$$



مثال ۶: نمودار تابع $y = (x-1)^2 + 2$ را رسم کنید.

$$y = -(x-1)^2 + 2 \Rightarrow \begin{cases} k = -1 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1=q \\ p = +2 \end{cases}$$



مثال: معادله $f(x) = x^2 - 6x + 10$ را به فرم $f(x) = k(x-q)^2 + p$ بنویسید. سپس نمودار آن را رسم

کنید. با استفاده از روش مربع کامل

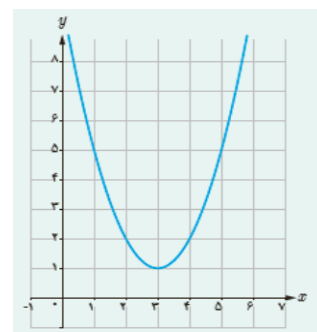
$$a=1, b=-6, c=+10$$

$$\frac{b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot 1} = -3$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 10 \Rightarrow f(x) = x^2 - 6x \pm (-3)^2 + 10 \Rightarrow$$

$$x^2 - 6x + 9 - 9 + 10 = x^2 - 6x + 9 + 1 \Rightarrow f(x) = (x-3)^2 + 1$$

$$\Rightarrow k=1, q=3, p=+1 \Rightarrow \min \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix}$$



مثال: معادله $f(x) = -x^2 + 2x - 3$ را به فرم $f(x) = k(x-q)^2 + p$ بنویسید. و نمودار آن را رسم کنید

با استفاده از روش مربع کامل ابتدا از منفی یک فاکتور می گیریم

$$f(x) = -x^2 + 2x - 3 \Rightarrow f(x) = -(x^2 - 2x) - 3$$

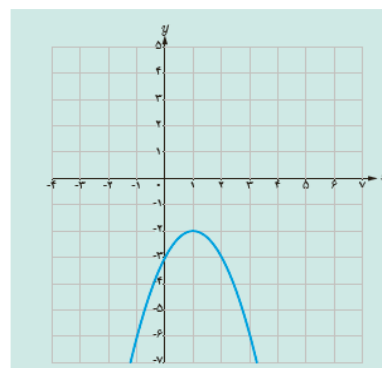
$$a=1, b=-2$$

$$\frac{b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot (1)} = -1$$

$$f(x) = -(x^2 - 2x) - 3 \Rightarrow$$

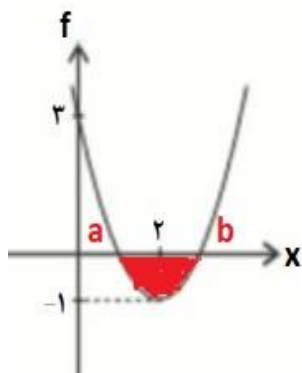
$$f(x) = -(x^2 - 2x \pm (-1)^2) - 1 = -(x^2 - 2x + 1 - 1) - 3 = -(x^2 - 2x + 1) + 1 - 3$$

$$f(x) = -(x-1)^2 - 2 \Rightarrow k=-1, q=+1, p=-2 \Rightarrow \max \begin{vmatrix} +1 \\ -2 \end{vmatrix}$$

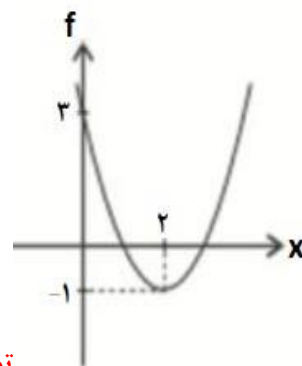


تست - نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است. اگر جواب نامعادله $f(x) < 0$ به صورت بازه (a, b) باشد. مقدار

$$b - \frac{a}{2}$$



توجه: چون کوچکتر از صفر است زیر محور x ها جواب است



$$f(x) = (x-2)^2 - 1 \xrightarrow{f(x)=0} (x-2)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 1 \Rightarrow (x-2) = \pm 1$$

$$\left. \begin{array}{l} x-2 = -1 \Rightarrow x_1 = -1+2 = 1 = a \\ x-2 = 1 \Rightarrow x_2 = 1+2 = 3 = b \end{array} \right\} \Rightarrow b - \frac{a}{2} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{6}{2} - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

گزینه ۳ صحیح است

سوال: معادله $f(x) = x^2 - 6x + 3$ را به فرم $f(x) = k(x-q)^2 + p$ بنویسید. و نمودار آن را رسم کنید

تشخیص جواب معادله از روی نمودار:

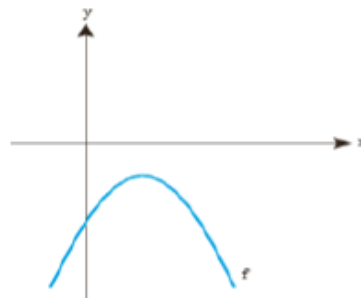
هر جا نمودار تابع $f(x) = 0$ محور x ها را قطع کند یا مماس بر محور x ها شود آن نقطه جواب معادله است

مثال ۶: نمودار معادله $-x^2 + 2x - 2 = 0$ را رسم کنید و از روی آن توضیح دهید آیا جواب دارد؟

روش محاسباتی

$$a = -1, b = 2, c = -2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(-1)(-2) = 4 - 8 = -4 < 0$$



به عبارتی چون دلتا کوچکتر از صفر است معادله جواب حقیقی ندارد

مثال ۷: ریشه معادله $y = x^3 - x^2 - x + 1$ با رسم نمودار بدست آورید

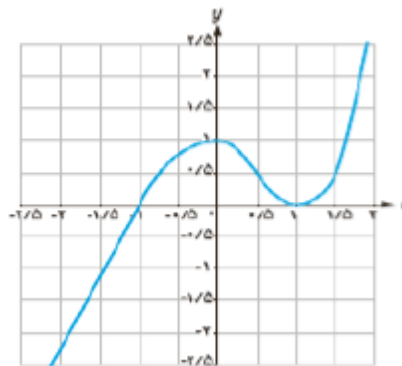
به نام خدا

جزوه کنکور و درس ریاضی ۱ و ۲

تهیه و تنظیم: علی زارعی

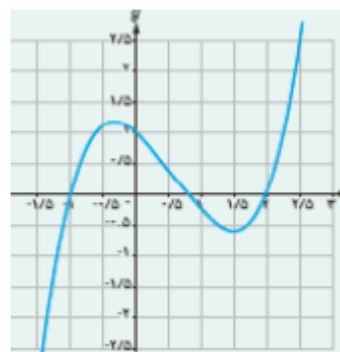
انتشارات حافظ پژوه

چون معادله درجه است حد اکثر سه جواب می تواند داشته باشد.
در نقطه $x = -1$ چون نمودار را قطع کرده یک جواب معادله است و در
نقطه $x = +1$ چون مماس شده ریشه مضاعف است بنابراین ریشه های
معادله $x = \pm 1$ است



مثال ۸: در نمودار زیر ریشه های تابع f را بدست آورید.

چون معادله درجه است حد اکثر سه جواب می تواند داشته باشد.
در نقاط $x = -1, x = +1, x = 2$ چون نمودار محور x ها را قطع کرده
ریشه های تابع f می باشد



سوال - اگر نمودار توابع f و g به صورت زیر باشد. مقدار عبارت $\frac{f(0) + 2g(2)}{g(-2) \times g(0)}$ کدام است؟ f تابع خطی و g درجه

دوم است)

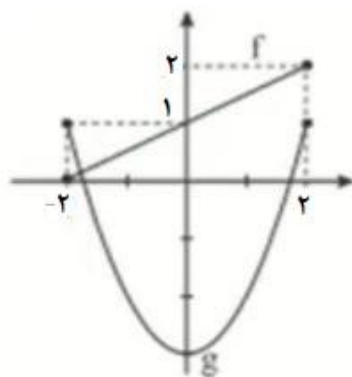
(سال ۱۴۰۲)

۱ (۴)

۱ (۳)

۲ (۲)

۲ (۱)



نامعادله ها:

برای حل نامعادله ها مجهولات را به یک طرف نامساوی آورده و مانند یک معادله معمولی حل کرده و سپس با توجه به
جهت نامساوی جواب نامعادله را تعیین میکنیم

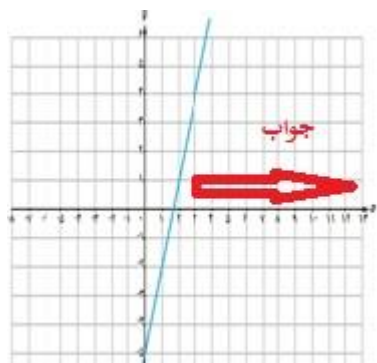
مثال ۹: نامعادله $2x - 1 \geq 4 - x$ را با رسم نمودار حل کنید

به نام خدا

جزوه کنکور و درس ریاضی ۱ و ۲

انتشارات حافظ پژوه

تهیه و تنظیم: علی زارعی



روش اول رسم نمودار: چون گفته بزرگتر از صفر نواحی مثبت را جواب در نظر بگیریم. این خط

$$2x - 1 \geq 4 - x \Rightarrow 2x + x \geq 4 + 1 \Rightarrow 3x \geq 5 \Rightarrow x \geq \frac{5}{3}$$

این خط در نقطه $x = \frac{5}{3}$ محور x ها را قطع می کند بنابراین جواب

$$\left[\frac{5}{3}, +\infty \right)$$

روش دوم: $2x - 1 \geq 4 - x \Rightarrow 2x + x \geq 4 + 1 \Rightarrow 3x \geq 5 \Rightarrow x \geq \frac{5}{3} \Rightarrow \left[\frac{5}{3}, +\infty \right)$

روش سوم: با استفاده از جدول تعیین علامت

$$\frac{5}{3}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$3x - 5$	قبل از ریشه مخالف ضریب x	بعد از ریشه موافق ضریب x
	-	+
جواب		ناحیه جواب

چون گفته بزرگتر جواب ناحیه مثبت است بنابراین ناحیه جواب $\left[\frac{5}{3}, +\infty \right)$ است

مثال نمونه: نامعادله $x^2 - 7x + 10 \leq 0$ را حل کنید.

روش رسم نمودار به روش انتقال

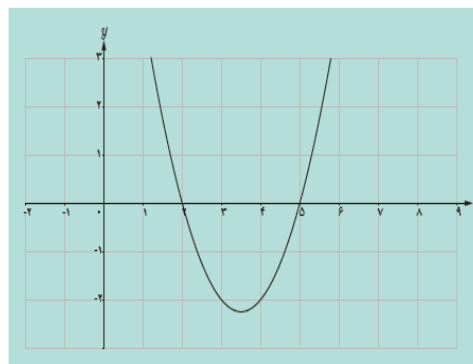
$$a = 1, b = -7, c = 10$$

$$\frac{b}{2a} = \frac{-7}{2 \cdot 1} = -3/5$$

$$f(x) = x^2 - 7x + 10 \Rightarrow f(x) = x^2 - 7x \pm (3/5)^2 - 2 \Rightarrow$$

$$x^2 - 7x + 12/25 - 12/25 + 10 = x^2 - 7x + 12/25 - 2/25$$

$$f(x) = (x - 3/5)^2 - 2/25 \Rightarrow k = 1, q = 3/5, p = -2/25$$



چون گفته کوچکتر از صفر ناحیه زیر محور x ها جواب است یعنی $[2, 5]$

روش دوم روش تعیین علامت:

$$x^2 - 7x + 10 \leq 0$$

$$a=1, b=-7, c=10$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4*(1)*(10) = 49 - 40 = 9$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2*a} = \frac{-(-7) + \sqrt{9}}{2*(1)} = \frac{7+3}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2*a} = \frac{-(-7) - \sqrt{9}}{2*(1)} = \frac{7-3}{2} = 2$$

	۲	۵	
t	$-\infty$		$+\infty$
$x^2 - 7x + 10$	کنار دو ریشه موافق ضریب x^2 +	بین دو ریشه مخالف ضریب x^2 -	کنار دو ریشه موافق ضریب x^2 +
جواب		جواب	

چون گفته کوچکتر از صفر ناحیه منفی جواب است یعنی $[2, 5]$

مثال ۱۰: نامعادله $-5t^2 + 12t + 5 \geq 2$ را حل کنید.

ابتدا مانند معادله معمولی حل میکنیم

$$-5t^2 + 12t + 5 \geq 2 \Rightarrow -5t^2 + 12t + 5 - 2 \geq 0 \Rightarrow -5t^2 + 12t + 3 \geq 0$$

$$a=-5, b=12, c=3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4*(-5)*3 = 144 + 60 = 204$$

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2*a} = \frac{-12 + \sqrt{204}}{2*(-5)} = \frac{-12 + 14.2828}{2*(-5)} = -0.23$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2*a} = \frac{-12 - \sqrt{204}}{2*(-5)} = \frac{-12 - 14.2828}{2*(-5)} = 2.63$$

	-۰/۲۳	۲/۶۳	
t	$-\infty$		$+\infty$
$-5t^2 + 12t + 3$	کنار دو ریشه موافق ضریب t^2 -	بین دو ریشه مخالف ضریب t^2 +	کنار دو ریشه موافق ضریب t^2 -
جواب		جواب	

چون گفته بزرگتر مساوی جواب ناحیه مثبت است بنابراین ناحیه جواب $[-0.23, 2.63]$ است

مثال: نمونه: نامعادله $x^2 - x \geq 6$ را به روش تعیین علامت حل کنید

$$x^2 - x \geq 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 \geq 0$$

$$a=1, b=-1, c=-6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \cdot (1)} = \frac{1+5}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \cdot (1)} = \frac{1-5}{2} = -2$$

	-۲	۳	
t	$-\infty$		$+\infty$
$x^2 - x - 6$	کنار دو ریشه موافق ضریب x^2 +	بین دو ریشه مخالف ضریب x^2 -	کنار دو ریشه موافق ضریب x^2 +
جواب	جواب		جواب

چون گفته بزرگتر جواب ناحیه مثبت است بنابراین ناحیه جواب $(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$ است

سوال: نامعادله های زیر را حل کنید

$$a) 2x - 7 \leq 5$$

$$b) x^2 - 4x - 5 \geq 0$$

(سال ۱۴۰۰)

سوال- اگر $2 < 3x + 1 < -1$ باشد بازه تغییر عبارت $x^2 + 1$ کدام است؟

$$\left(\frac{5}{9}, \frac{10}{9}\right) (۴)$$

$$\left[1, \frac{13}{9}\right) (۳)$$

$$\left(0, \frac{13}{9}\right) (۲)$$

$$\left(\frac{10}{9}, \frac{13}{9}\right) (۱)$$

لگاریتم:

استفاده از اعداد توان دار و توجه به توان آنها برای انجام محاسبات موجب پیدایش مفهومی به نام لگاریتم (Log) در ریاضی شده است. که بوسیله آن میتوان وارون تابع هایی که متغیر در توان آنها قرار دارد بدست آورد. مثلا توان

پنجم ۲ میشود ۳۲ چون $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ میگوییم لگاریتم ۳۲ در پایه ۲ میشود ۵ و مینویسیم

$$\text{Log}_2^{32} = 5$$

یادآوری روابط توان

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \Rightarrow 8^9 \times 8^{10} = 8^{9+10} = 8^{19}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \Rightarrow 5^6 \div 5^4 = 5^{6-4} = 5^2 = 25$$

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m \Rightarrow 3^6 \times 5^6 = (3 \times 5)^6 = 15^6$$

$$a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m \Rightarrow 15^8 \div 5^8 = \left(\frac{15}{5}\right)^8 = 3^8$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \Rightarrow 7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$$

$$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{نمایش اعداد به صورت رادیکالی: می دانیم است به عنوان مثال:}$$

تعریف لگاریتم: اگر a یک عدد حقیقی مثبت مخالف ۱ باشد و اعداد حقیقی bc بگونه ای باشند که: $b = a^c$ آنگاه را

لگاریتم در مبنای a می نامند و با نماد $\log_a^b$ نمایش می دهیم و می گوئیم $\log_a^b = c$

$$\log_a^b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

نکته: در حالت کلی $\log_a^b \neq \log_b^a$

$$\text{مثال: معادله} \quad \log_3^{2x-5} = 4 \quad \text{را حل کنید.}$$

$$\text{Log}_a^b = c \Leftrightarrow b = a^c \Rightarrow 2x - 5 = 3^4 \Rightarrow 2x - 5 = 81 \Rightarrow 2x = 86 \Rightarrow x = \frac{86}{2} = 43$$

$$\text{مثال: معادله} \quad \log^{4x-20} = 2 \quad \text{را حل کنید.}$$

توجه: اگر مبنا نوشته نشود یعنی مبنا ۱۰ است

$$\text{Log}_a^b = c \Leftrightarrow b = a^c \Rightarrow 4x - 20 = 10^2 \Rightarrow 4x - 20 = 100 \Rightarrow 4x = 120 \Rightarrow x = \frac{120}{4} = 30$$

مثال: معادله $3^{2x-1} = 243$ را حل کنید

$$\log_a^b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

$$3^{2x-1} = 243 \Rightarrow \log_{3^{2x-1}} = \log^{243} \Rightarrow (2x-1)\log^3 = \log^{3^5} \Rightarrow (2x-1) \times \log^3 = 5\log^3$$

$$2x-1=5 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=\frac{6}{2}=3$$

روابط مهم لگاریتم:

$$1) \log_a^a = 1 \Rightarrow \log_5^5 = 1$$

$$2) \log_a^{b^n} = n \log_a^b \Rightarrow \log_2^8 = \log_2^{2^3} = 3 \log_2^2 = 3 \times 1 = 3$$

$$3) \log^{(ab)} = \log^a + \log^b \Rightarrow \log^6 = \log^{(2 \times 3)} = \log^2 + \log^3$$

$$4) \log^{\frac{a}{b}} = \log^a - \log^b \Rightarrow \log^5 = \log^{\frac{10}{2}} = \log^{10} - \log^2 = 1 - \log^2$$

$$5) \log_a^b = \frac{\log^b}{\log^a} \Rightarrow \log_3^2 = \frac{\log^2}{\log^3}$$

$$6) \log_{a^m}^{b^n} = \frac{n}{m} \cdot \frac{\log^b}{\log^a} \Rightarrow \log_{3^8}^{2^7} = \frac{7}{8} \cdot \frac{\log^2}{\log^3}$$

$$7) a^{\text{Log}_a^n} = n \Rightarrow 7^{\text{Log}_7^4} = 4$$

فرمولهای لگاریتم

$$\log_a^a = 1 \quad \text{لگاریتم هر عدد در مبنای خودش یک میشود مثلاً} \quad \log_8^8 = 1 \quad (۱)$$

$$\log_a^{b^n} = n \log_a^b \quad \text{توان به ضریب لگاریتم تبدیل میشود} \quad (۲)$$

$$a) \log_a^{b^n} = n \log_a^b \Rightarrow \log_2^8 = \log_2^{2^3} = 3 \log_2^2 = 3 \times 1 = 3$$

$$b) \log_a^{b^n} = n \log_a^b \Rightarrow \log^{10000} = \log^{10^4} = 4 \log^{10} = 4 \times 1 = 4$$

$$c) \log_a^{b^n} = n \log_a^b \Rightarrow \log^{0/00001} = \log^{10^{-5}} = -5 \log^{10} = -5 \times 1 = -5$$

$$d) \log_a^{b^n} = n \log_a^b \Rightarrow \log_{10}^{\sqrt{10}} = \log_{10}^{10^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \log_{10}^{10} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} = 0/5$$

$$\log^{(ab)} = \log^a + \log^b \quad (۳) \text{ لگاریتم حاصلضرب به حاصل جمع تبدیل میشود.}$$

مثال: اگر $\log^2 = 0/3010$ و $\log^3 = 0/4771$ باشد $\log^6 = ?$ را محاسبه کنید.

$$\log^{(ab)} = \log^a + \log^b \Rightarrow \log^6 = \log^{(2 \times 3)} = \log^2 + \log^3 = 0/3010 + 0/4771 = 0/7781$$

در اینگونه مسائل عددی که لگاریتم آن خواسته تجزیه میکنیم به اعداد داده شده و بر مبنای آن محاسبات را انجام میدهیم

مثال: اگر $\log^2 = 0/3010$ و $\log^3 = 0/4771$ باشد $\log^{54} = ?$ را محاسبه کنید.

$$\log^{(ab)} = \log^a + \log^b \Rightarrow \log^{54} = \log^{(2 \times 27)} = \log^2 + \log^{3^3} = 0/3010 + 3 \log^3 = 0/3010 + (3 \times 0/4771) = 1/7323$$

سوال - اگر $\log 2 = a$, $\log 3 = b$ باشد. حاصل $\log 375$ کدام است؟ (سال ۱۴۰۰)

$$b - 3a + 2 \quad (۱) \quad b + 3a + 2 \quad (۲) \quad b + 3a - 2 \quad (۳) \quad 3a - b - 2 \quad (۴)$$

مثال ۶

با استفاده از این خاصیت لگاریتم، می‌توانیم بدون آنکه دو عدد را ضرب کنیم لگاریتم حاصل ضرب آنها را به دست آوریم.

$$\text{الف) } \log 100 \sqrt[5]{10} = \log (100 \times \sqrt[5]{10}) = \log 100 + \log \sqrt[5]{10} = 2 + \log 10^{\frac{1}{5}} = 2 + \frac{1}{5} = \frac{11}{5}$$

$$\text{ب) } \log 2 + \log 5 = \log (2 \times 5) = \log 10 = 1$$

$$\text{پ) } \log 125 + \log 4 + \log 2 = \log (125 \times 4 \times 2) = \log 1000 = 3$$

$$\log^{\frac{a}{b}} = \log^a - \log^b \quad (۴) \text{ لگاریتم تقسیم به لگاریتم تفاضل تبدیل میشود}$$

اگر $\log^2 = 0/3010$ باشد $\log^5 = ?$ را محاسبه کنید.

$$\log^{\frac{a}{b}} = \log^a - \log^b \Rightarrow \log^5 = \log^{\frac{10}{2}} = \log^{10} - \log^2 = 1 - \log^2 = 1 - 0/3010 = 0/699$$

مثال ۸

الف) با توجه به $\log 5 \approx 0/7$ و $\log 2 \approx 1/3$ مقدار تقریبی $\log 4$ را به دست می آوریم:

$$\log 4 = \log \frac{2^2}{5} = \log 2^2 - \log 5 \approx 0/6$$

$$\log \frac{1}{100} = \log 1 - \log 100 = 0 - 2 = -2 \quad \text{ب)}$$

مثال ۹

به کمک خواص لگاریتم، عبارت های زیر را به صورت یک لگاریتم بنویسید و در صورت امکان ساده کنید ($a, b, c > 0$):

$$\text{الف)} \quad 3 \log \sqrt[3]{5} + 2 \log \sqrt{2} = \log (\sqrt[3]{5})^3 + \log (\sqrt{2})^2 = \log 5 + \log 2 = \log (5 \times 2) = \log 10 = 1$$

$$\text{ب)} \quad \frac{1}{2} \log a + 2 \log b - 5 \log c = \log a^{\frac{1}{2}} + \log b^2 - \log c^5 = \log \frac{\sqrt{ab^2}}{c^5}$$

مثال ۱۰

عبارت های زیر را به صورت مجموع یا تفاضل چند لگاریتم بنویسید و در صورت امکان ساده کنید ($x, y, z > 0$):

$$\text{الف)} \quad \log (5^6 \times 10^3) = \log 5^6 + \log 10^3 = 6 \log 5 + 3$$

$$\text{ب)} \quad \log \frac{10x^2y^5}{z^4} = \log 10 + \log x^2 + \log y^5 - \log z^4 = 1 + 2 \log x + 5 \log y - 4 \log z$$

$$\text{۵)} \quad \log_a^b = \frac{\log^b}{\log^a} \quad \text{رابطه تغییر مبنا است در مواقعی که در یک مبنا خاص لگاریتم داده نشده باشد با استفاده از این}$$

رابطه لگاریتم در مبنا ۱۰ را بدست آورده و آن را محاسبه میکنیم

مثال: اگر $\log^2 = 0/3010$ و $\log^3 = 0/4771$ باشد $\log_3^2$ را محاسبه کنید

$$\log_a^b = \frac{\log^b}{\log^a} \Rightarrow \log_3^2 = \frac{\log^2}{\log^3} = \frac{0/3010}{0/4771} = 0/63$$

تست - ساده شده عبارت $\frac{\sqrt{2\log_2^5 + 1}}{\log 0.0005}$ کدام است؟ ($\log 2 = 0.3$)

- (۱) $-\frac{500}{3}$ (۲) $-\frac{50}{3}$ (۳) $\frac{50}{3}$ (۴) $\frac{500}{3}$ (سال ۱۳۹۸)

$$\frac{\sqrt{2\log_2^5 + 1}}{\log 0.0005} = \frac{\sqrt{2(\log_2^5 + \log_2^2)}}{\log 5 \times 10^{-4}} = \frac{\sqrt{2(\log_2^5 + \log_2^2)}}{\log 5 - 4 \log 10} = \frac{\sqrt{2(\log_2^5)}}{\log \frac{1}{2} - 4} = \frac{50}{\log 10 - \log 2 - 4} = \frac{50}{1 - 0.3 - 4} = \frac{50}{-3/3} \times \frac{10}{10} = -\frac{500}{3}$$

گزینه ۱ صحیح است.

تست - اگر $A = 1398 \times 2019$ باشد. در مورد $\log A$ کدام رابطه درست است؟

- (۱) $5 < \log A < 6$ (۲) $6 < \log A < 7$ (۳) $7 < \log A < 8$ (۴) $8 < \log A < 9$ (سال ۱۳۹۸)

$$A = 1398 \times 2019 = 2822562 = 2 / 822562 \times 10^6$$

$$\log A = \log 2 / 822562 \times 10^6 \simeq \log 2 / 82 + \log 10^6 = 6 + \log 2 / 82$$

می دانیم $0.3 < \log 2 / 82 < 0.4$ بنابراین $6 < 6 + \log 2 / 82 < 7$ یعنی گزینه ۲ صحیح است

تست - اگر $\log 2 = 0.3$ و $\log 3 = 0.4$ باشد. حاصل عبارت $6 \log_2^5 + 4 \log_3^5 - 7 \log_5^5$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۴/۷ (۳) ۵ (۴) ۵/۱ (سال ۱۳۹۹)

$$\left. \begin{aligned} \log 5 &= \log \frac{1}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0.3 = 0.7 \\ \log 50 &= \log 10 \times 5 = \log 10 + \log 5 = 1 + 0.7 = 1.7 \\ \log 500 &= \log 100 \times 5 = \log 100 + \log 5 = 2 + 0.7 = 2.7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$6 \log_2^5 + 4 \log_3^5 - 7 \log_5^5 = 6 \frac{\log 5}{\log 2} + 4 \frac{\log 50}{\log 3} - 7 \frac{\log 500}{\log 5} = 6 \left(\frac{0.7}{0.3} \right) + 4 \left(\frac{1.7}{0.4} \right) - 7 \left(\frac{2.7}{0.7} \right) = 14 + 17 - 27 = 4$$

گزینه ۱ صحیح است

تست - اگر $\log 2 = a, \log 3 = b$ باشد. حاصل $\log 375$ کدام است؟

- (۱) $b - 3a + 3$ (۲) $b + 3a + 3$ (۳) $b + 3a - 3$ (۴) $3a - b - 3$ (سال ۱۴۰۰)

$$375 = 3 \times 5^3$$

$$\log 375 = \log 3 \times 5^3 = \log 3 + \log 5^3 = \log 3 + 3 \log 5 = b + 3 \log \frac{1}{2} = b + 3(\log 10 - \log 2) \Rightarrow$$

$$b + 3(1 - a) = b + 3 - 3a = b - 3a + 3$$

تست - اگر $\log_b^a = 2, \log_c^a = 4, \log_d^a = 8$, باشد مقدار $\log_{bcd}^a$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۴ (۴) ۸ (سال ۱۴۰۱)

می دانیم $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$ است بنابر این $\log_{bcd}^a = \frac{1}{\log_a^{bcd}}$

$$\log_{bcd}^a = \frac{1}{\log_a^{bcd}} = \frac{1}{\log_a^b + \log_a^c + \log_a^d} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{1}{\frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8}} = \frac{1}{\frac{7}{8}} = \frac{8}{7}$$

گزینه ۴ صحیح است

- اگر $\log 2 = 0.301$ باشد. $\log(\frac{125}{16})$ کدام است؟ (می دانیم: $\log_x^a = \frac{a}{\log_x^b}$; $\log_x^a = \log_x^a - \log_x^b$)

- (۱) ۰/۹۳۸ (۲) ۰/۶۹۳ (۳) ۰/۸۱۵ (۴) ۰/۸۹۳ (سال ۱۴۰۲)

$$\log(\frac{125}{16}) = \frac{\log 125 - \log 16}{\log 10} = \frac{\log 5^3 - \log 2^4}{\log 10} = \frac{3 \log 5 - 4 \log 2}{1} = 3 \log 5 - 4 \log 2 \Rightarrow$$

$$3 \log 5 - 4 \log 2 = 3 \log 10 - 4 \log 2 = 3(\log 10 - \log 2) - 4 \log 2 = 3 \log 10 - 7 \log 2 = 3 \times 1 - 7 \times 0.301 = 0.893$$

گزینه ۴ صحیح است

۱۰- اگر $\log_2^n = n$ باشد. حاصل $\log_2^{\sqrt[3]{0.75}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{n-2}{3}$ (۲) $\frac{2-n}{3}$ (۳) $\frac{n-3}{2}$ (۴) $\frac{2-n}{2}$ (سال ۱۴۰۳)

$$\log_2^{\sqrt[3]{0.75}} = \log_2^{\sqrt[3]{\frac{3}{4}}} = \log_2^{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3} \log_2^{\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{3} (\log_2^3 - \log_2^4) = \frac{1}{3} (\log_2^3 - \log_2^{2^2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} (\log_2^3 - 2 \log_2^2) = \frac{1}{3} (n - 2 \log_2^2) = \frac{n-2}{3}$$

گزینه ۱ صحیح است

تقسیم باکتری (یاد آوری از پومان ۴ ریاضی ۱)

فرض کنیم جرم m_0 جرم اولیه یک نوع باکتری پس از n مرحله جرم آن به m برسد که در آن $n = \frac{t}{T}$ و t کل زمان و T زمان تقسیم باکتری باشد و a نسبتی است که باکتری افزایش یا کاهش

می یابد. در این صورت $m = m_0 \times a^n \Rightarrow m = m_0 \times a^{\frac{t}{T}}$ می یابد. در این صورت $a = 5$ در نظر گرفته میشود.

مثال: وزن یک نوع باکتری پس از یک ساعت ۵ برابر میشود وزن چهارگرم از این باکتری پس از سه ساعت چقدر میشود؟

$$m_0 = 4, T = 1h, t = 3, a = 5 \quad n = \frac{t}{T}$$

$$4 \xrightarrow{T=1} 4 \times 5^1 = 20 \xrightarrow{T=1} 20 \times 5^1 = 100 \xrightarrow{T=1} 100 \times 5^1 = 500$$

$$m = m_0 \times a^{\frac{t}{T}} \Rightarrow m = 4 \times 5^3 = 4 \times 125 = 500$$

حالا با استفاده از لگاریتم برعکس عمل میکنیم یعنی تعداد مراحل n را بدست آوریم

$$m = m_0 \times a^n \Rightarrow \frac{m}{m_0} = a^n \Rightarrow \log_a \frac{m}{m_0} = \log_a a^n \Rightarrow \log_a \frac{m}{m_0} = n \log_a a$$

$$\Rightarrow n = \log_a \frac{m}{m_0}$$

$$n = \log_a \frac{m}{m_0} \Rightarrow n = \log_2 \frac{8}{1} = \log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = 3 \times 1 = 3$$

مثال: وزن یک باکتری پس از یک ساعت دو برابر میشود پس از چند ساعت وزن آن ۸ برابر میشود.

$$m = m_0 \times a^n \Rightarrow \frac{m}{m_0} = a^n \Rightarrow \log_a \frac{m}{m_0} = \log_a a^n \Rightarrow \log_a \frac{m}{m_0} = n \log_a a \Rightarrow$$

$$n = \log_a \frac{m}{m_0}$$

$$n = \log_a \frac{m}{m_0} \Rightarrow n = \log_2 \frac{8}{1} = \log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = 3 \times 1 = 3$$

$$n = \frac{t}{T} \Rightarrow t = n.T = 3 \times 1 = 3h$$

مثال: وزن یک باکتری پس از نیم ساعت سه برابر میشود پس از چند ساعت وزن یک گرم این باکتری ۸۱ گرم میشود.

$$T = \frac{1}{2}h, t = ?, m_0 = 1, m = 81, a = 3$$

$$n = \log_a \frac{m}{m_0} \Rightarrow n = \log_3 \frac{81}{1} \Rightarrow n = \log_3 81 \Rightarrow n = \log_3 3^4 = 4 \log_3 3 = 4$$

$$n = \frac{t}{T} \Rightarrow t = n.T = 4 \times \frac{1}{2} = 2h$$

مثال: حاصل $6 + \log_2^5$ را به صورت یک عبارت لگاریتمی بنویسید.

$$6 + \log_2^5 = 6 \log_2^2 + \log_2^5 = \log_2^{2^6} + \log_2^5 = \log_2^{64} + \log_2^5 = \log_2^{(64 \times 5)} = \log_2^{320}$$

مثال: حاصل $\log_{37}^{24}$ را محاسبه کنید اگر $\log^2 = 0/3010$, $\log^3 = 0/4771$ فرض شود.

$$\log_a^b = \frac{\log b}{\log a} \Rightarrow \log_{37}^{24} = \frac{\log^{24}}{\log^{37}} = \frac{4 \log^2}{7 \log^3} = \frac{4}{7} \times \frac{\log^2}{\log^3} = \frac{4}{7} \times \frac{0/3010}{0/4771} = \frac{4}{7} \times 0/63 = 3/6$$

نکته: $\log_{b^m}^{a^n} = \frac{n \log^a}{m \log^b}$ که در مسئله قبل میتوان از این رابطه استفاده کرد

نمونه سوال پودمان ۴

(۱) حاصل عبارت لگاریتمی زیر را با استفاده از قوانین لگاریتم بدست آورید.

$$\log^5 + \log^8 + \log 75 - \log 30$$

$$\log^{\sqrt{3}} + \log^{\sqrt{50}} + \log^{\sqrt{20}} - \log^{\sqrt{30}}$$

(۲) حاصل عبارت زیر را به صورت مجموع یا تفاضل لگاریتم ها و اعداد بنویسید.

$$\log \frac{10a^5b^3}{c^8} \quad \text{الف)} \quad \log \frac{1000a^9b^8}{c^{12}.z^{25}} \quad \text{ب)}$$

(۳) اگر $\log^2 = 0/3010$ و $\log^3 = 0/4771$ باشد $\log^{72} = ?$ را محاسبه کنید.

(۴) اگر $\log^2 = 0/3010$ و $\log^3 = 0/4771$ باشد $\log^{432} = ?$ را محاسبه کنید.

(۵) معادلات زیر را حل کنید.

$$\log_2^{2x-4} = 5 \quad \text{الف)} \quad \log_3^{2x-15} = 5 \quad \text{ب)}$$

(۶) معادله $3^{2x-1} = 243$ را حل کنید

(۷) وزن یک نوع باکتری پس از بیست دقیقه ۴ برابر میشود وزن چهارگرم از این باکتری پس از چه مدت ۶۴ گرم میشود؟

(۸) وزن یک نوع باکتری پس از بیست دقیقه ۳ برابر میشود وزن این باکتری پس از چه مدت ۸۱ گرم میشود؟

(۹) جرم یک عنصر رادیو اکتیو پس از بیست دقیقه نصف میشود جرم ۱۲۸ گرم از این عنصر پس از چه مدت ۴ گرم میشود؟

(۱۰) حاصل $\log_{26}^{35}$ را محاسبه کنید اگر $\log^3 = 0/4771$ و $\log^2 = 0/3010$ فرض شود

ریاضی ۲ پودمان ۵

پارامترهای مرکزی

پارامترهای مرکزی عبارتند از: ۱- میانگین ۲- میانه و چندکها ۳- مد (نما)

۱- میانگین حسابی: حاصل جمع متغیرهای $X_1, X_2, \dots, X_n$ تقسیم بر تعداد آنها را میانگین حسابی گویند.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

میانگین نمونه میانگین جامعه

مثال: میانگین داده‌های $X_1 = 4, X_2 = 6, X_3 = 10, X_4 = 20$ را به دست آورید.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{4+6+10+20}{4} = 10$$

مثال: میانگین اعداد ۲ و ۷ و ۹ و ۱۶ و ۲۰ و ۱۲ را به دست آورید.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{2+7+9+16+20+12}{6} = 11$$

۲- میانه: مقدار صفتی است که حداقل از ۵٪ داده‌ها بزرگتر یا مساوی باشد و با M نشان می‌دهیم. برای به دست آوردن میانه ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم که دو حالت امکان دارد رخ دهد.

الف) تعداد داده‌ها فرد باشد: در این صورت عدد وسط برابر میانه است.

مثال: میانه اعداد ۲ و ۳ و ۱ و ۶ و ۸ را به دست آورید.

ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم. $1, 2, \boxed{3}, 6, 8 \Rightarrow M = 3$

ب) تعداد داده‌ها زوج باشد: در این صورت پس از مرتب کردن دو عدد وسط را جمع کرده و بخش بر ۲ می‌کنیم.

مثال: میانه اعداد ۲ و ۱۰ و ۷ و ۶ و ۴ و ۸ را به دست آورید.

۲, ۴, ۶, ۷, ۸, ۱۰

$$M = \frac{6+7}{2} = 6.5$$

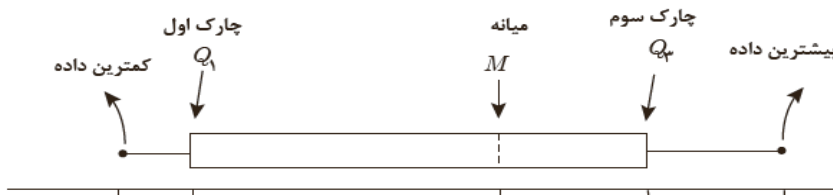
تعریف چارک اول: مقداری که ۲۵ درصد داده‌ها از آن کمتر یا مساوی باشد و با Q_1 نشان می‌دهیم که همان صدک ۲۵ ام است. ($P_{25} = Q_1$)

تعریف چارک دوم: مقداری که ۵۰ درصد داده‌ها از آن کمتر یا مساوی باشد و با Q_2 نشان می‌دهیم که همان صدک پنجاهام یا میانه است. ($P_{50} = Q_2 = Md$)

تعریف چارک سوم: مقداری که ۷۵ درصد داده‌ها از آن کمتر یا مساوی باشد و با Q_3 نشان می‌دهیم که همان صدک ۷۵ام است. ($P_{75} = Q_3$)

نکته: برای محاسبه چارک‌ها ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم و میانه را محاسبه می‌کنیم در نتیجه داده‌ها به دو قسمت تقسیم می‌شوند میانه نیمه اول (سمت چپ) می‌شود چارک اول و میانه نیمه دوم (سمت راست) می‌شود چارک سوم

نمودار جعبه‌ای:



مثال: برای اعداد ۱۰، ۱۲، ۵، ۷، ۱۶، ۱۹ و ۱۳ و ۱۱ و ۱۵ و ۱۴ و ۶ و ۸ مقادیر میانه و چارک اول و چارک سوم را بدست آورده و بر اساس آنها نمودار جعبه را رسم کنید.

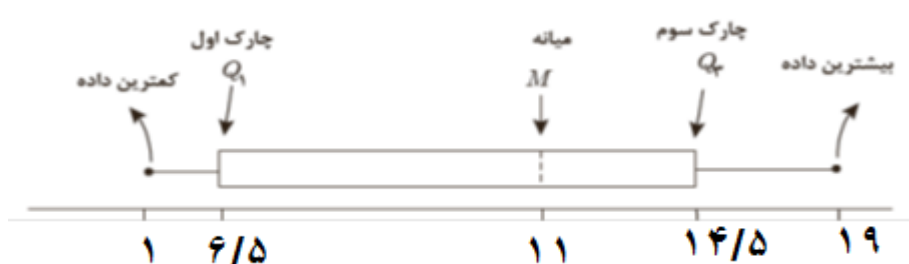
ابتدا اعداد را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم

۱-۵-۶-۷-۸-۱۰-۱۱-۱۲-۱۳-۱۴-۱۵-۱۶-۱۹

چون تعداد داده ها فرد است عدد وسط میانه است یعنی $Md = 11$

$$Q_1 = \frac{6+7}{2} = 6.5 \quad \text{حال چارک اول میانه سمت راست است}$$

$$Q_3 = \frac{14+15}{2} = 14.5 \quad \text{و چارک سوم میانه سمت راست است}$$



مد یا نما: داده ای که بیشترین تکرار را داشته باشد مد یا نما گویند

مثال: مد را برای اعداد ۲-۳-۷-۷-۹-۳-۶-۳-۲-۳-۹-۳-۱۰ را بدست آورید.

چون عدد ۳ بیشترین تکرار را دارد مد=۳ است

در نمودار جعبه ای داده های زیر اختلاف میانگین داده های داخل جعبه با میانگین کل داده ها کدام است؟

۱۰، ۱۶، ۱۷، ۲۰، ۱۵، ۱۸، ۱۶، ۱۸، ۱۶، ۱۲، ۱۷، ۱۳، ۱۷، ۱۸، ۱۵، ۱۸، ۱۶، ۱۹، ۱۴

(۱) $\bar{3} / 0$ (۲) $\bar{4} / 0$ (۳) $\bar{3} / 1$ (۴) $\bar{4} / 1$ (سال ۱۳۹۸)

ابتدا اعداد را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم.

۱۰, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۵, ۱۶, ۱۶, ۱۶, ۱۶, ۱۷, ۱۷, ۱۷, ۱۸, ۱۸, ۱۸, ۱۸, ۱۹, ۲۰

$$\bar{X}_{Q_3-Q_1} = \frac{Q_1 + md + Q_3}{9} = \frac{15 + 16 + 16 + 16 + 16 + 17 + 17 + 17 + 18}{9} = \frac{163}{9} = 16 \frac{4}{9} = 16 \frac{4}{9}$$

$$\bar{X}_{Q_3-Q_1} - md = 16 \frac{4}{9} - 16 = 0 \frac{4}{9}$$

گزینه ۲ صحیح است.

اگر میانه و میانگین داده های ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸ با هم برابر باشند. حاصل جمع چارک اول و چارک سوم داده ها کدام است؟ (سال ۱۳۹۹)

۷ (۴)

۸ (۳)

۹ (۲)

۱۰ (۱)

ابتداء اعداد را کوچک به بزرگ مرتب می کنیم. ۲, ۳, ۴, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸. چون تعداد فرد است عدد وسط میانه است بنابراین ۵, ۶, ۷, ۸ را هر جا قرار دهیم میانه ۴ بدست می آید و میانگین و میانه در این سوال با هم برابرند

$$\left. \begin{aligned} md &= 4 = \bar{x} \\ \bar{x} &= \frac{\sum x}{n} = \frac{2+3+4+4+5+6+7+8}{7} = \frac{24+a}{7} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4 = \frac{24+a}{7} \Rightarrow 24+a=28 \Rightarrow a=28-24=4$$

$$\Rightarrow 2, 3, 4, 4, 5, 6 \Rightarrow Q_1 + Q_3 = 3 + 5 = 8$$

تست - میانه داده های زیر برابر ۹ است. اگر $Q_3 - Q_1 = 5$ باشد. مقدار a کدام عدد می تواند باشد؟ (سال ۱۴۰۰)

۵, ۸, ۳, ۱۱, ۱۳, ۱۵, ۹, ۶, a

۱۳ (۴)

۸ (۳)

۱۱ (۲)

۱۲ (۱)

ابتداء اعداد را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم. ۳, ۵, ۶, ۸, ۹, ۱۱, ۱۳, ۱۵, a .
md

چون میانه ۹ است باید تعداد اعداد کمتر از ۹ و بیشتر از ۹ برابر باشد و چون تعداد اعداد کمتر از ۹ چهار عدد است باید تعداد اعداد بعد از ۹ هم ۴ تا باشد بنابراین عدد a بزرگتر از ۹ است و چون $Q_3 - Q_1 = 5$ و چارک سوم با فرض بودن عدد ۹ می شود عدد ۶ با جایگذاری در رابطه $Q_3 - 6 = 5 \Rightarrow Q_3 = 5 + 6 \Rightarrow Q_3 = 11$

گزینه ۲ صحیح است

تست - در داده های به طور صعودی مرتب شده $a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5, a+6, a+7, a+8, a+9$ میانگین داده ها با میانه داده ها برابر است. مقدار a کدام است؟

(سال ۱۴۰۱)

۵ (۴)

۴ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

$$\left. \begin{array}{l} a-2, a-1, a, a+2, a+2, a+3, a+4, a+4, 2a \\ \text{md} \\ \bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{a-2, a-1, a, a+2, a+2, a+3, a+4, a+4, 2a}{9} = \frac{10a+12}{9} \end{array} \right\} \xrightarrow{\bar{x}=\text{md}} \frac{10a+12}{9} = a+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9a+18=10a+12 \Rightarrow 10a-9a=18-12 \Rightarrow a=6$$

گزینه ۱ صحیح است

تست - در نمودار جعبه ای داده های ۹ و ۱۲ و ۱۱ و ۸ و ۱۳ و ۵ و ۱۷ میانگین داده های داخل جعبه و روی جعبه کدام است؟

- (۱) ۱۱/۴ (۲) ۱۰/۶ (۳) ۱۰/۸ (۴) ۱۱/۲ (سال ۱۴۰۲)

$$\begin{array}{c} \text{in box} \\ 5, 8, 9, 11, 12, 13, 17 \\ Q_1 \quad \text{md} \quad Q_3 \\ \text{on the box} \\ \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{8+9+11+12+13}{5} = 10/6 \end{array}$$

گزینه ۲ صحیح است

تست - در نمودار جعبه ای داده های ۹ و ۱۲ و ۱۱ و ۸ و ۱۳ و ۵ و ۱۷ میانگین داده های داخل و روی جعبه کدام است؟

- (۱) ۱۰/۶ (۲) ۱۰/۸ (۳) ۱۱/۲ (۴) ۱۱/۴ (سال ۱۴۰۳)

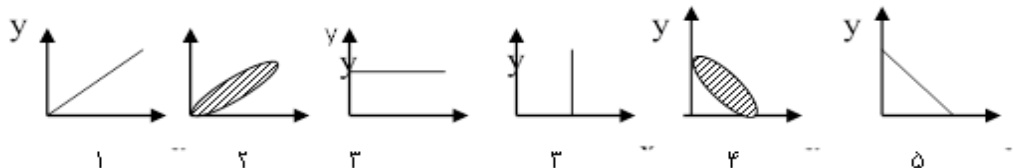
$$\begin{array}{c} 5, 8, 9, 11, 12, 13, 17 \\ Q_1 \quad \text{md} \quad Q_3 \\ \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{8+9+11+12+13}{5} = 10/6 \end{array}$$

گزینه ۱ صحیح است

ضریب همبستگی:

معیاری است برای تعیین ارتباط بین یک یا چند متغیر مستقل (x) با یک متغیر وابسته (y) در صورتی که ارتباط بین دو متغیر همسو باشد مانند قد و وزن ضریب همبستگی مثبت و در صورتی که ارتباط بین دو متغیر غیر همسو باشد مانند رابطه فشار هوا و فاصله از سطح زمین ضریب همبستگی منفی می شود. ضریب همبستگی عددی بین -۱ و +۱ است و بدون واحد است ضریب همبستگی نمونه ای را با حرف r و ضریب همبستگی جامعه را با حرف ρ نشان می دهیم.

$$|r| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq r \leq +1 \Rightarrow \begin{cases} r = +1 & \text{همبستگی خطی مستقیم کامل} \\ 0 < r < 1 & \text{همبستگی مستقیم ناقص} \\ r = 0 & \text{عدم همبستگی خطی} \\ -1 < r < 0 & \text{همبستگی معکوس ناقص} \\ r = -1 & \text{همبستگی خطی معکوس کامل} \end{cases}$$



$$S_{xy} = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$S_{xx} = \sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$S_{yy} = \sum (y_i - \bar{y})^2$$

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}$$

مثال: ضریب همبستگی بین دو متغیر x, y را تعیین کنید و نوع آن را مشخص کنید

x	۲	۴	۶	۸	۱۰	$\sum x = 30$
y	۱۵	۱۰	۵	۰	-۵	$\sum y = 25$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{25}{5} = 5$$

$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x}) * (y - \bar{y})$
$2 - 6 = -4$	$15 - 5 = 10$	$(-4)^2 = 16$	$(10)^2 = 100$	$-4 * 10 = -40$
$4 - 6 = -2$	$10 - 5 = 5$	$(-2)^2 = 4$	$(5)^2 = 25$	$-2 * 5 = -10$
$6 - 6 = 0$	$5 - 5 = 0$	$(0)^2 = 0$	$(0)^2 = 0$	$0 * 0 = 0$
$8 - 6 = 2$	$0 - 5 = -5$	$(2)^2 = 4$	$(-5)^2 = 25$	$2 * -5 = -10$

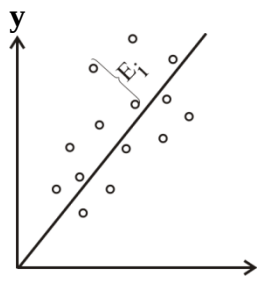
$10 - 6 = 4$	$-5 - 5 = -10$	$(4)^2 = 16$	$(-10)^2 = 100$	$4 * -10 = -40$
		$s_{xx} = 40$	$s_{yy} = 250$	$s_{xy} = -100$

همبستگی معکوس کامل

$$r = \frac{s_{xy}}{\sqrt{ss_x * ss_y}} = \frac{-100}{\sqrt{40 * 250}} = \frac{-100}{\sqrt{10000}} = \frac{-100}{100} = -1$$

رگرسیون:

رگرسیون به معنی بازگشت برای تعیین رابطه بین یک چند متغیر مستقل با یک متغیر وابسته است که رگرسیون خطی ساده رابطه بین مستقل و یک متغیر وابسته را بررسی می‌کنیم. پارامترهای مدل به روش کمترین مربعات (L.S) بدست می‌آید رگرسیون خطی به صورت $y_i = a + bx_i + e_i$ است که $e_i \sim N(0, \sigma_e^2)$ هستند.



x

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت برای نوشتن معادله خط رگرسیون y بر حسب x عمل می‌کنیم

$$1) \hat{b} = \frac{s_{xy}}{s_{xx}} \quad 2) \hat{a} = \bar{y} - b\bar{x} \quad 3) \hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$$

مثال: در سوال قبل معادله خط رگرسیون را بنویسید.

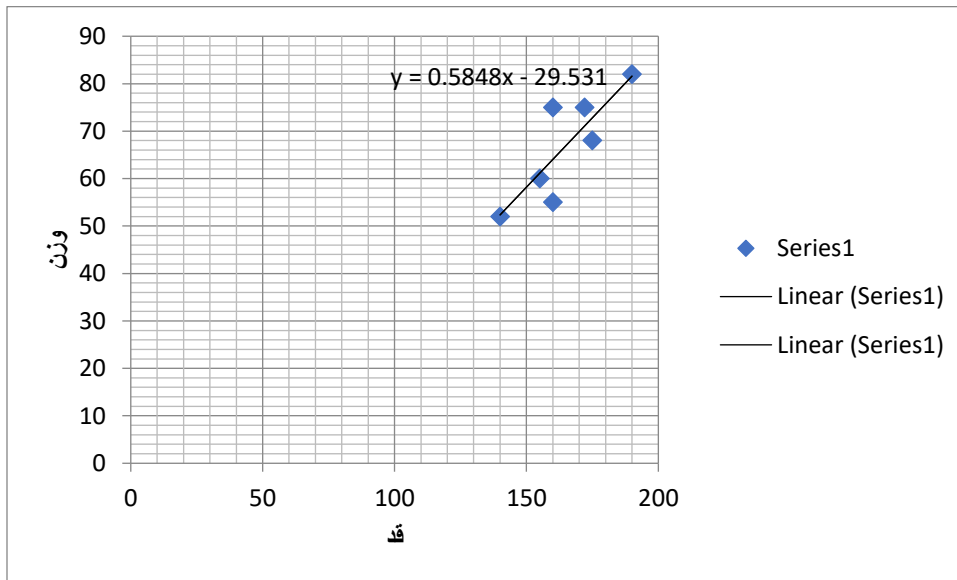
$$1) \hat{b} = \frac{s_{xy}}{s_{xx}} = \frac{-100}{40} = -2.5$$

$$2) \hat{a} = \bar{y} - b\bar{x} = 5 - (-2.5 \times 6) = 20 \quad 3) \hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x = 20 + (-2.5)x = 20 - 2.5x$$

مثال: نمودار پراکنش و خط برازش قد و وزن شش نفر اندازه گیری شده آن را رسم کنید. سپس خطا و مربع خطا را محاسبه کنید.

قد	وزن	پیش بینی وزن	خطا=وزن - پیش بینی	توان دوم خطا
۱۵۵	۶۰	۶۱.۱۱۳	-۱.۱۱۳	۱.۲۳۸۷۶۹
۱۶۰	۷۵	۶۴.۰۳۷	۱۰.۹۶۳	۱۲۰.۱۸۷۴
۱۷۵	۶۸	۷۲.۸۰۹	-۴.۸۰۹	۲۳.۱۲۶۴۸
۱۹۰	۸۲	۸۱.۵۸۱	۰.۴۱۹	۰.۱۷۵۵۶۱
۱۷۲	۷۵	۷۱.۰۵۴۶	۳.۹۴۵۴	۱۵.۵۶۶۱۸
۱۶۰	۵۵	۶۴.۰۳۷	-۹.۰۳۷	۸۱.۶۶۷۳۷
۱۴۰	۵۲	۵۲.۳۴۱	-۰.۳۴۱	۰.۱۱۶۲۸۱
			۰.۰۲۷۴	۲۴۲.۰۷۸

جمع



- سوال - در روش کمترین مجذورات (خط بهترین برازش) دلیل به دست آوردن مجموع مجذورات خطاها کدام است؟
 تست - در روش کمترین مجذورات (خط بهترین برازش) دلیل به دست آوردن مجموع مجذورات خطاها کدام است؟

(۱) مجموع مقادیر خطاها صفر است بنابراین مقدار خطای واقعی را نشان نمی دهد. (سال ۱۳۹۹)

(۲) مقادیر خطاها مثبت یا منفی هستند و مجموع مقادیر خطاها ممکن است منفی شود.

(۳) مقادیر خطاهای مثبت یا منفی هستند و مجموع مقادیر خطاها مقدار خطای واقعی را نشان نمی دهد.

(۴) محاسبه با مجموع مقادیر خطاها کاری دشوار است.

گزینه ۲ صحیح است

به نام خدا

جزوه کنکور و درس ریاضی ۱ و ۲

تهیه و تنظیم: علی زارعی

انتشارات حافظ پژوه

یک شرکت هولدینگ دارای چند شرکت می باشد. که میانگین حقوق مدیران آن هر ۵ سال یک بار اندازه گیری شده و در جدول زیر آمده است. به روش درون یابی خطی. میانگین حقوق در سال ۱۷ ام چند میلیون تومان است؟

سال	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵
میانگین حقوق به میلیون تومان	۲	۳/۵	۵	۷/۵	۱۱
(سال ۱۴۰۳)	۷(۴	۶/۵(۳	۶(۲	۵/۵(۱	

سال هفدهم بین سال ۱۵ و ۲۰ است بنابر این بر اساس این دو نقطه معادله خط می نویسیم.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7/5 - 5}{20 - 15} = \frac{2/5}{5} = \frac{1}{2}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 5 = \frac{1}{2}(x - 15) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 7/5 + 5 = y = \frac{1}{2}x - 2/5$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 2/5 \xrightarrow{x=17} y = \frac{1}{2} \times 17 - 2/5 = 8/5 - 2/5 = 6$$

گزینه ۲ صحیح است