

جلسه اول

تعریف بردار: پاره خطی که دارای مقدار و جهت باشد را بردار گویند و کمیت‌هایی که دارای این خاصیت باشد کمیت برداری

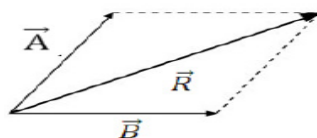
مانند نیرو - سرعت - گشتاور - میدان الکتریکی - میدان مغناطیسی و

عملیات بر روی بردارها

(۱) جمع دو بردار

الف) روش متوازی الاضلاع: در روش نقطه ای به نام **O** را به عنوان مبدا در نظر می‌گیریم و سپس همسنگ (بردار هم مقدار و هم جهت) هر یک از بردارها را رسم می‌کنیم و با آنها تشکیل یک متوازی الاضلاع می‌دهیم که قطر متوازی الاضلاع جمع دو بردار است. برآیند دو بردار **A** و **B** رابطه زیر بدست می‌آید

$$|\vec{R}| = |\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta}$$



تتا (θ) زاویه بین دو بردار است و می‌دانیم

$$\cos 0^\circ = 1, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \cos 90^\circ = 0$$

مثال: برآیند دو بردار ۳۰ نیوتن و ۴۰ نیوتن را در حالت‌های زیر بدست آورید.

(a) دو بردار هم راستا باشند

(b) دو بردار بر هم عمود باشند

(c) دو بردار با هم زاویه ۶۰ درجه داشته باشند

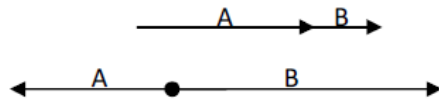
$$a) |\vec{R}| = |\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta} = \sqrt{30^2 + 40^2 + 2 \cdot 30 \cdot 40 \cdot \cos 0^\circ} = \sqrt{900 + 1600 + 2400 \cdot 1} = \sqrt{4900} = 70$$

$$b) |\vec{R}| = |\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta} = \sqrt{30^2 + 40^2 + 2 \cdot 30 \cdot 40 \cdot \cos 90^\circ} = \sqrt{900 + 1600 + 2400 \cdot 0} = \sqrt{2500} = 50$$

$$c) |\vec{R}| = |\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta} = \sqrt{30^2 + 40^2 + 2 \cdot 30 \cdot 40 \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{900 + 1600 + 2400 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2500 + 1200} = \sqrt{3700} = 60.82$$

چند حالت خاص برای بردار برآیند:



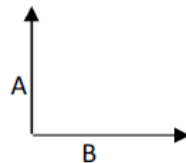
۱. دو بردار هم جهت باشند $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$

۲. دو بردار خلاف جهت باشند $\vec{R} = \vec{B} - \vec{A}$

بردار کوچکتر از بردار بزرگتر کسر می گردد.

۳. دو بردار عمود باشند.

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}$$



مثال: برآیند دو بردار ۶ نیوتن و ۸ نیوتن را در حالتی زیر بدست آورید.

(a) دو بردار هم راستا باشند

(b) دو بردار خلاف جهت هم باشند

(c) دو بردار بر هم عمود باشند

$$a) R = |\vec{A} + \vec{B}| = A + B = 8 + 6 = 14$$

$$b) R = |\vec{A} - \vec{B}| = A - B = 8 - 6 = 2$$

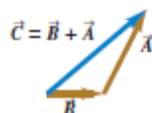
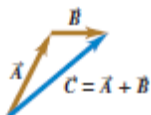
$$c) R = |\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

ب) روش مثلثی: از این روش برای جمع دو یا چند بردار استفاده میشود که نقطه ای به نام O به عنوان مبدا در

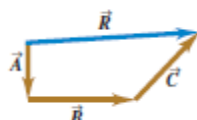
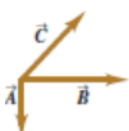
نظر گرفته میشود سپس همسنگ هر یک از بردارها را از نقطه مبدا ابتدا به انتها وصل میکنیم در این صورت

برداری که مبدا را به انتهای بردار آخر وصل می کند برآیند بردارها میشود برای مثال جمع دو بردار A و B

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$



جمع سه بردار A و B و C طبق جهتهای مشخص شده

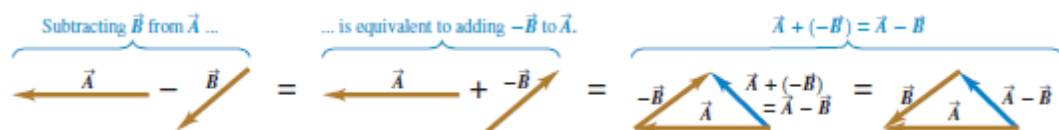


قرینه بردار: بردار هم راستا و هم مقدار با بردار مورد نظر که با آن زاویه 180° درجه بسازد قرینه بردار A را با $-A$ نشان می دهیم

تفاضل دو بردار:

برای تفاضل دو بردار مانند جمع دو بردار عمل میکنیم با این تفاوت که بردار با علامت منفی قرینه اش را رسم میکنیم

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \quad \text{به عنوان مثال}$$



مقدار عددی تفاضل دو بردار از رابطه $|\vec{R}| = |\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta}$ بدست می آید.

مثال: تفاضل دو بردار 30 نیوتن و 60 نیوتن که با یکدیگر زاویه 60° درجه ساخته اند را بدست آورید.

$$|\vec{R}| = |\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta} = \sqrt{30^2 + 60^2 - 2 \cdot 30 \cdot 60 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{2700} = 51.96$$

نکته ۱: جمع و تفریق دو بردار در صورتیکه دو بردار بر هم عمود بر هم باشند با هم برابر هستند.

$$R = |\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

نکته ۲: جمع و تفریق دو بردار بین جمع و تفریق اسکالر (عددی) آنها قرار دارد یعنی $a - b \leq R \leq a + b$

مثال: برآیند دو بردار 30 نیوتن و 40 نیوتن در چه محدوده ای قرار میگیرد

$$a - b \leq R \leq a + b \Rightarrow 40 - 30 \leq R \leq 40 + 30 \Rightarrow 10 \leq R \leq 70$$

سوال: ثابت کنید برآیند دو بردار مساوی که با یکدیگر 120° درجه ساخته اند برابر طول یکی از بردارها است

$$A = B$$

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta} = \sqrt{A^2 + A^2 + 2AA \cos \theta} = \sqrt{2A^2 + 2A^2 \cos \theta} = \sqrt{2A^2(1 + \cos^2 \theta)} \\ &= \sqrt{2A^2(2 \cos^2 \frac{\theta}{2})} = 2A \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

بنابر این جمع دو بردار مساوی از رابطه $R = 2A \cos \frac{\theta}{2}$ در نتیجه داریم

$$R = 2A \cos \frac{\theta}{2} = 2 \cdot A \cdot \cos \frac{120}{2} = 2A \cos 60 = 2 \cdot A \cdot \frac{1}{2} = A$$

$$\Rightarrow R = A$$

سوال: رابطه تفاضل دو بردار مساوی را بدست آورید

$$A = B$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta} = \sqrt{A^2 + A^2 - 2AA \cos \theta} = \sqrt{2A^2 - 2A^2 \cos \theta} = \sqrt{2A^2(1 - \cos^2 \theta)}$$

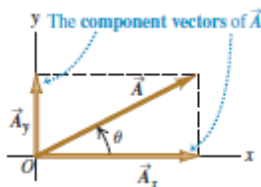
$$= \sqrt{2A^2(2 \sin^2 \frac{\theta}{2})} = 2A \sin \frac{\theta}{2}$$

بنابر این تفاضل دو بردار مساوی از رابطه $R = 2A \sin \frac{\theta}{2}$ در نتیجه داریم

مولفه های یک بردار

در صفحه یک بردار را میتوان به دو مولف در محور x ها و y ها تجزیه کرد یعنی برای بردار A میتوان چنین نوشت

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \quad \text{که} \quad \vec{A}_x \text{ مولفه محور } x \text{ ها و} \quad \vec{A}_y \text{ مولفه محور } y \text{ ها است}$$



در صورتی که زاویه بردار با محور x ها را θ بنامیم در این صورت داریم $A_x = A \cos \theta, A_y = A \sin \theta$ و

میتوان بردار A به صورت $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j}$ با مولفه های واحد نشان داد

محاسبه برآیند دو چند بردار به روش تجزیه به مولفه ها:

(۱) بردار ها را در یک دستگاه مختصات رسم و زاویه هر بردار را با محور x مشخص میکنیم در این صورت همانطور

که قبلا اشاره شد میتوان نوشت $A_x = A \cos \theta, A_y = A \sin \theta$

(۲) مولفه های هر بردار را محاسبه میکنیم

(۳) برآیند مولفه ها را در محور x ها و y ها را بدست می آوریم (در محور x ها سمت راست + و سمت چپ - و در

محور y ها بالا + و پایین -) $\sum X$ و $\sum Y$ مینامیم

(۴) برآیند کل را با استفاده از قضیه فیثاغورث بدست می آوریم

$$\vec{R} = \sum X \vec{i} + \sum Y \vec{j} \Rightarrow |\vec{R}| = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\sum Y}{\sum X}$$

مثال: برآیند سه بردار زیر را بدست آورید. و زاویه بردار برآیند با محور x ها را مشخص کنید

$$A_x = A \cos \theta_A = 100 * \cos 30 = 100 * 0.86 = 86$$

$$A_y = A \sin \theta_A = 100 * \sin 30 = 100 * 0.5 = 50$$

$$\theta_B = 90 - 30 = 60$$

$$B_x = B * \cos 60 = 80 * 0.5 = 40$$

$$B_y = B * \sin 60 = 80 * 0.86 = 68.8$$

$$C_x = C * \cos \theta_c = 40 * 0.6 = 24$$

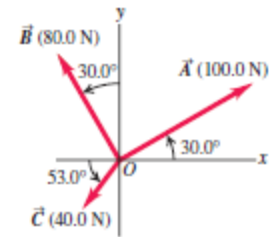
$$C_y = C * \sin \theta_c = 40 * 0.8 = 32$$

$$X = A_x - B_x - C_x = 86 - 40 - 24 = 22$$

$$Y = A_y + B_y - C_y = 50 + 68.8 - 32 = 86.8$$

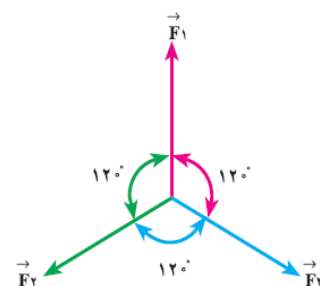
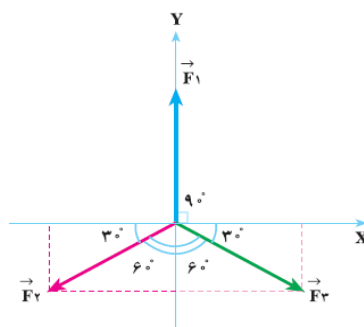
$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{22^2 + 86.8^2} = \sqrt{484 + 7534.24} = \sqrt{8018.24} = 89.54$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{Y}{X} = \tan^{-1} \frac{86.8}{22} \approx 75.5^\circ$$



مثال: نشان دهید برآیند سه بردار ۱۰ نیوتن مساوی که با یکدیگر زاویه ۱۲۰ درجه ساخته اند برابر صفر است

ابتدا بردارها رسم میکنیم و زاویه هر یک را با محور x ها مشخص میکنیم سپس مولفه را تعیین میکنیم



$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \theta_1 = F_1 \cdot \cos 90 = 10 \cdot 0 = 0$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \theta_1 = F_1 \cdot \sin 90 = 10 \cdot 1 = 10$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos \theta_2 = F_2 \cdot \cos 30 = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin \theta_2 = F_2 \cdot \sin 30 = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$$

$$F_{3x} = F_3 \cdot \cos \theta_3 = F_3 \cdot \cos 30 = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

$$F_{3y} = F_3 \cdot \sin \theta_3 = F_3 \cdot \sin 30 = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$$

$$F_x = F_{3x} - F_{2x} = 5\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = 0$$

$$F_y = F_{1y} - F_{2y} - F_{3y} = 10 - 5 - 5 = 0$$

$$R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{F_y}{F_x} = 0$$

بنابراین بر آیند سه بردار مساوی که با یکدیگر زاویه ۱۲۰ درجه داشته باشند برابر صفر میشود

فیزیک مکانیک و حرارت جلسه دوم

نمایش بردارها به صورت مولفه های واحد :

میدانیم مولفه های محور xها با حرف i و مولفه محور yها با حرف j و مولف محور zها را با حرف k نشان میدهم

یعنی به صورت $\vec{A} = \vec{A}_x \vec{i} + \vec{A}_y \vec{j} + \vec{A}_z \vec{k}$ نشان میدهم و طول بردار از رابطه $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ بدست می آید

جمع دو بردار:

در فضای دو بعدی به صورت زیر صورت میگیرد یعنی مولفه های همنام با یکدیگر جمع یا تفریق میشوند

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j}$$

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j}) + (B_x \hat{i} + B_y \hat{j})$$

$$= (A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j}$$

$$= R_x \hat{i} + R_y \hat{j}$$

در حالت کلی تر در فضای سه بعدی

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

مولفه های همنام با یکدیگر جمع یا تفریق میشوند

$$\vec{R} = (A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j} + (A_z + B_z) \hat{k}$$

$$= R_x \hat{i} + R_y \hat{j} + R_z \hat{k}$$

مثال: مقدار حاصل جمع دو بردار $\vec{A} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ ، $\vec{B} = -2\vec{i} + 3\vec{k}$ را بدست آورید.

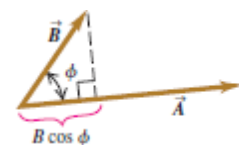
$$\vec{R} = (5 + (-2))\vec{i} + (2 + 0)\vec{j} + (3 + (-3))\vec{k} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

ضرب داخلی دو بردار:

ضرب داخلی دو بردار به صورت زیر تعریف میشود $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \phi = |A||B| \cos \phi$ که مفهوم آن

حاصلضرب مولفه یک بردار در راستای بردار دیگر است ما در اینجا مولفه بردار B را در راستای بردار A رسم کرده ایم



$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = (1)(1) \cos 0^\circ = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = (1)(1) \cos 90^\circ = 0$$

بنابر این ضرب اسکالر (نرده ای) با جایگذاری روابط بالا به صورت زیر محاسبه میشود

$$\begin{aligned}
 \vec{A} \cdot \vec{B} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\
 &= A_x \hat{i} \cdot B_x \hat{i} + A_x \hat{i} \cdot B_y \hat{j} + A_x \hat{i} \cdot B_z \hat{k} \\
 &\quad + A_y \hat{j} \cdot B_x \hat{i} + A_y \hat{j} \cdot B_y \hat{j} + A_y \hat{j} \cdot B_z \hat{k} \\
 &\quad + A_z \hat{k} \cdot B_x \hat{i} + A_z \hat{k} \cdot B_y \hat{j} + A_z \hat{k} \cdot B_z \hat{k} \\
 &= A_x B_x \hat{i} \cdot \hat{i} + A_x B_y \hat{i} \cdot \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \cdot \hat{k} \\
 &\quad + A_y B_x \hat{j} \cdot \hat{i} + A_y B_y \hat{j} \cdot \hat{j} + A_y B_z \hat{j} \cdot \hat{k} \\
 &\quad + A_z B_x \hat{k} \cdot \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \cdot \hat{j} + A_z B_z \hat{k} \cdot \hat{k}
 \end{aligned}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

طبق تعریف ضرب دو بردار $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \phi = |A||B| \cos \phi$ میتوان نتیجه گرفت

$$\cos \phi = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|A||B|} \Rightarrow \cos \phi = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{|A||B|}$$

مثال: حاصل ضرب داخلی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را بدست آورید و زاویه بین دو بردار را مشخص کنید

$$\begin{aligned}
 \vec{A} &= 2.00\hat{i} + 3.00\hat{j} + 1.00\hat{k} \\
 \vec{B} &= -4.00\hat{i} + 2.00\hat{j} - 1.00\hat{k}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{A} \cdot \vec{B} &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \\
 &= (2.00)(-4.00) + (3.00)(2.00) + (1.00)(-1.00) \\
 &= -3.00 \\
 A &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{(2.00)^2 + (3.00)^2 + (1.00)^2} \\
 &= \sqrt{14.00} \\
 B &= \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{(-4.00)^2 + (2.00)^2 + (-1.00)^2} \\
 &= \sqrt{21.00} \\
 \cos \phi &= \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{AB} = \frac{-3.00}{\sqrt{14.00} \sqrt{21.00}} = -0.175 \\
 \phi &= 100^\circ
 \end{aligned}$$

نکته ۱: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ یعنی ضرب داخلی دو بردار خاصیت جابجایی دارد

نکته ۲: اگر ضرب داخلی دو بردار صفر شود دو بردار بر هم عمود هستند

مثال: مقدار m را طوری تعیین کنید که دو بردار $\vec{A} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{B} = -2\vec{i} + m\vec{j} + 3\vec{k}$ بر هم عمود باشند

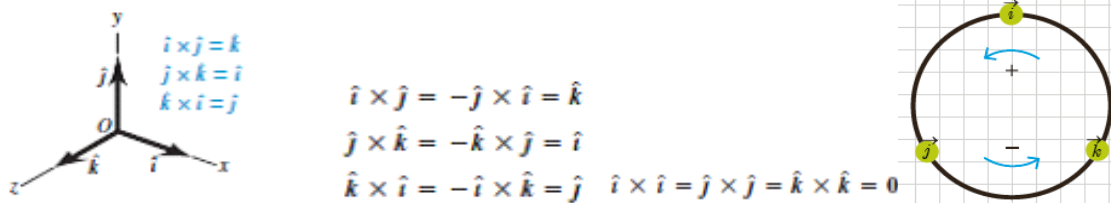
$$\begin{aligned}
 \vec{A} \cdot \vec{B} &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \Rightarrow 0 = (6 \times (-2)) + (3 \times m) + (-5 \times 3) \\
 -12 + 3m - 15 &= 0 \Rightarrow 3m = 27 \Rightarrow m = 9
 \end{aligned}$$

ضرب برداری (خارجی) دو بردار:

ضرب خارجی به صورت $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \phi$ تعریف میشود که نتیجه آن یک بردار عمود بر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ است و جهت بردار حاصل ضرب از قاعده دست راست بدست می آید. یعنی چهار انگشت دست راست راست راستای بردار اول و به سمت بردار دوم جمع شود که در اینصورت انگشت شصت دست راست جهت ضرب خارجی دو بردار را نشان میدهد. از ضرب خارجی برای محاسبه گشتاور نیروی وارد برسیم حامل جریان و نیرو محرکه تولیدی و... استفاده میشود



از ضرب خارجی برای محاسبه گشتاور نیروی وارد برسیم حامل جریان و نیرو محرکه تولیدی و... استفاده میشود
بنابراین $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ یعنی ضرب خارجی دارای خاصیت جابجایی نمیباشد
بنابراین ضرب مولفه های واحد به صورت زیر میباشد



با توجه به مطالب بالا میتوان گفت ضرب خارجی دو بردار به صورت زیر انجام میشود

$$\begin{aligned}\vec{A} &= A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \\ \vec{B} &= B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\ &= A_x \hat{i} \times B_x \hat{i} + A_x \hat{i} \times B_y \hat{j} + A_x \hat{i} \times B_z \hat{k} \\ &\quad + A_y \hat{j} \times B_x \hat{i} + A_y \hat{j} \times B_y \hat{j} + A_y \hat{j} \times B_z \hat{k} \\ &\quad + A_z \hat{k} \times B_x \hat{i} + A_z \hat{k} \times B_y \hat{j} + A_z \hat{k} \times B_z \hat{k}\end{aligned}$$

با جایگذاری روابط ضرب بردارهای یکه این ضرب به صورت زیر محاسبه میشود

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}$$

که میتوان به فرم ماتریسی نیز ضرب را بدست آورد

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} - (A_x B_z - A_z B_x) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k}$$

اگر دو بردار هم جهت باشند ضرب خارجی دو بردار صفر میشود

مثال: حاصل ضرب برداری دو بردار $\vec{A} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{B} = -2\vec{i} + 3\vec{k}$ را بدست آورید.

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (2 \times 0 - (-3 \times 3)) \vec{i} - (5 \times 0 - (-2 \times -3)) \vec{j} + (5 \times 3 - (2 \times -2)) \vec{k} \\ &= 9\vec{i} - 6\vec{j} + 19\vec{k} \end{aligned}$$

فیزیک مکانیک و حرارت جلسه سوم

تعریف علم مکانیک: شاخه ای از علم فیزیک است که در مورد چگونگی حرکت (سینماتیک) و علت حرکت اجسام (دینامیک) بحث میکند

سینماتیک: شاخه ای از علم فیزیک است که در باره چگونگی حرکت اجسام بحث میکند

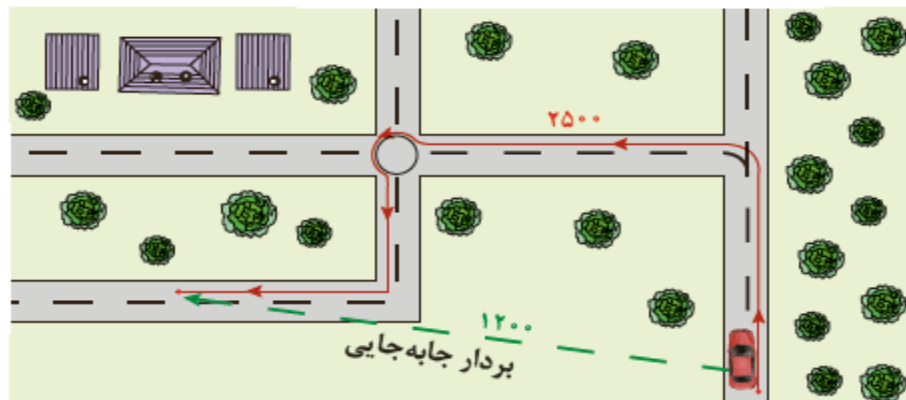
دینامیک: شاخه ای از علم فیزیک است که در باره علت حرکت اجسام بحث میکند

مسافت: به طول مسیری که توسط متحرک پیموده میشود مسافت گویند (محیط حرکت) و با حرف d نشان میدهم واحد آن در سیستم SI متر است. و کمیتی نرده ای است

جابجایی: برداری که مبداء را به مقصد متصل میکند جابجایی گویند و با حرف Δx نشان میدهم. واحد آن در

سیستم SI متر است. و کمیتی برداری است $\Delta x = x_f - x_i$

مکان (نقطه) آخر $X_f = X_2$ مکان (نقطه) اول $X_i = X_1 = X_0$



شکل ۲-۴ تفاوت بین مسافت و جابه جایی

مسیر قرمز رنگ مسافت و خط چین سبز بردار جابجایی است

بازه زمانی: مدت زمانی که طول می کشد که یک عمل (کار) انجام گیرد و با Δt نشان می دهیم و واحد در

سیستم SI ثانیه است $\Delta t = t_f - t_i$ زمان آخر (پایان) $t_f = t_2$ زمان اولیه (شروع) $t_i = t_1 = t_0$

تندی متوسط: مسافت طی شده در واحد زمان را تندی متوسط گویند و با حرف $\bar{U}$ نشان می دهیم و واحد آن در

سیستم SI $\frac{m}{s}$ است و از رابطه $\bar{U} = \frac{d}{t}$ بدست می آید و کمیتی نرده ای است.

سرعت متوسط: جابجایی در واحد زمان را سرعت متوسط گویند و با حرف $\bar{V}$ نشان می دهیم و واحد آن در

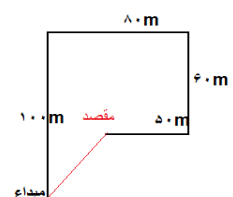
سیستم SI $\frac{m}{s}$ است و از رابطه $\bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$ بدست می آید. و کمیتی برداری است.

مثال: شخصی ۱۰۰ متر در جهت شمال ۸۰ متر در جهت شرق و ۶۰ متر در جهت جنوب و ۵۰ متر در جهت غرب در

مدت ۲۰۰ ثانیه حرکت کرده است تعیین کنید

الف) تندی ب) جابجایی پ) تندی متوسط ت) سرعت متوسط

$$d = 100 + 80 + 60 + 50 = 290m \text{ (الف)}$$



$$y = 100 - 60 = 40$$

$$x = 80 - 50 = 30 \text{ ب)}$$

$$\Delta x = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{900 + 1600} = \sqrt{2500} = 50m$$

$$\text{پ) } \bar{U} = \frac{d}{t} = \frac{290}{200} = 1/45 \frac{m}{s}$$

$$\text{ت) } \bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{50}{200} = 0/25 \frac{m}{s}$$

نکته: در صورتی که متحرک روی خط راست حرکت مسافت و جابجایی برابرند و در نتیجه تندی و سرعت برابر میشود.

مثال: شناگری طول استخری که ۱۰۰m است هنگام رفت در مدت ۲۰s و هنگام برگشت در مدت ۲۵s برگشته است تعیین کنید سرعت متوسط حرکت در حالات زیر (a) هنگام رفت (b) هنگام برگشت (c) هنگام رفت و برگشت

A: نقطه شروع **B:** نقطه پایان **توجه:** در حل مسائل یک جهت به عنوان جهت مثبت در نظر گرفته می شود

$$\begin{aligned} \text{a) } \bar{v} &= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_B - x_A}{\Delta t_1} = \frac{100 - 0}{20} = 5 \frac{m}{s} \\ \text{ب) } \bar{v} &= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_A - x_B}{\Delta t_2} = \frac{0 - 100}{25} = -4 \frac{m}{s} \text{ بنابر} \\ \text{c) } \bar{v} &= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_A - x_A}{\Delta t_3} = \frac{100 - 100}{45} = 0 \frac{m}{s} \end{aligned}$$



این اگر متحرکی از مکانی شروع به حرکت کرده و به مکان اولیه بازگردد جابجایی صفر و در نتیجه سرعت متوسط صفر میشود.

مثال: متحرکی روی محیط یک دایره به شعاع ۱۰ متر در مدت ۵۰ ثانیه به اندازه ۹۰ درجه حرکت میکند تعیین کنید الف) تندی متوسط ب) سرعت متوسط $\pi \approx 3$

$$\begin{aligned} d &= \frac{2\pi r}{4} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10}{4} = 15m \\ \text{الف) } \bar{U} &= \frac{d}{t} = \frac{15}{50} = 0/3 \frac{m}{s} \end{aligned} \quad \text{(جواب)}$$

$$\begin{aligned} \Delta x &= \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{10^2(1+1)} = 10\sqrt{2} \\ \text{ب) } \bar{V} &= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10\sqrt{2}}{50} = 0/2\sqrt{2} \frac{m}{s} \end{aligned}$$

معادله حرکت: منظور از معادله حرکت معادله ای است که مکان متحرک هر لحظه از زمان حرکت نشان میدهد

$$\bar{V} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \Rightarrow x_f - x_i = \bar{V} * (t_f - t_i) \Rightarrow x_f = \bar{V} * t + x_i$$

$$x_2 = \bar{V} * t + x_1, \quad x = \bar{V} * t + x_0$$

نکته: در حرکت یکنواخت سرعت لحظه ای و متوسط برابر هستند بنابراین میتوان نوشت یعنی $\bar{V} = V$

$$x_f = V * t + x_i, \quad x_2 = V * t + x_1, \quad x = V * t + x_0$$

مثال: متحرکی با سرعت ثابت ۲۰ متر بر ثانیه از نقطه ای به فاصله ۵۰ متر از مبدا به حرکت در می آید معادله

حرکت متحرک را بنویسید و محاسبه کنید پس از ۱۰ ثانیه متحرک در چه فاصله ای از مبدا قرار میگیرد.

$$V = \bar{V} = 20 \frac{m}{s} \quad x_0 = 50m \quad t = 10s$$

$$x = \bar{v} * t + x_0 \Rightarrow x = 20 * t + 50$$

$$x = 20 * t + 50 \Rightarrow x = 20 * 10 + 50 = 200 + 50 = 250m$$

انواع حرکت:

(۱) الف - حرکت یکنواخت: در این حرکت سرعت متحرک ثابت در این حرکت سرعت لحظه ای و متوسط برابر است

(۲) غیر یکنواخت (شتابدار)

(ب) غیر یکنواخت تند شونده: در این حرکت با گذشت زمان سرعت متحرک افزایش میابد

(پ) غیر یکنواخت کند شونده: در این حرکت با گذشت زمان سرعت متحرک کاهش میابد

الف) در این شکل، فاصله بین عکسهای مختلف و در لحظههای متفاوت ثابت باقی می ماند، پس دونه در حال دویدن با سرعت ثابت می باشد. حرکت او یکنواخت و براینند نیروهای وارده بر آن صفر است. دونه در این حالت دارای **تعداد دینامیکی** است.

ب) در این شکل، فاصله بین عکسها در طول زمان در حال افزایش است. این به آن معناست که سرعت دونه در طول زمان افزایش یافته است. این حرکت را **غیر یکنواخت و تندشونده** می نامیم.

پ) در این شکل، فاصله بین عکسها در طول زمان در حال کاهش است، به این معنا که سرعت دونه در طول زمان کاهش یافته است، این حرکت را **غیر یکنواخت و کندشونده** می نامیم.



تعریف شتاب متوسط: تغییرات بردار سرعت در واحد زمان را شتاب متوسط گویند کمیتی برداری است واحد آن

$$\frac{m}{s^2} \text{ است واز رابطه زیر بدست می آید. که در آن } v = v_2 = v_f \text{ سرعت نهایی بر حسب } \frac{m}{s} \text{ و } v_0 = v_1 = v_i$$

سرعت اولیه سرعت نهایی بر حسب $\frac{m}{s}$ و $t - t_0$ بازه زمانی که در آن تغییر سرعت رخ داده است $t = t_2 = t_f$

زمان آخر بر حسب s و $t_0 = t_1 = t_i$ زمان اولیه بر حسب s

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0}$$

مثال: متحرکی با سرعت $72 \frac{km}{h}$ در حرکت است ناگهان متوجه مانعی شده ترمز کرده پس از ۴ ثانیه می ایستد شتاب متوسط را بدست آورید.

$$v_0 = 72 \frac{km}{h} = 72 * \frac{1000m}{3600s} = 72 \div 3 / 6 = 20 \frac{m}{s}$$

$$v = 0$$

$$t = 4s$$

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - 20}{4} = -5 \frac{m}{s^2}$$

نکته: چون علامت شتاب منفی است یعنی سرعت کاهش میابد

مثال: متحرکی روی محیط دایره در مدت ۵ ثانیه به اندازه ۹۰ درجه میگردد و سرعتش از $6 \frac{m}{s}$ به $8 \frac{m}{s}$ میرسد شتاب حرکت را بدست آورید.

توجه: در حرکت دایره ای بردار سرعت مماس بر مسیر حرکت است و چون جهت بردار سرعت تغییر کرده دارای تغییرات سرعت هستیم و حرکت شتابدار است و چون ۹۰ درجه چرخیده دو بردار عمود بر هم هستند و تفاضل آنها از قضیه فیثاغورث بدست می آید.

$$v_0 = 6 \frac{m}{s}, t = 5s$$

$$v = 8 \frac{m}{s}$$

$$\Delta \vec{v} = |\vec{v} - \vec{v}_0| = \sqrt{v^2 + v_0^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 \frac{m}{s}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10}{5} = 2 \frac{m}{s^2}$$

مثال: متحرکی روی محیط دایره در مدت $\sqrt{2}$ ثانیه با سرعت ثابت $v = 5 \frac{m}{s}$ به اندازه 90° درجه می‌گردد شتاب

حرکت را بدست آورید

توجه در حرکت دایره ای بردار سرعت مماس بر مسیر حرکت است و چون جهت بردار سرعت تغییر کرده دارای تغییرات سرعت هستیم و حرکت شتابدار است هر چند مقدار سرعت ثابت است.

$$v = v_0 = 5 \frac{m}{s}, t = \sqrt{2}s$$

$$\Delta \vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0 = \sqrt{v^2 + v_0^2} = \sqrt{v^2 + v^2} = \sqrt{2 * v^2} = v \sqrt{2} \frac{m}{s} = 5\sqrt{2} \frac{m}{s}$$

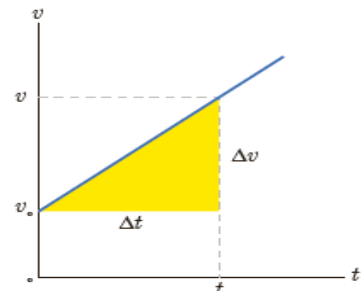
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5 \frac{m}{s^2}$$

معادله سرعت در حرکت شتابدار:

$$a = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow at = v - v_0 \Rightarrow v = at + v_0$$

V: سرعت نهایی بر حسب $\frac{m}{s}$ **v:** سرعت اولیه بر حسب $\frac{m}{s}$ **a:** شتاب بر حسب $\frac{m}{s^2}$ **t:** زمان بر حسب s

نمودار سرعت - زمان و شتاب - زمان در حرکت شتابدار با شتاب ثابت: با فرض مثبت بودن شتاب



مثال: متحرکی از حال سکون با شتاب $2 \frac{m}{s^2}$ به راه می افتد سرعت متحرک را پس از 10s بدست آورید

$$v_0 = 0 \quad v = ? \quad a = 2 \frac{m}{s^2} \quad t = 10s$$

$$v = at + v_0 = 2 * 10 + 0 = 20 \frac{m}{s}$$

مراحل محاسبه مسافت طی شده در حرکت شتابدار با شتاب ثابت:

$$1) v = at + v_0$$

$$2) \bar{v} = \frac{v + v_0}{2}$$

$$3) \Delta x = \bar{v} * t$$

$$v: \text{سرعت نهایی} \quad \frac{m}{s} \quad v_0: \text{سرعت اولیه} \quad \frac{m}{s} \quad \bar{v}: \text{سرعت متوسط} \quad \frac{m}{s}$$

$$x: \text{مسافت} \quad m \quad t: \text{زمان} \quad s \quad a: \text{شتاب} \quad \frac{m}{s^2}$$

مثال: متحرکی از حال سکون با شتاب $2 \frac{m}{s^2}$ به راه میافتد پس از ۱۰ ثانیه متحرک چه مسافتی را طی میکند.

$$v_0 = 0 \quad a = 2 \frac{m}{s^2} \quad t = 10s \quad x = ?$$

$$1) v = at + v_0 = 2 * 10 + 0 = 20 \frac{m}{s}$$

$$2) \bar{v} = \frac{v + v_0}{2} = \frac{20 + 0}{2} = 10 \frac{m}{s}$$

$$3) \Delta x = \bar{v} * t = 10 * 10 = 100m$$

دقت کنید اگر مکان اولیه یعنی x نداشته باشیم $x = \Delta x$ است

معادله حرکت شتابدار با شتاب ثابت:

سه مرحله بالا را تبدیل یک به رابطه میکنیم تا با آن مکان متحرک در هر لحظه از زمان حرکت مشخص باشد

$$1) v = at + v_0$$

$$2) \bar{v} = \frac{v + v_0}{2} = \frac{(at + v_0) + v_0}{2} = \frac{at + 2v_0}{2} = \frac{1}{2}at + v_0$$

$$3) \Delta x = \bar{v} * t = \left(\frac{1}{2}at + v_0\right) * t \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 * t$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}at^2 + v_0 * t \Rightarrow x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 * t + x_0$$

مثال: اتومبیلی از مبدا مکان از حال سکون با شتاب $4 \frac{m}{s^2}$ شروع به حرکت میکند پس از $20s$ چه مسافتی را طی میکند.

$$v_0 = 0$$

$$a = 4 \frac{m}{s^2}$$

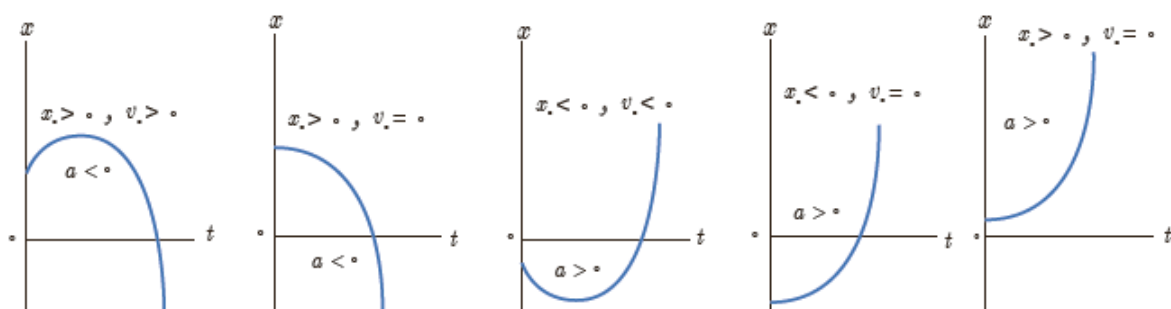
$$t = 20s$$

$$x = ?$$

$$\Delta x = x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 * t = \frac{1}{2} * 4 * 20^2 + 0 * 20 = 800m$$

نمودار مکان زمان در حرکت شتابدار با شتاب ثابت

مکان متحرک در هر لحظه از زمان نشان میدهد چون معادله حرکت نسبت به زمان درجه ۲ است بنابراین داریم شکلهای زیر امکان دارد رخ دهد



مثال:

در لحظه سبز شدن چراغ اتومبیلی با سرعت ۱۵ متر بر ثانیه از کنار چراغ عبور می کند در همین لحظه موتور پلیس با شتاب ۳ متر بر مجذور ثانیه به دنبال اتومبیل شروع به حرکت می کند تعیین کنید

(a) موتور پلیس پس از چه مدت به اتومبیل میرسد؟ (b) در این مدت چه مسافتی طی کرده اند؟

(c) در لحظه رسیدن به یکدیگر سرعت موتور و اتومبیل چند است؟

(d) نمودار مکان زمان را رسم کنید.



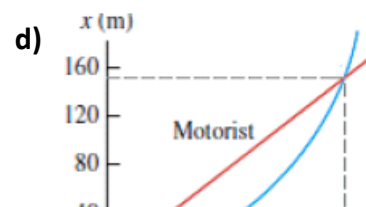
$$a) \Delta x_1 = \Delta x_2 \Rightarrow \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + v_{1i} * t_1 = \frac{1}{2} a_2 t_2^2 + v_{2i} * t_2 \Rightarrow \frac{1}{2} * 0 * t^2 + 15 * t = \frac{1}{2} * 3 * t^2 + 0 * t$$

$$\Rightarrow 30t = 3t^2 \Rightarrow 3t^2 - 30t = 0 \Rightarrow 3t(t - 10) = 0 \Rightarrow t - 10 = 0 \Rightarrow t_1 = 10, t_2 = 0$$

$$b) x_1 = x_2 = \frac{1}{2} a_2 t_2^2 + v_{2i} * t_2 = \frac{1}{2} * 3 * 10^2 + 0 * 10 = 150m$$

$$c) v_1 = a_1 t + v_{0i} = 0 * 10 + 15 = 15 \frac{m}{s}$$

$$v_2 = a_2 t + v_{2i} = 3 * 10 + 0 = 30 \frac{m}{s}$$



معادله مستقل از زمان:

کاربرد این معادله در حل مسائلی است زمان داده نشده باشد

$$1) a = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$2) \bar{v} = \frac{v + v_0}{2}$$

$$3) \Delta x = \bar{v} * t \Rightarrow \Delta x = \left(\frac{v + v_0}{2} \right) * \left(\frac{v - v_0}{a} \right) \Rightarrow \Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

$$\Rightarrow v^2 - v_0^2 = 2 * a * \Delta x$$

$$\frac{m}{s^2} : \text{شتاب } a \quad x : \text{مسافت } m \quad \frac{m}{s} : \text{سرعت اولیه } v_0 \quad \frac{m}{s} : \text{سرعت نهایی } v$$

مثال: اتومبیلی با سرعت $72 \frac{km}{h}$ در حرکت است ناگهان متوجه مانعی شده با شتاب $5 \frac{m}{s^2}$ ترمز کند. مسافت طی شده تا توقف کامل اتومبیل را بدست آورید.

$$v_0 = 72 \frac{km}{h} \div 3/6 = 20 \frac{m}{s}$$

$$a = -5 \frac{m}{s^2} \quad x = ?$$

$$v^2 - v_0^2 = 2 * a * \Delta x \Rightarrow 0 - 20^2 = 2 * (-5) * \Delta x \Rightarrow -400 = -10 \Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{-400}{-10} = 40m$$

مثال: اتومبیلی با سرعت $144 \frac{km}{h}$ در حرکت است ناگهان متوجه مانعی شده با شتاب $8 \frac{m}{s^2}$ ترمز میکند اگر زمان عکس العمل راننده (مدت زمانی که از لحظه دیدن مانع طول می کشد که عمل ترمز انجام شود) $0.5s$ باشد مسافت طی شده تا توقف کامل اتومبیل را بدست آورید.



چون از A تا B عمل ترمز انجام نشده است حرکت یکنواخت است و شتاب این مرحله صفر است

$$v_{0A} = 144 \frac{km}{h} \div 3/6 = 40 \frac{m}{s} = v_B$$

$$a_{BC} = -8 \frac{m}{s^2} \quad x = ?$$

$$x_{AB} = \frac{1}{2} a_{AB} t_{AB}^2 + v_{AB} t_{AB} = \frac{1}{2} * 0 * 0/5^2 + 40 * 0/5 = 20m$$

$$v_c^2 - v_{0B}^2 = 2 * a_{BC} * x_{BC} \Rightarrow 0 - 40^2 = 2 * (-8) * x_{BC} \Rightarrow -1600 = -16 x_{BC} \Rightarrow x_{BC} = \frac{-1600}{-16} = 100m$$

$$X = x_{AB} + x_{BC} = 20 + 100 = 120m$$

فیزیک مکانیک و حرارت جلسه سوم

تعریف علم مکانیک: شاخه ای از علم فیزیک است که در مورد چگونگی حرکت (سینماتیک) و علت حرکت اجسام (دینامیک) بحث میکند

سینماتیک: شاخه ای از علم فیزیک است که در باره چگونگی حرکت اجسام بحث میکند

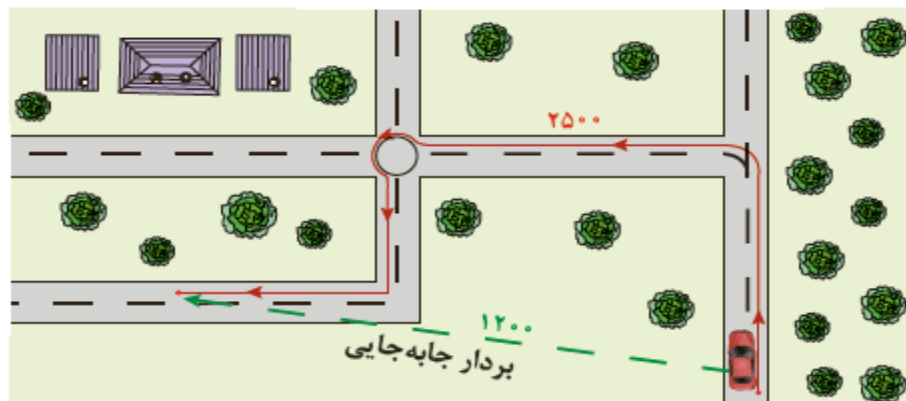
دینامیک: شاخه ای از علم فیزیک است که در باره علت حرکت اجسام بحث میکند

مسافت: به طول مسیری که توسط متحرک پیموده میشود مسافت گویند (محیط حرکت) و با حرف d نشان میدهم واحد آن در سیستم SI متر است. و کمیتی نرده ای است

جابجایی: برداری که مبداء را به مقصد متصل میکند جابجایی گویند و با حرف Δx نشان میدهم. واحد آن در

سیستم SI متر است. و کمیتی برداری است $\Delta x = x_f - x_i$

مکان (نقطه) آخر $x_f = x_2$ مکان (نقطه) اول $x_i = x_1 = x_0$



شکل ۲-۴ تفاوت بین مسافت و جابه جایی

مسیر قرمز رنگ مسافت و خط چین سبز بردار جابجایی است

بازه زمانی: مدت زمانی که طول می کشد که یک عمل (کار) انجام گیرد و با Δt نشان می دهیم و واحد در سیستم SI ثانیه است $\Delta t = t_f - t_i$ زمان آخر (پایان) $t_f = t_2$ زمان اولیه (شروع) $t_i = t_1 = t_0$

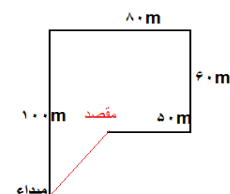
تندی متوسط: مسافت طی شده در واحد زمان را تندی متوسط گویند و با حرف $\bar{U}$ نشان می دهیم و واحد آن در سیستم SI $\frac{m}{s}$ است و از رابطه $\bar{U} = \frac{d}{t}$ بدست می آید و کمیتی نرده ای است.

سرعت متوسط: جابجایی در واحد زمان را سرعت متوسط گویند و با حرف $\bar{V}$ نشان می دهیم و واحد آن در سیستم SI $\frac{m}{s}$ است و از رابطه $\bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$ بدست می آید. و کمیتی برداری است.

مثال: شخصی ۱۰۰ متر در جهت شمال ۸۰ متر در جهت شرق و ۶۰ متر در جهت جنوب و ۵۰ متر در جهت غرب در مدت ۲۰۰ ثانیه حرکت کرده است تعیین کنید

الف) تندی ب) جابجایی پ) تندی متوسط ت) سرعت متوسط

الف) $d = 100 + 80 + 60 + 50 = 290m$



$$y = 100 - 60 = 40$$

$$\text{ب) } x = 80 - 50 = 30$$

$$\Delta x = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{900 + 1600} = \sqrt{2500} = 50m$$

$$\text{پ) } \bar{U} = \frac{d}{t} = \frac{290}{200} = 1/45 \frac{m}{s}$$

$$\text{ت) } \bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{50}{200} = 0/25 \frac{m}{s}$$

نکته: در صورتی که متحرک روی خط راست حرکت مسافت و جابجایی برابرند و در نتیجه تندی و سرعت برابر میشود.

مثال: شناگری طول استخری که ۱۰۰m است هنگام رفت در مدت ۲۰s و هنگام برگشت در مدت ۲۵s برگشته است تعیین کنید سرعت متوسط حرکت در حالات زیر (a) هنگام رفت (b) هنگام برگشت (c) هنگام رفت و برگشت

A: نقطه شروع **B:** نقطه پایان **توجه:** در حل مسائل یک جهت به عنوان جهت مثبت در نظر گرفته می شود



$$\text{a) } \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_B - x_A}{\Delta t_1} = \frac{100 - 0}{20} = 5 \frac{m}{s}$$

$$\text{ب) } \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_A - x_B}{\Delta t_2} = \frac{0 - 100}{25} = -4 \frac{m}{s}$$

$$\text{c) } \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_A - x_A}{\Delta t_3} = \frac{100 - 100}{45} = 0 \frac{m}{s}$$

این اگر متحرکی از مکانی شروع به حرکت کرده و به مکان اولیه بازگردد جابجایی صفر و در نتیجه سرعت متوسط صفر میشود.

مثال: متحرکی روی محیط یک دایره به شعاع ۱۰ متر در مدت ۵۰ ثانیه به اندازه ۹۰ درجه حرکت میکند تعیین کنید الف) تندی متوسط ب) سرعت متوسط $\pi \approx 3$

$$d = \frac{2\pi r}{4} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10}{4} = 15m$$

$$\text{الف) } \bar{U} = \frac{d}{t} = \frac{15}{50} = 0/3 \frac{m}{s} \quad \text{جواب)}$$

$$\Delta x = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{10^2(1+1)} = 10\sqrt{2}$$

$$\text{ب) } \bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10\sqrt{2}}{50} = 0/2\sqrt{2} \frac{m}{s}$$

معادله حرکت: منظور از معادله حرکت معادله ای است که مکان متحرک هر لحظه از زمان حرکت نشان میدهد

$$\bar{V} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \Rightarrow x_f - x_i = \bar{V} * (t_f - t_i) \Rightarrow x_f = \bar{V} * t + x_i$$

$$x_2 = \bar{V} * t + x_1, \quad x = \bar{V} * t + x_0$$

نکته: در حرکت یکنواخت سرعت لحظه ای و متوسط برابر هستند بنابراین میتوان نوشت یعنی $\bar{V} = V$

$$x_f = \bar{V} * t + x_i, \quad x_2 = \bar{V} * t + x_1, \quad x = \bar{V} * t + x_0$$

مثال: متحرکی با سرعت ثابت ۲۰ متر بر ثانیه از نقطه ای به فاصله ۵۰ متر از مبدا به حرکت در می آید معادله حرکت متحرک را بنویسید و محاسبه کنید پس از ۱۰ ثانیه متحرک در چه فاصله ای از مبدا قرار میگیرد.

$$V = \bar{V} = 20 \frac{m}{s} \quad x_0 = 50m \quad t = 10s$$

$$x = \bar{v} * t + x_0 \Rightarrow x = 20 * t + 50$$

$$x = 20 * t + 50 \Rightarrow x = 20 * 10 + 50 = 200 + 50 = 250m$$

انواع حرکت:

(۱) الف - حرکت یکنواخت: در این حرکت سرعت متحرک ثابت در این حرکت سرعت لحظه ای و متوسط برابر است

(۲) غیر یکنواخت (شتابدار)

(ب) غیر یکنواخت تند شونده: در این حرکت با گذشت زمان سرعت متحرک افزایش میابد

(پ) غیر یکنواخت کند شونده: در این حرکت با گذشت زمان سرعت متحرک کاهش میابد

الف) در این شکل، فاصله بین عکسهای مختلف و در لحظههای متفاوت ثابت باقی می ماند، پس دونده در حال دویدن با سرعت ثابت می باشد. حرکت او یکنواخت و براینند نیروهای وارده بر آن صفر است. دونده در این حالت دارای **تعدادل دینامیکی** است.

ب) در این شکل، فاصله بین عکسها در طول زمان در حال افزایش است. این به آن معناست که سرعت دونده در طول زمان افزایش یافته است. این حرکت را **غیر یکنواخت و تندشونده** می نامیم.

پ) در این شکل، فاصله بین عکسها در طول زمان در حال کاهش است، به این معنا که سرعت دونده در طول زمان کاهش یافته است، این حرکت را **غیر یکنواخت و کندشونده** می نامیم.



تعریف شتاب متوسط: تغییرات بردار سرعت در واحد زمان را شتاب متوسط گویند کمیتی برداری است واحد آن

$\frac{m}{s^2}$ است و از رابطه زیر بدست می آید. که در آن $v = v_2 = v_f$ سرعت نهایی بر حسب $\frac{m}{s}$ و $v_0 = v_1 = v_i$

سرعت اولیه سرعت نهایی بر حسب $\frac{m}{s}$ و $t - t_0$ بازه زمانی که در آن تغییر سرعت رخ داده است $t = t_2 = t_f$ زمان آخر بر حسب s و $t_0 = t_1 = t_i$ زمان اولیه بر حسب s

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0}$$

مثال: متحرکی با سرعت $72 \frac{km}{h}$ در حرکت است ناگهان متوجه مانعی شده ترمز کرده پس از ۴ ثانیه می ایستد شتاب متوسط را بدست آورید.

$$v_0 = 72 \frac{km}{h} = 72 * \frac{1000m}{3600s} = 72 \div 3 / 6 = 20 \frac{m}{s}$$

$$v = 0$$

$$t = 4s$$

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - 20}{4} = -5 \frac{m}{s^2}$$

نکته: چون علامت شتاب منفی است یعنی سرعت کاهش میابد

مثال: متحرکی روی محیط دایره در مدت ۵ ثانیه به اندازه ۹۰ درجه میگردد و سرعتش از $6 \frac{m}{s}$ به $8 \frac{m}{s}$ میرسد شتاب حرکت را بدست آورید.

توجه: در حرکت دایره ای بردار سرعت مماس بر مسیر حرکت است و چون جهت بردار سرعت تغییر کرده دارای تغییرات سرعت هستیم و حرکت شتابدار است و چون ۹۰ درجه چرخیده دو بردار عمود بر هم هستند و تفاضل آنها از قضیه فیثاغورث بدست می آید.

$$v_0 = 6 \frac{m}{s}, t = 5s$$

$$v = 8 \frac{m}{s}$$

$$|\Delta \vec{v}| = |\vec{v} - \vec{v}_0| = \sqrt{v^2 + v_0^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 \frac{m}{s}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10}{5} = 2 \frac{m}{s^2}$$

مثال: متحرکی روی محیط دایره در مدت $\sqrt{2}$ ثانیه با سرعت ثابت $v = 5 \frac{m}{s}$ به اندازه 90° درجه میگردد شتاب

حرکت را بدست آورید

توجه در حرکت دایره ای بردار سرعت مماس بر مسیر حرکت است و چون جهت بردار سرعت تغییر کرده دارای تغییرات سرعت هستیم و حرکت شتابدار است هر چند مقدار سرعت ثابت است.

$$v = v_0 = 5 \frac{m}{s}, t = \sqrt{2}s$$

$$|\Delta \vec{v}| = |\vec{v} - \vec{v}_0| = \sqrt{v^2 + v_0^2} = \sqrt{v^2 + v^2} = \sqrt{2} * v^2 = v \sqrt{2} \frac{m}{s} = 5\sqrt{2} \frac{m}{s}$$

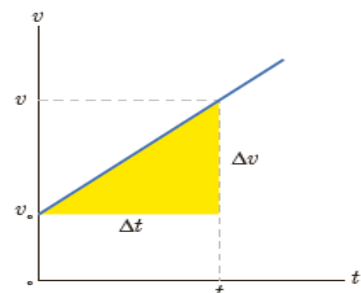
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5 \frac{m}{s^2}$$

معادله سرعت در حرکت شتابدار:

$$a = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow at = v - v_0 \Rightarrow v = at + v_0$$

V: سرعت نهایی بر حسب $\frac{m}{s}$ **v:** سرعت اولیه بر حسب $\frac{m}{s}$ **a:** شتاب بر حسب $\frac{m}{s^2}$ **t:** زمان بر حسب s

نمودار سرعت - زمان و شتاب - زمان در حرکت شتابدار با شتاب ثابت: با فرض مثبت بودن شتاب



مثال: متحرکی از حال سکون با شتاب $2 \frac{m}{s^2}$ به راه می افتد سرعت متحرک را پس از $10s$ بدست آورید

$$v_0=0 \quad v=? \quad a=2 \frac{m}{s^2} \quad t=10s$$

$$v = at + v_0 = 2*10+0=20 \frac{m}{s}$$

مراحل محاسبه مسافت طی شده در حرکت شتابدار با شتاب ثابت:

$$1) v = at + v_0$$

$$2) \bar{v} = \frac{v + v_0}{2}$$

$$3) \Delta x = \bar{v} * t$$

$$\frac{m}{s} \quad \bar{v} : \text{سرعت متوسط} \quad \frac{m}{s} \quad v_0 : \text{سرعت اولیه} \quad \frac{m}{s} \quad v : \text{سرعت نهایی}$$

$$\frac{m}{s^2} \quad a : \text{شتاب} \quad t : \text{زمان} \quad s \quad x : \text{مسافت} \quad m$$

مثال: متحرکی از حال سکون با شتاب $2 \frac{m}{s^2}$ به راه میافتد پس از 10 ثانیه متحرک چه مسافتی را طی میکند.

$$v_0=0 \quad a=2 \frac{m}{s^2} \quad t=10s \quad x=?$$

$$1) v = at + v_0 = 2*10+0=20 \frac{m}{s}$$

$$2) \bar{v} = \frac{v + v_0}{2} = \frac{20+0}{2} = 10 \frac{m}{s}$$

$$3) \Delta x = \bar{v} * t = 10*10=100m$$

دقت کنید اگر مکان اولیه یعنی x نداشته باشیم $\Delta x = x$ است

معادله حرکت شتابدار با شتاب ثابت :

سه مرحله بالا را تبدیل یک به رابطه میکنیم تا با آن مکان متحرک در هر لحظه از زمان حرکت مشخص باشد

$$1) v = at + v_0$$

$$2) \bar{v} = \frac{v + v_0}{2} = \frac{(at + v_0) + v_0}{2} = \frac{at + 2v_0}{2} = \frac{1}{2}at + v_0$$

$$3) \Delta x = \bar{v} * t = \left(\frac{1}{2}at + v_0\right) * t \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 * t$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}at^2 + v_0 * t \Rightarrow x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 * t + x_0$$

مثال: اتومبیلی از مبدا مکان از حال سکون با شتاب $4 \frac{m}{s^2}$ شروع به حرکت میکند پس از $20s$ چه مسافتی را طی میکند.

$$v_0 = 0$$

$$a = 4 \frac{m}{s^2}$$

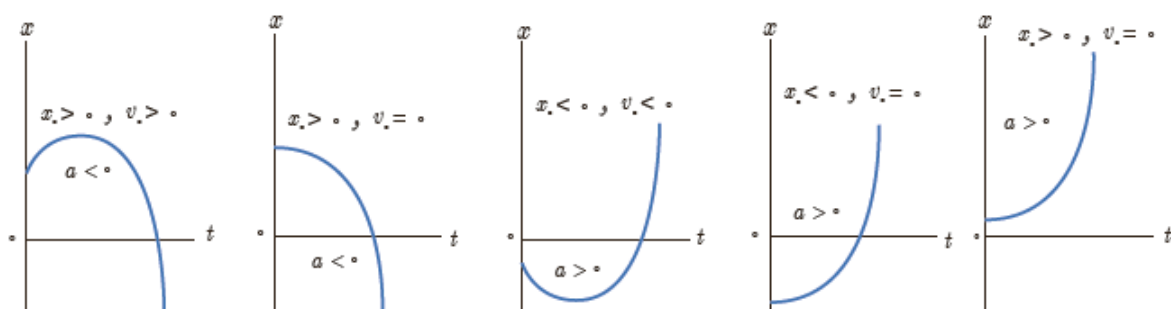
$$t = 20s$$

$$x = ?$$

$$\Delta x = x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 * t = \frac{1}{2} * 4 * 20^2 + 0 * 20 = 800m$$

نمودار مکان زمان در حرکت شتابدار با شتاب ثابت

مکان متحرک در هر لحظه از زمان نشان میدهد چون معادله حرکت نسبت به زمان درجه ۲ است بنابراین داریم شکلهای زیر امکان دارد رخ دهد



مثال:

در لحظه سبز شدن چراغ اتومبیلی با سرعت ۱۵ متر بر ثانیه از کنار چراغ عبور می کند در همین لحظه موتور پلیس با شتاب ۳ متر بر مجذور ثانیه به دنبال اتومبیل شروع به حرکت می کند تعیین کنید

(a) موتور پلیس پس از چه مدت به اتومبیل میرسد؟ (b) در این مدت چه مسافتی طی کرده اند؟

(c) در لحظه رسیدن به یکدیگر سرعت موتور و اتومبیل چند است؟

(d) نمودار مکان زمان را رسم کنید.



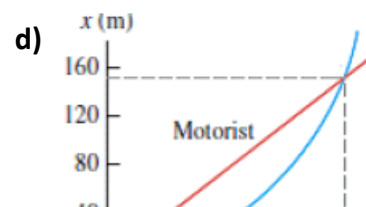
$$a) \Delta x_1 = \Delta x_2 \Rightarrow \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + v_{1i} * t_1 = \frac{1}{2} a_2 t_2^2 + v_{2i} * t_2 \Rightarrow \frac{1}{2} * 0 * t^2 + 15 * t = \frac{1}{2} * 3 * t^2 + 0 * t$$

$$\Rightarrow 30t = 3t^2 \Rightarrow 3t^2 - 30t = 0 \Rightarrow 3t(t - 10) = 0 \Rightarrow t - 10 = 0 \Rightarrow t_1 = 10, t_2 = 0$$

$$b) x_1 = x_2 = \frac{1}{2} a_2 t_2^2 + v_{2i} * t_2 = \frac{1}{2} * 3 * 10^2 + 0 * 10 = 150m$$

$$c) v_1 = a_1 t + v_{0i} = 0 * 10 + 15 = 15 \frac{m}{s}$$

$$v_2 = a_2 t + v_{2i} = 3 * 10 + 0 = 30 \frac{m}{s}$$



معادله مستقل از زمان:

کاربرد این معادله در حل مسائلی است زمان داده نشده باشد

$$1) a = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$2) \bar{v} = \frac{v + v_0}{2}$$

$$3) \Delta x = \bar{v} * t \Rightarrow \Delta x = \left(\frac{v + v_0}{2} \right) * \left(\frac{v - v_0}{a} \right) \Rightarrow \Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

$$\Rightarrow v^2 - v_0^2 = 2 * a * \Delta x$$

$$\frac{m}{s^2} : \text{شتاب } a \quad x : \text{مسافت } m \quad \frac{m}{s} : \text{سرعت اولیه } v_0 \quad \frac{m}{s} : \text{سرعت نهایی } v$$

مثال: اتومبیلی با سرعت $72 \frac{km}{h}$ در حرکت است ناگهان متوجه مانعی شده با شتاب $5 \frac{m}{s^2}$ ترمز کند. مسافت طی شده تا توقف کامل اتومبیل را بدست آورید.

$$v_0 = 72 \frac{km}{h} \div 3/6 = 20 \frac{m}{s}$$

$$a = -5 \frac{m}{s^2} \quad x = ?$$

$$v^2 - v_0^2 = 2 * a * \Delta x \Rightarrow 0 - 20^2 = 2 * (-5) * \Delta x \Rightarrow -400 = -10 \Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{-400}{-10} = 40m$$

مثال: اتومبیلی با سرعت $144 \frac{km}{h}$ در حرکت است ناگهان متوجه مانعی شده با شتاب $8 \frac{m}{s^2}$ ترمز میکند اگر زمان عکس العمل راننده (مدت زمانی که از لحظه دیدن مانع طول می کشد که عمل ترمز انجام شود) $0.5s$ باشد مسافت طی شده تا توقف کامل اتومبیل را بدست آورید.



چون از A تا B عمل ترمز انجام نشده است حرکت یکنواخت است و شتاب این مرحله صفر است

$$v_{0A} = 144 \frac{km}{h} \div 3/6 = 40 \frac{m}{s} = v_B$$

$$a_{BC} = -8 \frac{m}{s^2} \quad x = ?$$

$$x_{AB} = \frac{1}{2} a_{AB} t_{AB}^2 + v_{AB} t_{AB} = \frac{1}{2} * 0 * 0/5^2 + 40 * 0/5 = 20m$$

$$v_c^2 - v_{0B}^2 = 2 * a_{BC} * x_{BC} \Rightarrow 0 - 40^2 = 2 * (-8) * x_{BC} \Rightarrow -1600 = -16 x_{BC} \Rightarrow x_{BC} = \frac{-1600}{-16} = 100m$$

$$X = x_{AB} + x_{BC} = 20 + 100 = 120m$$

فیزیک مکانیک و حرارت جلسه چهارم

مثال: متحرکی از حال سکون با شتاب $2 \frac{m}{s^2}$ به راه می افتد پس از $10s$ با سرعت ثابت v به مدت $20s$ به حرکت

خود ادامه میدهد ناگهان متوجه مانعی شده با شتاب $4 \frac{m}{s^2}$ ترمز می کند تعیین کنید

(۲) مسافت طی شده

(۱) سرعت v

(۳) زمان توقف از لحظه دیدن مانع

(۴) نمودار سرعت زمان و شتاب زمان

$$\underline{A \quad a=2 \quad t=10 \quad B \quad a=0 \quad t=20 \quad C \quad a=0 \quad D}$$

$$v_B = a_{AB}t + v_{0A} = 2 \cdot 10 + 0 = 20 \frac{m}{s}$$

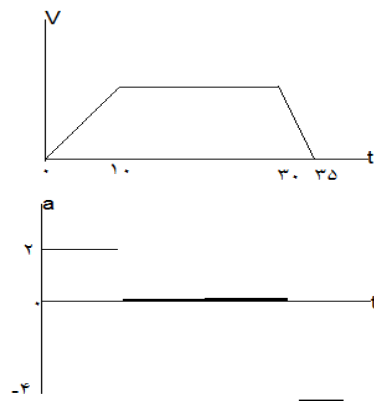
$$2) x_{AB} = \frac{1}{2} a_{AB} t_{AB}^2 + v_{0A} t_{AB} = \frac{1}{2} 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 = 100m$$

$$x_{BC} = \frac{1}{2} a_{BC} t_{BC}^2 + v_{0B} t_{BC} = \frac{1}{2} 0 \cdot 20^2 + 20 \cdot 20 = 400m$$

$$v_D^2 - v_C^2 = 2a_{DC}x_{DC} \Rightarrow 0^2 - 20^2 = 2 \cdot (-4) \cdot x_{DC} \Rightarrow x_{DC} = \frac{-400}{-8} = 50m$$

$$X = x_{AB} + x_{BC} + x_{DC} = 100 + 400 + 50 = 550m$$

$$3) a = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow t_{CD} = \frac{v_D - v_C}{a_{DC}} = \frac{0 - 20}{-4} = 5s$$



نکته ۱: مساحت زیر نمودار سرعت زمان برابر جابجایی کل میشود $\Delta x = S_{v-t}$

نکته ۲: مساحت زیر نمودار شتاب زمان برابر سرعت نهایی میشود. $v = S_{a-t}$

به عنوان مثال در مسئله قبل

$$\Delta x = S_{v-t} = \frac{35+20}{2} \cdot 20 = 550$$

نکته: در هر محور سرعت و جابجایی از روابط زیر محاسبه میشود. $v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x dt$, $x = x_0 + \int_0^t v_x dt$

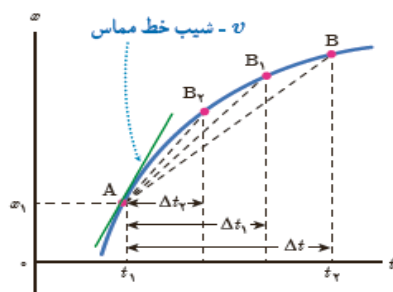
تعریف سرعت لحظه ای:

حد تغییرات سرعت متوسط وقتی تغییرات زمان به سمت صفر میل کند.

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

که این خود تعریف مشتق است بنابراین سرعت لحظه ای مشتق معادله حرکت است نسبت زمان $v = \frac{dx}{dt}$

بنابر این میتوان گفت سرعت لحظه ای شیب نمودار مکان زمان است $v = \tan \alpha$



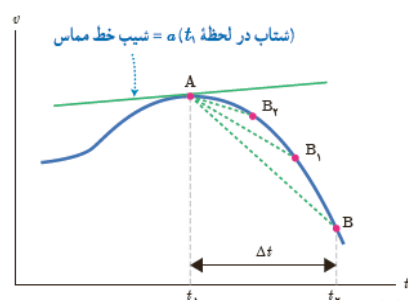
تعریف شتاب لحظه ای:

حد تغییرات شتاب متوسط وقتی تغییرات زمان به سمت صفر میل کند

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$$

که این خود تعریف مشتق است بنابراین شتاب لحظه ای مشتق معادله سرعت است نسبت زمان $a = \frac{dv}{dt}$

بنابر این میتوان گفت شتاب لحظه ای شیب نمودار سرعت زمان است $a = \tan \alpha$



تشخیص نوع حرکت:

از حاصلضرب علامت شتاب و سرعت نوع حرکت را میتوان تشخیص داد

۱- اگر $av > 0$ حرکت تند شونده

۲- اگر $av = 0$ حرکت یکنواخت

۳- اگر $av < 0$ حرکت کند شونده

مثال: معادله حرکت متحرکی به صورت $x = 5t^2 - 20t + 10$ می باشد تعیین کنید.

(۱) معادله سرعت و شتاب (۲) متحرک پس از چه مدت می ایستد

(۳) در چه لحظاتی حرکت تند شونده و در چه لحظاتی کند شونده است

$$x = 5t^2 - 20t + 10$$

$$1) v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(5t^2 - 20t + 10)}{dt} = 10t - 20 \frac{m}{s}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(10t - 20)}{dt} = 10 \frac{m}{s^2}$$

$$2) v = 0 \Rightarrow 10t - 20 = 0 \Rightarrow 10t = 20 \Rightarrow t = \frac{20}{10} = 2s$$

۳)

۱۰

t	۰	$+\infty$
$v = 10t - 20$	-	+
a	+	+
(av) نتیجه	-	+

تند شونده کند شونده

مثال: معادله حرکت متحرکی به صورت $\vec{r} = (3t^2 + 2t)\vec{i} + (-5t + 4)\vec{j} + (-2t^3 + 2t)\vec{k}$ میباشد تعیین کنید.

(۱) معادله سرعت و شتاب (۲) سرعت و شتاب در لحظه ۲s

$$r = (3t^2 + 2t)\vec{i} + (-5t + 4)\vec{j} + (-2t^3 + 2t)\vec{k}$$

$$1) \vec{v} = \frac{dr}{dt} = \frac{d(3t^2 + 2t)\vec{i} + (-5t + 4)\vec{j} + (-2t^3 + 2t)\vec{k}}{dt} = (6t + 2)\vec{i} - 5\vec{j} + (-6t^2 + 2)\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(6t + 2)\vec{i} - 5\vec{j} + (-6t^2 + 2)\vec{k}}{dt} = 6\vec{i} - 12t\vec{k}$$

$$2) \vec{v} = (6t + 2)\vec{i} - 5\vec{j} + (-6t^2 + 2)\vec{k} \xrightarrow{t=2s} \vec{v} = 14\vec{i} - 5\vec{j} - 22\vec{k} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{14^2 + (-5)^2 + (-22)^2} = 26/55 \frac{m}{s}$$

$$\vec{a} = 6\vec{i} - 12t\vec{k} \xrightarrow{t=2s} \vec{a} = 6\vec{i} - 24\vec{k} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{6^2 + (-24)^2} = 24/38 \frac{m}{s^2}$$

سقوط آزاد و پرتاب قائم:

هر گاه در شرایط خلاء جسمی را در راستای قائم به طرف بالا با سرعت اولیه V_0 پرتاب کنیم سرعت رفت برابر سرعت برگشت به مبدا و زمان رفت تا اوج برابر زمان برگشت از اوج به مبدا است ولی اگر شرایط خلاء نباشد سرعت رفت از مبدا بیشتر از سرعت برگشت به مبدا است و زمان رفت از مبدا تا اوج کمتر از زمان برگشت از اوج به مبدا است برای بدست آوردن معادلات سقوط آزاد و پرتاب قائم کفایت در معادلات حرکت شتابدار با شتاب ثابت به جای حرف x حرف h یا y و به جای a حرف g شتاب جاذبه را قرار دهیم اگر حرکت رو به بالا بود علامت g منفی و اگر رو به پایین بود علامت g مثبت است

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x = \bar{v} t \\ a = \frac{v - v_0}{t} \\ v = at + v_0 \\ \bar{v} = \frac{v + v_0}{2} \\ x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0 \\ v^2 - v_0^2 = 2ax \\ x_t = \frac{1}{2} a(2t - 1) + v_0 \end{array} \right. \xrightarrow{a \rightarrow g, x \rightarrow h} \left\{ \begin{array}{l} \Delta h = \bar{v} t \\ g = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{g} \\ v = gt + v_0 \\ \bar{v} = \frac{v + v_0}{2} \\ h = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + h_0 \\ v^2 - v_0^2 = 2gh \\ h_t = \frac{1}{2} g(2t - 1) + v_0 \end{array} \right.$$

مثال :

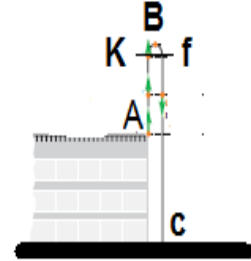
از بالای یک بلندی به ارتفاع ۲۵m سنگی را با سرعت $20 \frac{m}{s}$ به طرف بالا پرتاب میکنیم تعیین کنید.

(۱) زمان اوج (مدت زمانی که طول میکشد از مبدا تا بالاترین نقطه برسد)

(۲) ارتفاع اوج (فاصله از مبدا تا بالاترین نقطه)

۳) سرعت برخورد به زمین (۴) کل زمان حرکت

۵) در چه لحاظاتی سرعت سنگ $5 \frac{m}{s}$ است



$$1) t_{AB} = \frac{v_B - v_A}{g} = \frac{0 - 20}{-10} = 2s$$

$$2) v_B^2 - v_A^2 = 2gh_{AB} \Rightarrow 0 - 20^2 = 2 * (-10) h_{AB} \Rightarrow h_{AB} = \frac{-400}{-20} = 20$$

$$3) h_{BC} = h. + h_{AB} = 25 + 20 = 45$$

$$v_c^2 - v_B^2 = 2gh_{BC} \Rightarrow v_c^2 - 0 = 2 * 10 * 45 \Rightarrow v_c = \sqrt{900} = 30 \frac{m}{s}$$

$$v_c^2 - v_A^2 = 2gh_{AC} \Rightarrow v_c^2 - 20^2 = 2 * 10 * 25 \Rightarrow v_c^2 = 500 + 400 \Rightarrow v_c = \sqrt{900} = 30 \frac{m}{s}$$

$$4) t_{BC} = \frac{v_c - v_b}{g} = \frac{30 - 0}{10} = 3s$$

$$t = t_{AB} + t_{BC} = 2 + 3 = 5s$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2 + v t + h. \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} * (-10)t^2 + 20t + 25 \Rightarrow -5t^2 + 20t + 25 = 0 \Rightarrow -5(t^2 - 4t - 5) = 0$$

$$\Rightarrow (t - 5) * (t + 1) = 0 \Rightarrow t = 5, t = -1 \text{ غ}$$

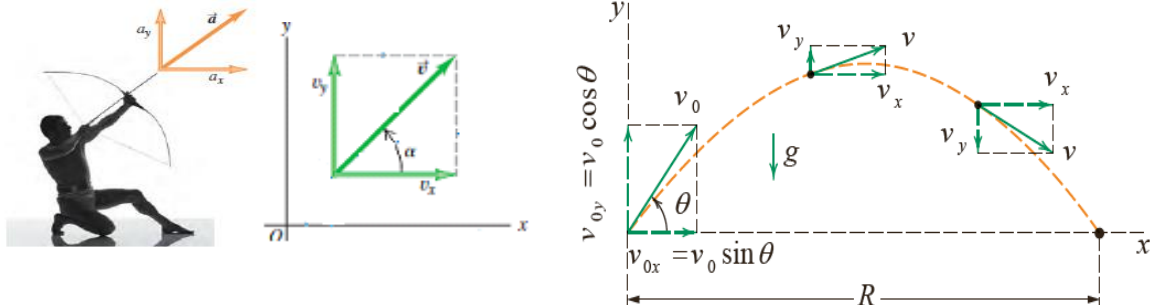
$$5) t_{Ak} = \frac{v_k - v_A}{g} = \frac{5 - 20}{-10} = 1/5s$$

$$t_{Af} = \frac{-v_f - v_A}{g} = \frac{-5 - 20}{-10} = 2/5s$$

فیزیک مکانیک و حرارت جلسه پنجم

حرکت در صفحه (دو بعدی)

حرکت پرتابه ای نوعی حرکت در صفحه تلقی میشود. مانند پرتاب تیر با کمان شلیک توپ جنگی و خمپاره یا شوت کردن توپ فوتبال و غیره در این حرکت $a_x = 0, a_y = -g$ است بنابراین حرکت در محور x ها یکنواخت و در محور y ها شتابدار است



$$\begin{aligned} v_{0x} &= v_0 \cos \theta \\ v_{0y} &= v_0 \sin \theta \end{aligned}$$

بنابر این داریم

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha, \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha$$

$$v_x = a_x t + v_{0x} = 0 \cdot t + v_0 \cos \alpha \Rightarrow v_x = v_0 \cos \alpha$$

$$v_y = a_y t + v_{0y} = -g \cdot t + v_0 \sin \alpha$$

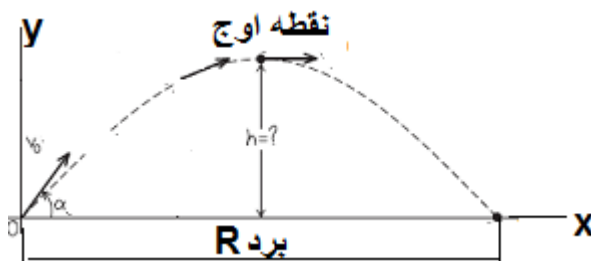
$$v = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} \Rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0$$

$$x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x}t + x_0 \Rightarrow x = v_0 \cos \alpha \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha}\right)^2 + v_0 \sin \alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cos \alpha} + y_0 \Rightarrow y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha + y_0$$

اثبات کنید: روابط برد ارتفاع اوج و زمان اوج را اثبات کنید.



در نقطه اوج سرعت محور y ها صفر میشود بنابراین زمان اوج و ارتفاع اوج به صورت زیر بدست می آید

$$v_y = 0 \Rightarrow 0 = -gt + v \cdot \sin \alpha \Rightarrow t = \frac{v \cdot \sin \alpha}{g}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_y t + y_0 \Rightarrow y_{\max} = h = -\frac{1}{2}g \left(\frac{v \cdot \sin \alpha}{g} \right)^2 + (v \cdot \sin \alpha) \frac{v \cdot \sin \alpha}{g} \Rightarrow h = \frac{(v \cdot \sin \alpha)^2}{2g}$$

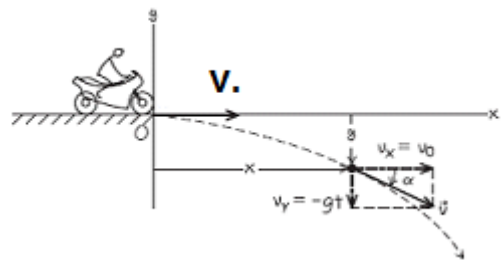
زمان کل دو برابر زمان اوج است چون زمان رفت و برگشت برابر است بنابراین در مولفه حرکت در محور x ها زمان کل را قرار می‌دهیم تا برد بدست بیاید

$$t_t = 2t = \frac{2v \cdot \sin \alpha}{g}$$

$$x = v \cdot \cos \alpha t_t \Rightarrow x_{\max} = R = v \cdot \cos \alpha * \frac{2v \cdot \sin \alpha}{g} \Rightarrow R = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$$

مثال: موتور سواری با سرعت $9 \frac{m}{s}$ در حرکت است ناگهان به دره ای سقوط میکند پس از $0.5s$ تعیین کنید

(۱) بردار جابجایی (۲) سرعت موتور سوار (۳) زاویه با محور افق (xها)



$$1) x = v \cdot \cos \alpha * t = 9 * 1 * 0.5 = 4.5 m$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v \cdot \sin \alpha t + y_0 = -\frac{1}{2} * 9.8 * (0.5)^2 + 9 * 0 * 0.5 + 0 = -1.2 m$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4.5^2 + (-1.2)^2} = 4.7 m$$

$$2) v_x = v \cdot \cos \alpha = 9 * 1 = 9 \frac{m}{s}$$

$$v_y = -g * t + v \cdot \sin \alpha = -9.8 * 0.5 + 9 * 0 = -4.9$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} \Rightarrow \vec{v} = 9\vec{i} - 4.9\vec{j}$$

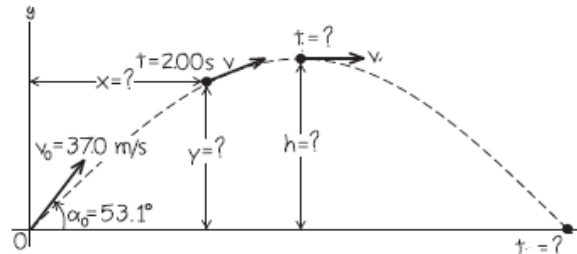
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{9^2 + (-4.9)^2} = 10.2 \frac{m}{s}$$

$$3) \tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1} \frac{-4.9}{9} \Rightarrow \alpha = -29^\circ$$

مثال: گلوله توپی را با سرعت $37 \frac{m}{s}$ و زاویه $53/1^\circ$ نسبت به افق شلیک میشود. تعیین کنید

(۱) سرعت گلوله پس از $2s$ (۲) زاویه بردار سرعت با محور افق پس از $2s$ (۳) مکان گلوله پس از $2s$

(۴) زمان اوج (۵) ارتفاع اوج (۶) کل زمان حرکت (۷) برد حرکت



$$1) v_x = v_{\cdot x} = v \cdot \cos \alpha = 37 \cdot \cos 53/1 = 22/2 \frac{m}{s}$$

$$v_y = v \cdot \sin \alpha = 37 \cdot \sin 53/1 = 29/6 \frac{m}{s}$$

$$v_y = -g \cdot t + v \cdot \sin \alpha = -9/8 \cdot 2 + 37 \cdot \sin 53/1 = 10 \frac{m}{s}$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} \Rightarrow \vec{v} = 22/2 \vec{i} + 10 \vec{j}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{22/2^2 + 10^2} = 24/4 \frac{m}{s}$$

$$2) \tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1} \frac{10}{22/2} \Rightarrow \alpha = 24/2^\circ$$

$$3) x = v_x \cdot t = 22/2 \cdot 2 = 44/4 m$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_y t + y_0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot 9/8 \cdot 2^2 + 29/6 \cdot 2 = 39/6 m$$

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} = 44/4 \vec{i} + 39/6 \vec{j}$$

$$4) v_y = -g \cdot t + v \cdot \sin \alpha = 0 \Rightarrow t = \frac{v \cdot \sin \alpha}{g} = \frac{29/6}{9/8} = 3/02 s$$

$$5) y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_y t + y_0 \Rightarrow h_{\max} = -\frac{1}{2} \cdot 9/8 \cdot 3/02^2 + 29/6 \cdot 3/02 = 44/7 m$$

$$\& h_{\max} = \frac{(v \cdot \sin \alpha)^2}{2g} = \frac{(37 \cdot \sin 53/1)^2}{2 \cdot 9/8} = \frac{29/6^2}{19/6} = 44/70 m$$

$$6) t_t = 2t = 2 \cdot 3/02 = 6/04 s$$

$$7) x_{\max} = R = v \cdot \cos \alpha \cdot t_t = 37 \cdot \cos 53/1 \cdot 6/04 = 134 m$$

$$\& R = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{37^2 \cdot \sin(2 \cdot 53/1)}{9/8} = 134 m$$

فیزیک مکانیک و حرارت جلسه ششم

قانون اول نیوتن:

هر گاه بر آیند نیروهای وارد بر یک صفر باشد جسم ساکن، ساکن می ماند و جسم در حال حرکت به حرکت مستقیم الخط یکنواخت خود ادامه می دهد. به این قانون لختی یا اینرسی یا ماند نیز گویند.

قانون دوم نیوتن:

هر گاه به جسمی نیرویی وارد شود جسم در راستای نیرو شتابی میگیرد که با نیرو رابطه مستقیم و با جرم جسم

$$\vec{a} = \frac{\vec{f}}{m} \quad \text{نسبت عکس دارد یعنی:}$$

$$\text{که در این رابطه } a: \text{ شتاب } \frac{m}{s^2} \quad f: \text{ نیرو } N \quad m: \text{ جرم } Kg$$

مثال: جسمی به جرم 5 kg را از حال سکون با نیروی 10 N روی سطح افقی بدون اصطکاک میکشیم تعیین کنید

(۱) شتاب حرکت (۲) سرعت جسم پس از 10 s (۳) مسافت طی شده در این مدت

$$m = 5 \text{ kg}$$

$$f = 10 \text{ N}$$

$$v_0 = 0$$

$$t = 10 \text{ s}$$

$$a, v, x = ?$$

$$1) a = \frac{f}{m} = \frac{10}{5} = 2 \frac{m}{s^2}$$

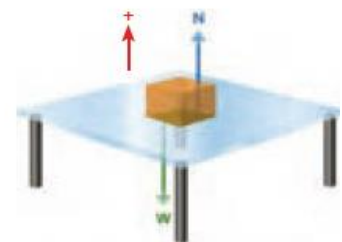
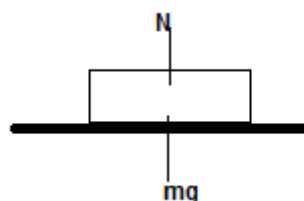
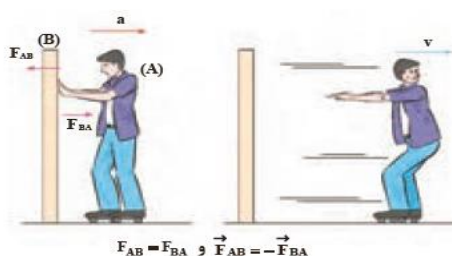
$$2) v = at + v_0 = 2 \cdot 10 + 0 = 20 \frac{m}{s}$$

$$3) x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 = 100 \text{ m}$$

قانون سوم نیوتن: هر عملی را عکس العملی است مساوی و مخالف جهت

W : وزن جسم (عمل یا کنش) N : عکس العمل سطح (واکنش)

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow W + N = 0 \Rightarrow W = -N$$



تعریف وزن: نیرویی که از طرف زمین به جرم جسم وارد می شود و با حرف W نشان می دهیم و از رابطه زیر بدست می آید $W = mg$ که W : وزن بر حسب نیوتن (N) و m : جرم بر حسب (kg) و g : شتاب جاذبه یا گرانش بر حسب $\frac{N}{kg}$ یا $\frac{m}{s^2}$

تفاوت های جرم با وزن را بنویسید.

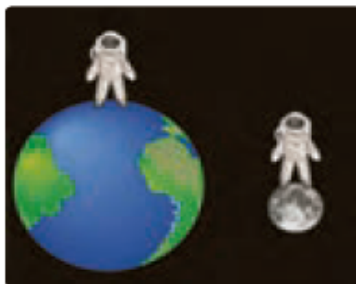
۱- جرم در تمام نقاط ثابت است ولی وزن متفاوت است

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{mg_2}{mg_1} \Rightarrow \frac{W_2}{W_1} = \frac{g_2}{g_1}$$

۲- جرم یک کمیت اسکالر است ولی وزن کمیتی برداری است

۳- واحد جرم اصلی است (kg) ولی واحد وزن فرعی است (N)

۴- جرم را با ترازوی شاهین دار اندازه گیری میکنند ولی وزن را با نیروسنج
مثال:



شتاب گرانشی سیارات مختلف، به دلیل جرم و شعاع متفاوتی که دارند، متفاوت است برای مثال شتاب گرانشی در کره ماه تقریباً برابر با $\frac{N}{kg}$ ۱/۶۶ است. وزن یک فضاورد با تجهیزات را در کره زمین و ماه با هم مقایسه کنید. جرم فضاورد به همراه تجهیزات برابر $10^2 \times 1/2 \text{ kg}$ است.

$$W = mg = 10^2 \times 1/2 \text{ kg} \times 9/8 \frac{N}{kg} = 1/176 \times 10^3 \text{ N}$$

$$W' = mg' = 10^2 \times 1/2 \text{ kg} \times 1/66 \frac{N}{kg} = 1/992 \times 10^2 \text{ N}$$

$$\frac{W'}{W} = \frac{1/992 \times 10^2 \text{ N}}{1/176 \times 10^3 \text{ N}} \approx \frac{1}{6}$$

وزن فضاورد در کره ماه تقریباً یک ششم وزن آن در کره زمین است.

روش دوم

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{mg_2}{mg_1} \Rightarrow \frac{W_2}{W_1} = \frac{g_2}{g_1} \Rightarrow \frac{W_2}{W_1} = \frac{1/66}{9/8} \approx \frac{1}{6}$$

مراحل حل مسائل با استفاده از قوانین نیوتن:

۱- محورهای مختصات را رسم میکنیم یکی به موازات سطح و دیگری عمود بر سطح و یک جهت را به عنوان

جهت مثبت در نظر میگیریم

۲- نیروهای وارد بر جسم را رسم میکنیم و نیروی اصطکاک همیشه خلاف جهت حرکت رسم میشود

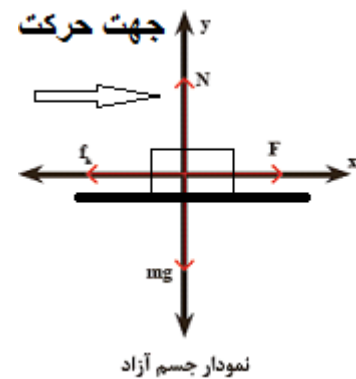
۳- برآیند نیروها در راستای حرکت را بدست می آوریم و با F_T یا $(\sum F)$ نشان می دهیم.

$$۴- \text{ شتاب را با استفاده از قانون دوم نیوتن بدست می آوریم } a = \frac{F_T}{m} \text{ یا } a = \frac{\sum F}{m}$$

مثال:

جسمی به جرم 5kg را از حال سکون با نیروی افقی 24N را روی سطح افقی میکشیم اگر نیروی اصطکاک در مقابل این حرکت 4N باشد تعیین کنید

- ۱- شتاب حرکت ۲- سرعت جسم پس از 10s ۳- مسافت طی شده در این مدت



$$m = 5\text{kg} \quad v_0 = 0 \quad F = 24\text{N} \quad f_k = 4\text{N} \quad t = 10\text{s}$$

$$a = ? \quad t = 10\text{s} \quad v = ? \quad x = ?$$

$$1) a = \frac{F_{TX}}{m} = \frac{F - f_k}{m} = \frac{24 - 4}{5} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$2) v = at + v_0 = 4 \cdot 10 + 0 = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$3) x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 \cdot t = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 = 200\text{m}$$

نیروی اصطکاک

نیروی اصطکاک بر دو نوع است

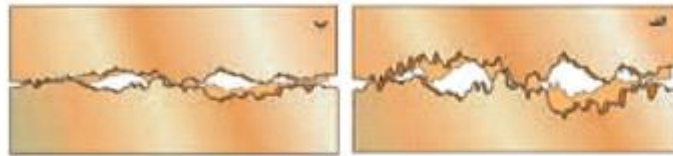
الف- نیروی اصطکاک آستانه حرکت (f_s): این نیرو در لحظه ابتدایی شروع حرکت ظاهر میشود که به علت پستی و بلندیهای روی دو جسم بیشینه اصطکاک است و تا وقتی نیروی محرک بزرگتر از این مقدار نباشد جسم شروع به حرکت نمیکند و مقدار آن از رابطه $f_s = \mu_s \cdot N$ بدست می آید و متناسب با نیروی عمودی سطح است

f_s : نیروی اصطکاک آستانه حرکت μ_s : ضریب اصطکاک آستانه حرکت یا ایستایی بدون واحد N:
نیروی عمودی سطح

ب- نیروی اصطکاک در حال حرکت (f_k): این نیرو هنگام حرکت ظاهر میشود که به علت پستی و بلندیهای روی دو جسم است که نسبت به نیروی اصطکاک آستانه حرکت کوچکتر است و مقدار آن از رابطه $f_k = \mu_k \cdot N$ بدست می آید و متناسب با نیروی عمودی سطح است

f_k : نیروی اصطکاک جنبشی μ_k : ضریب اصطکاک جنبشی یا در حال حرکت بدون واحد N: نیروی عمودی سطح

$$\mu_s \geq \mu_k \Leftrightarrow f_s \geq f_k$$

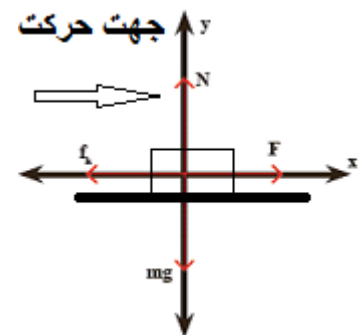


این شکل تأثیر نیروی عمودی تکیه‌گاه بر نیروی اصطکاک را نشان می‌دهد. در شکل الف نیروی عمودی تکیه‌گاه کمتر از شکل ب است و سطح تماس در مقیاس ریز کمتر بوده و نیروی اصطکاک کمتر است.

مثال:

جسمی به جرم 2kg که با سرعت ثابت $5\frac{m}{s}$ در حرکت است با نیروی افقی 12N را روی سطح افقی میکشیم. اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح $0/2$ باشد تعیین کنید.

۱- نیروی اصطکاک ۲- شتاب حرکت ۳- سرعت جسم پس از 5s ۴- مسافت طی شده در این مدت



$$m = 2\text{kg} \quad v_0 = 5\frac{m}{s} \quad F = 12\text{N} \quad \mu_k = 0/2 \quad f_k = ?$$

$$a = ? \quad t = 5\text{s} \quad v = ? \quad x = ?$$

$$1) F_{TY} = 0 \Rightarrow N - mg = 0 \Rightarrow N = mg = 2 \cdot 10 = 20\text{N}$$

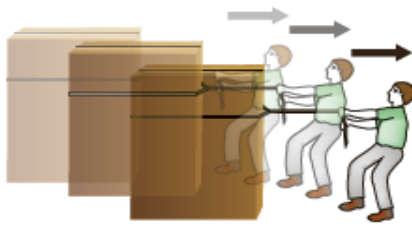
$$f_k = \mu_k \cdot N = 0/2 \cdot 20 = 4\text{N}$$

$$1) a = \frac{F_{TX}}{m} = \frac{F - f_k}{m} = \frac{12 - 4}{2} = 4\frac{m}{s^2}$$

$$2) v = at + v_0 = 4 \cdot 5 + 5 = 25\frac{m}{s}$$

$$3) x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 \cdot t = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 = 50 + 25 = 75\text{m}$$

مثال:



اگر یک جعبه چوبی به جرم ۱۲ کیلوگرم را با نیروی افقی ۳۰ نیوتن و با سرعت ثابت روی زمین بکشیم ضریب اصطکاک جنبشی بین جعبه و زمین چه اندازه خواهد بود؟

پاسخ: همان طور که در متن مثال آمده است، جعبه با سرعت ثابت حرکت می کند، پس در حال تعادل دینامیکی است. و برآیند نیروهای وارد بر آن صفر خواهد بود.

$$F_{Ty} = N - W = N - mg = 0 \Rightarrow N = mg = 12 \text{ kg} \times 9.8 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 117.6 \times 10^3 \text{ N}$$

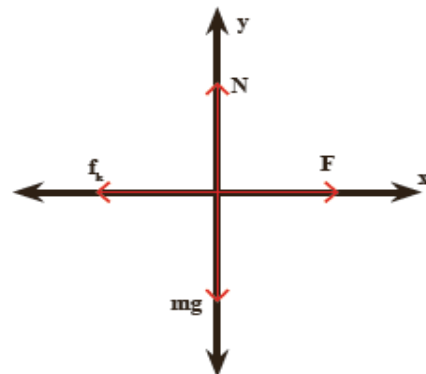
$$f_k = \mu_k N \quad (1)$$

$$F_{Tx} = F - f_k = 0 \Rightarrow F = f_k \quad (2)$$

$$1, 2 \Rightarrow F = \mu_k N \Rightarrow \mu_k = \frac{F}{N} = \frac{30 \text{ N}}{117.6 \text{ N}} = 0.25$$

برآیند نیروها روی محور x ها: F_{Tx}

برآیند نیروها روی محور y ها: F_{Ty}



مثال:

جسمی به جرم ۵ kg را از حالت سکون با نیروی ۲۰ N که با سطح افق زاویه 53° ساخته است میکشیم اگر ضریب اصطکاک بین جسم و سطح 0/1 باشد تعیین کنید.

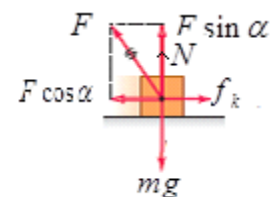
(۱) نیروی اصطکاک (۲) شتاب حرکت (۳) سرعت جسم پس از ۵ s

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow mg = N + F \sin \alpha \Rightarrow N = mg - F \sin \alpha = 5 \times 10 - 20 \times 0.8 = 34 \text{ N}$$

$$f_k = \mu_k N \Rightarrow f_k = 0.1 \times 34 = 3.4 \text{ N}$$

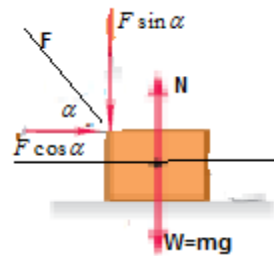
$$2) a = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{F \cos \alpha - f_k}{m} = \frac{20 \times 0.6 - 3.4}{5} = \frac{8.6}{5} = 1.72 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$3) v = at + v_0 = 1.72 \times 10 + 0 = 17.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



مثال: جسمی به جرم 2kg را از حالت سکون با نیروی 20N که با سطح افق زاویه 37° ساخته است به طرف جلو هل میدهم اگر ضریب اصطکاک بین جسم و سطح $0/2$ باشد تعیین کنید.

(۱) نیروی اصطکاک (۲) شتاب حرکت (۳) سرعت جسم پس از 10s



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow mg + F \sin \alpha = N \Rightarrow N = mg + F \sin \alpha = 2 \times 10 + 20 \times 0/6 = 32\text{N}$$

$$f_k = \mu_k N \Rightarrow f_k = 0/2 \times 32 = 6/4\text{N}$$

$$2) a = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{F \cos \alpha - f_k}{m} = \frac{20 \times 0/8 - 6/4}{2} = \frac{9/6}{2} = 4/8 \frac{m}{s^2}$$

$$3) v = at + v_0 = 4/8 \times 10 + 0 = 48 \frac{m}{s}$$

مثال:

جسمی به جرم 100g روی محیط دایره به شعاع 40cm میچرخد پس از 10s به اندازه 90° درجه میچرخد و سرعت آن از $6 \frac{m}{s}$ به $8 \frac{m}{s}$ میرسد نیروی وارد بر جسم را به دست آورید.

توجه: در حرکت دایره ای بردار سرعت مماس بر مسیر حرکت است

$$V_1 = 6 \frac{m}{s} \quad V_2 = 8 \frac{m}{s} \quad t = 10\text{s}$$

$$m = 100\text{g} \div 1000 = 0/1\text{kg}$$

$$\Delta V = \sqrt{V_2^2 - V_1^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 \frac{m}{s}$$

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{10}{10} = 1 \frac{m}{s^2}$$

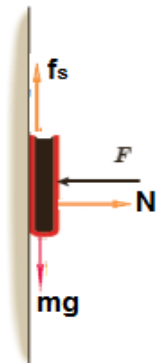
$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m.a = 1 \times 0/1 = 0/1\text{N}$$

مثال:

کتابی به جرم 500g را با نیروی افقی F روی دیوار قائم به ضریب اصطکاک ایستایی $0/2$ نگه

داشته ایم حداقل نیروی F چقدر باشد تا کتاب به حال تعادل باشد.

شرط تعادل این است که برآیند نیروها در محور x ها و y ها برابر صفر باشد بنابراین



$$m = 500g \div 1000 = 0.5 \text{ kg}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F = N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow mg = f_s \Rightarrow mg = \mu_s N$$

$$F = N \Rightarrow mg = \mu_s F \Rightarrow F = \frac{mg}{\mu_s} = \frac{0.5 \times 10}{0.2} = 25 \text{ N}$$

مثال: دو جسم به جرمهای ۴ kg و ۶ kg توسط یک ریسمان به یکدیگر متصل شده اند و با نیروی افقی ۴۰ N روی سطح افقی به ضریب اصطکاک جنبشی ۰/۲ بکشیم تعیین کنید

(۱) شتاب حرکت (۲) نیروی کشش ریسمان بین دو جسم

$$1) \sum F_y = 0$$

$$N_1 = m_1 g = 4 \times 10 = 40 \text{ N}$$

$$N_2 = m_2 g = 6 \times 10 = 60 \text{ N}$$

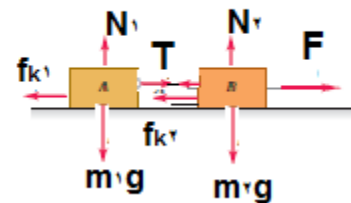
$$f_{k1} = \mu N_1 = 0.2 \times 40 = 8 \text{ N}$$

$$f_{k2} = \mu N_2 = 0.2 \times 60 = 12 \text{ N}$$

$$a = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{F - f_{k1} - f_{k2}}{m_1 + m_2} = \frac{40 - 8 - 12}{6 + 4} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$2) T - f_{k1} = m_1 a \Rightarrow T - 8 = 4 \times 2 \Rightarrow T = 8 + 8 \Rightarrow T = 16 \text{ N}$$

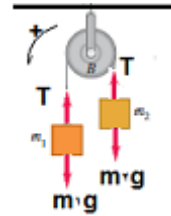
$$F - f_{k2} - T = m_2 a \Rightarrow 40 - 12 - T = 6 \times 2 \Rightarrow T = 16 \text{ N}$$



فیزیک مکانیک و حرارت جلسه هفتم

مثال: دو جسم به جرمهای $m_1 = 6\text{kg}$, $m_2 = 4\text{kg}$ توسط یک ریسمان به یکدیگر متصل شده و توسط یک قرقره از سقف آزمایشگاه آویزان شده اند تعیین کنید.

(۱) شتاب حرکت (۲) نیروی کشش ریسمان بین دو جسم (۳) نیروی کشش نخ متصل به سقف



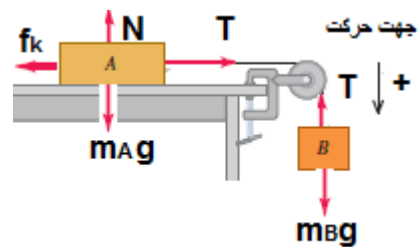
$$1) a = \frac{\sum F}{\sum m} = \frac{m_1 g - m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{6 \times 10 - 4 \times 10}{6 + 4} = 2 \frac{m}{s^2}$$

$$2) m_1 g - T = m_1 a \Rightarrow T = m_1 g - m_1 a = 6 \times 10 - 6 \times 2 = 48 \text{ N}$$

$$\& T - m_2 g = m_2 a \Rightarrow T = m_2 g + m_2 a = 4 \times 10 + 4 \times 2 = 48 \text{ N}$$

$$3) T_t = 2T = 2 \times 48 = 96$$

مثال: دو جسم به جرمهای $m_A = 12\text{kg}$, $m_B = 8\text{kg}$ مطابق شک زیر به یکدیگر متصل شده اند اگر ضریب اصطکاک بین جسم و سطح $0/2$ باشد تعیین کنید. (۱) شتاب حرکت (۲) نیروی کشش نخ بین دو جسم



$$1) f_{kA} = \mu_k N_A = \mu_k m_A g = 0/2 \times 12 \times 10 = 24 \text{ N}$$

$$a = \frac{\sum F}{\sum m} = \frac{m_B g - f_k}{m_A + m_B} = \frac{8 \times 10 - 24}{12 + 8} = \frac{56}{20} = 2/8 \frac{m}{s^2}$$

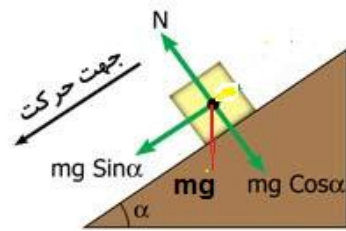
$$2) T - f_k = m_A a \Rightarrow T - 24 = 12 \times 2/8 \Rightarrow$$

$$T = 33/6 + 24 = 57/6 \text{ N}$$

$$\& m_B g - T = m_B a \Rightarrow T = m_B g - m_B a \Rightarrow$$

$$T = 8 \times 10 - 8 \times 2/8 = 57/6 \text{ N}$$

اثبات: مطلوب است محاسبه شتاب در سطح شیبدار بدون اصطکاک وقتی جسم در اثر نیروی وزن به طرف پایین



حرکت میکند..

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha \\ \sum F_x = ma \Rightarrow a = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{mg \sin \alpha}{m} \Rightarrow a = g \sin \alpha \end{cases}$$

بنابراین شتاب حرکت در سطح شیبدار بدون اصطکاک به جرم جسم بستگی ندارد

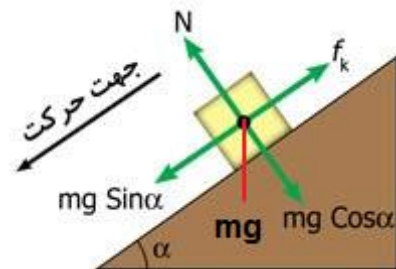
اثبات: مطلوب است محاسبه شتاب در سطح شیبدار با اصطکاک وقتی جسم در اثر نیروی وزن به طرف پایین

حرکت میکند..

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha \\ f_k = \mu_k N = \mu_k mg \cos \alpha \\ \sum F_x = ma \Rightarrow a = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{mg \sin \alpha - f_k}{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{mg \sin \alpha - \mu_k mg \cos \alpha}{m} = \frac{mg (\sin \alpha - \mu_k \cos \alpha)}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = g (\sin \alpha - \mu_k \cos \alpha)$$

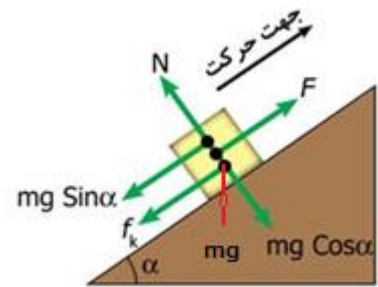


اثبات: مطلوب است محاسبه شتاب در سطح شیبدار با اصطکاک وقتی جسم با سرعت V به طرف بالا پرتاب می

شود..

چون به طرف بالا پرتاب شده و دیگر نیرو وارد نمی شود $F=0$ است

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha \\ f_k = \mu_k N = \mu_k mg \cos \alpha \\ \sum F_x = ma \Rightarrow a = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{F - mg \sin \alpha - f_k}{m} \\ \Rightarrow a = \frac{0 - mg \sin \alpha - \mu_k mg \cos \alpha}{m} = \frac{-mg(\sin \alpha + \mu_k \cos \alpha)}{m} \\ \Rightarrow a = -g(\sin \alpha + \mu_k \cos \alpha) \end{cases}$$



تعریف توان: کار انجام شده در واحد زمان را توان گویند و احد آن در سیستم SI وات میباشد و توان وسایل نقلیه به صورت زیر محاسبه میشود

$$p = \frac{w}{t} = \frac{Fd}{t} \xrightarrow{\bar{v} = \frac{d}{t}} p = F\bar{V}$$

مثال: کامیونی به جرم ۵ تن با سرعت ثابت $10 \frac{m}{s}$ در یک سطح شیبدار با شیب ۲٪ به طرف بالا در حرکت است در اثر اعمال نیروی موتور سرعتش در مدت ۵s به $15 \frac{m}{s}$ برسد و نیروی اصطکاک در مقابل این حرکت ۴٪ وزن آن باشد تعیین کنید

(۱) شتاب حرکت (۲) نیروی موتور (۳) توان موتور هنگام بالا رفتن

(۴) نیروی موتور اگر کامیون رو به طرف پایین با سرعت ثابت $5 \frac{m}{s}$ حرکت کند.

$$v_0 = 10 \frac{m}{s}, v = 15 \frac{m}{s}, t = 5s, m = 5ton = 5000kg$$

$$1) a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{15 - 10}{5} = 1 \frac{m}{s^2}$$

$$2) \tan \alpha = \sin \alpha = 0.02$$

$$f_k = 0.04mg = 0.04 \times 5000 \times 10 = 2000$$

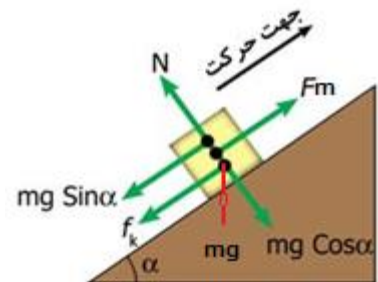
$$a = \frac{\sum F}{\sum m} \Rightarrow a = \frac{F_m - mg \sin \alpha - f_k}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{F_m - 5000 \times 10 \times 0.02 - 2000}{5000} \Rightarrow$$

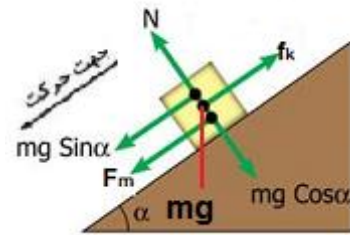
$$5000 = F_m - 1000 - 2000 \Rightarrow F_m = 8000N$$

$$3) \bar{v} = \frac{v + v_0}{2} = \frac{10 + 15}{2} = 12.5 \frac{m}{s}$$

$$p = F_m \bar{v} = 8000 \times 12.5 = 100000W = 100kW$$



(۴)



$$4) a = 0$$

$$a = \frac{\sum F}{\sum m} \Rightarrow 0 = \frac{F_m + mg \sin \alpha - f_k}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = F_m + mg \sin \alpha - f_k \Rightarrow F_m = f_k - mg \sin \alpha$$

$$F_m = 2000 - 5000 \times 10 \times 0.02 = 1000 \text{ N}$$

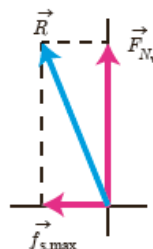
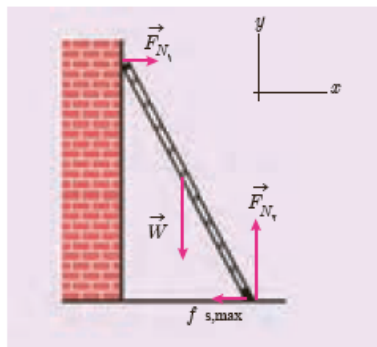
مثال:



در شکل روبه‌رو نردبانی به جرم 200 kg به دیوار قائم بدون اصطکاک تکیه داده شده است. ضریب اصطکاک ایستایی بین زمین و پای نردبان 0.46 است. در آستانه سُرخوردن نردبان، الف) زمین به نردبان چه نیرویی وارد می‌کند؟ ب) چه نیرویی از دیوار به نردبان وارد می‌شود؟

پاسخ: الف) نخست نیروهای وارد بر نردبان را رسم می‌کنیم که عبارت‌اند از:

نیروی عمودی سطح دیوار (F_{N_y}) ، نیروی وزن (W) ، نیروی عمودی سطح زمین (F_{N_x}) و نیروی اصطکاک ایستایی بین زمین و نردبان $(f_{s,\max})$.



یک دستگاه مختصات انتخاب می‌کنیم.

در آستانه حرکت، نردبان همچنان در حال تعادل است. بنابراین نیروی خالص در راستای قائم و افقی صفر است.

$$F_{N_y} - W = 0 \Rightarrow F_{N_y} = W = mg = (200 \text{ kg})(9.8 \text{ N/kg}) = 196 \text{ N}$$

$$f_{s,\max} = \mu_s F_{N_y} = (0.46) \times (196 \text{ N}) = 90.2 \text{ N} \Rightarrow F_{N_x} = 90.2 \text{ N}$$

از طرف زمین بر نردبان دو نیروی عمودی F_{N_y} و افقی $f_{s,\max}$ وارد می‌شود. بنابراین برآیند این دو نیرو که آن را با $\vec{R}$ نشان می‌دهیم، نیرویی است که زمین بر نردبان وارد می‌کند:

$$\vec{R} = \vec{F}_{N_y} + \vec{f}_{s,\max}$$

که بزرگی آن برابر است با:

$$R = \sqrt{F_{N_y}^2 + f_{s,\max}^2} = \sqrt{(196 \text{ N})^2 + (90.2 \text{ N})^2} = 216 \text{ N}$$

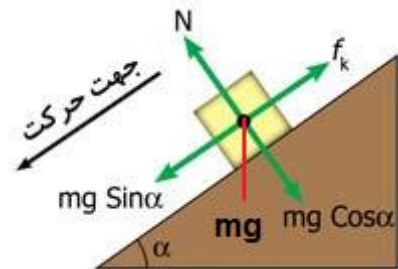
ب) برآیند نیروهای افقی وارد بر نردبان صفر است، پس:

$$F_{N_x} - f_{s,\max} = 0 \Rightarrow F_{N_x} = f_{s,\max} = 90.2 \text{ N}$$

در نبود نیروی اصطکاک بین نردبان و دیوار، نیروی F_{N_x} همان نیروی وارد از دیوار به نردبان است.

مثال: مطلوبست محاسبه ضریب اصطکاک جنبشی.

توجه: برای این کار جسم مورد نظر را روی سطح مورد نظر قرار داده و سطح را آرام آرام بالا می آوریم تا جسم با سرعت ثابت به طرف پایین حرکت کند



$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha \\ f_k = \mu_k N = \mu_k mg \cos \alpha \\ \sum F_x = ma \Rightarrow a = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{mg \sin \alpha - f_k}{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{mg \sin \alpha - \mu_k mg \cos \alpha}{m} \Rightarrow 0 = \frac{mg \sin \alpha - \mu_k mg \cos \alpha}{m}$$

$$mg \sin \alpha - \mu_k mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow mg \sin \alpha = \mu_k mg \cos \alpha \Rightarrow \mu_k = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\Rightarrow \mu_k = \tan \alpha$$

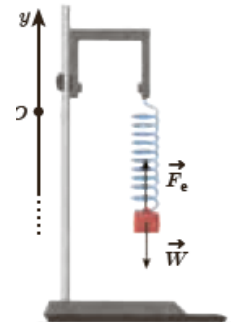
نیروی فنر:

قانون هوک: هرگاه فنری با ثابت K را نیروی F بکشیم طول فنر به اندازه ΔX طبق رابطه زیر تغییر میکند

$$F = -K \cdot \Delta X \quad , \quad \Delta x = x_2 - x_1$$

F نیرو بر حسب N ΔX تغییر طول بر حسب m K: ضریب سختی یا ثابت فنر بر حسب $\frac{N}{m}$

مثال: جسمی به جرم $500g$ به فنری با ثابت $200 \frac{N}{m}$ متصل شده و سقف آزمایشگاه آویزان شده است تغییر طو
فنر را بدست آورید.



$$m = 500g \div 1000 = 0.5kg$$

$$F = k \Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{F}{k} = \frac{mg}{k} = \frac{0.5 \times 10}{200} = 0.025m = 2.5cm$$

اندازه حرکت: حاصل ضرب جرم جسم در سرعت آن را اندازه حرکت یا تکانه گویند. کمیتی برداری است و با

حرف p نشان می‌دهیم واحد آن $kg \frac{m}{s}$ است. و از رابطه $\vec{p} = m\vec{v}$ بدست می‌آید

تغییرات اندازه حرکت: حاصل ضرب جرم جسم در تغییرات بردار سرعت آن را تغییرات اندازه حرکت گویند.

کمیتی برداری است و با حرف Δp نشان می‌دهیم واحد آن $kg \frac{m}{s}$ است. و از رابطه $\Delta \vec{p} = m \cdot \Delta \vec{v}$ بدست می‌آید.

$$\Delta \vec{p} = m \cdot \Delta \vec{v} \Rightarrow \Delta \vec{p} = m \times (\vec{v} - \vec{v}_0)$$

مثال: توپی به جرم $200g$ را با سرعت $20 \frac{m}{s}$ به دیوار برخورد میکند و با سرعت $18 \frac{m}{s}$ برمی‌گردد تغییرات

اندازه حرکت را بدست آورید.

چون توپ به دیدار برخورد کرده و برگشته اگر جهت برگشت را جهت + فرض کنیم جهت رفت - است

$$v_0 = -20 \frac{m}{s}, v = 18 \frac{m}{s}, m = 200g = 0.2kg$$

$$\Delta \vec{p} = m \times (\vec{v} - \vec{v}_0) \Rightarrow \Delta p = 0.2 \times (18 - (-20)) = 0.2 \times 36 = 7.2kg \frac{m}{s}$$

محاسبه نیرو با استفاده از اندازه حرکت:

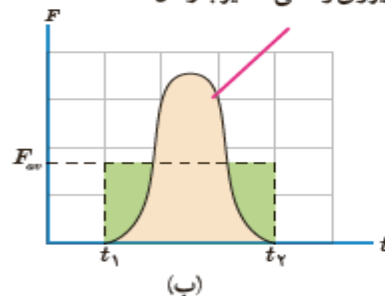
طرفین رابطه تغییرات اندازه حرکت را بخش بر زمان می‌کنیم

$$\Delta \vec{p} = m \cdot \Delta \vec{v} \Rightarrow \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{m \cdot \Delta \vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = m \vec{a} \Rightarrow \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}$$

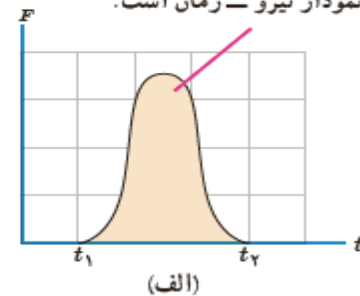
اگر از طرفین حد بگیریم و تغییرات زمان را به سمت صفر میل کند میتوان گفت نیرو مشتق معادله اندازه حرکت

$$F = \frac{dp}{dt} \text{ است نسبت زمان یعنی}$$

تغییر تکانه ناشی از نیروی متوسط برابر با تغییر تکانه نیروی واقعی متغیر با زمان است.



تغییر تکانه برابر با مساحت سطح زیر نمودار نیرو - زمان است.



مثال:



شکل روبه‌رو صحنه‌ای از یک آزمون تصادف را نشان می‌دهد که در آن خودرویی به جرم 1200 kg به دیواری برخورد کرده و سپس برمی‌گردد. اگر تندی اولیه و نهایی خودرو به ترتیب 54 km/h و 9 km/h باشد و تصادف 0.15 s طول بکشد، (الف) تغییر تکانه خودرو را پیدا کنید.

(ب) اندازه و جهت نیروی متوسط وارد بر خودرو را تعیین کنید.

پاسخ: (الف) جهت محور x را به طرف راست انتخاب می‌کنیم و تکانه‌ها را با استفاده از رابطه $2-8$ به دست می‌آوریم.

$$v_1 = +54 \text{ km/h} = +15 \text{ m/s} \text{ و } v_2 = -9 \text{ km/h} = -2.5 \text{ m/s} \quad \xrightarrow{\quad \quad \quad} x$$

$$p_1 = mv_1 = (1200 \text{ kg})(15 \text{ m/s}) = +18000 \text{ kg.m/s} = +18 \times 10^3 \text{ kg.m/s}$$

$$p_2 = mv_2 = (1200 \text{ kg})(-2.5 \text{ m/s}) = -3000 \text{ kg.m/s}$$

$$\Delta p = (-3000 \text{ kg.m/s}) - (+18000 \text{ kg.m/s}) = -21000 \text{ kg.m/s}$$

(ب) نیروی متوسط وارد بر اتومبیل با استفاده از رابطه $2-11$ برابر است با:

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{-21000 \text{ kg.m/s}}{0.15 \text{ s}} = -140000 \text{ N}$$

یعنی نیروی خالص متوسطی که از دیوار به خودرو وارد می‌شود در خلاف جهت محور x (یعنی به طرف چپ) است. توجه داریم اگر خودرو پس از برخورد، برنگردد نیروی متوسط وارد بر خودرو کوچک‌تر از مقداری است که اکنون به دست آوردیم.

تعریف ضربه: حاصل ضرب نیرو در مدت اثر نیرو را ضربه گویند که با تغییرات اندازه حرکت برابر است

$$\vec{z} = \vec{f} t = m \Delta \vec{v}$$

حرکت آسانسور:

حرکت آسانسور را در سه حالت بررسی میکنیم

(۱) آسانسور با شتاب تند شونده به طرف بالا حرکت کند.

در این حالت شخص درون آسانسور احساس وزن بیشتر میکند چون شتاب ظاهری افزایش میابد

$g + a$: شتاب ظاهری M : جرم مجموعه کابین m : جرم شخص w : وزن ظاهری

g : شتاب جاذبه a : شتاب حرکت a_y : شتاب محور y ها T : کشش طناب

$$\sum_y F = ma_y$$

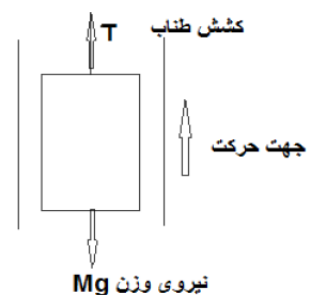
$$a_y = a$$

$$T - Mg = Ma$$

$$T = Mg + Ma$$

$$T = M(g + a)$$

$$w = m(g + a)$$



(۲) آسانسور با سرعت ثابت به طرف بالا یا پایین حرکت کند.

در این حالت شخص درون آسانسور احساس وزن عادی خود را دارد چون شتاب ظاهری و جاذبه با هم برابرند

$$\sum_y F = ma_y$$

$$a_y = a = 0$$

$$T - Mg = Ma = 0$$

$$T = Mg$$

$$T = Mg$$

$$w = mg$$

۳) آسانسور با شتاب تند شونده به طرف بالا حرکت کند.

در این حالت شخص درون آسانسور احساس وزن کمتر میکند چون شتاب ظاهری کاهش میابد

$$\sum_y F = ma_y$$

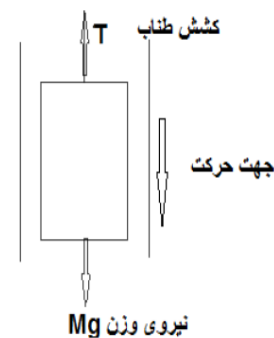
$$a_y = a$$

$$Mg - T = Ma$$

$$T = Mg - Ma$$

$$T = M(g - a)$$

$$w = m(g - a)$$



نکته: اگر گفته شود آسانسور با شتاب کند شونده به طرف بالا حرکت میکند وزن شخص کاهش می یابد چون

علامت شتاب منفی است و اگر گفته شود آسانسور با شتاب کند شونده به طرف پایین حرکت میکند شخص

احساس وزن افزایش می کند

مثال: شخصی به جرم ۷۰ کیلوگرم درون آسانسور روی ترازو ایستاده است وزن شخص (عددی که ترازو نشان

میدهد) را در حالات زیر محاسبه کنید

۱) آسانسور با شتاب ۲ متر بر مجذور ثانیه بالا برود

۲) آسانسور با سرت ثابت بالا برود

۳) آسانسور با شتاب ۳ متر بر مجذور ثانیه پایین برود

$$m = 70\text{kg}$$

$$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$1) w = m(g + a) = 70 \times (10 + 2) = 840\text{N}$$

$$2) w = mg = 70 \times 10 = 700\text{N}$$

$$3) w = m(g - a) = 70 \times (10 - 3) = 490\text{N}$$

فیزیک مکانیک و حرارت جلسه هشتم

زمان تناوب: مدت زمانی که طول میکشد یک متحرک روی محیط دایره یک دور کامل بزند را زمان تناوب یا

پریود گویند و با حرف T نمایش میدهم واحد آن در سیستم SI ثانیه است. $T = \frac{t}{n}$

t: زمان کل (s) n: تعداد دور کامل T: زمان تناوب (s)

فرکانس: تعداد دورهایی که متحرک در واحد زمان می زند را فرکانس یا بسامد گویند واحد آن در سیستم SI

هرتز $\text{Hz} = \frac{1}{\text{s}}$ است. و با حرف f نشان میدهم. $f = \frac{n}{t}$ f: فرکانس (Hz)

رابطه فرکانس و زمان تناوب:

$$f T = 1 \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{1}{f} \\ f = \frac{1}{T} \end{cases}$$

تعریف سرعت زاویه ای: زاویه مرکزی طی شده در واحد زمان را سرعت زاویه ای گویند و با حرف ω نشان

میدهم واحد آن رادیان بر ثانیه $\frac{\text{Rad}}{\text{s}}$ است و از رابطه زیر بدست می آید

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$$

رابطه سرعت زاویه ای با فرکانس و زمان تناوب: می دانیم هر دایره 2π رادیان است و زمان یک دور چرخش

کامل زمان تناوب بنابراین میتوان گفت:

$$\Delta t = T, \Delta \theta = 2\pi$$

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \xrightarrow{f = \frac{1}{T}} \omega = 2\pi f$$

رابطه سرعت خطی و زاویه ای : همانگونه که میدانیم طول کمان از حاصل ضرب شعاع با زاویه مرکزی مقابل آن

$$\Delta x = s = r \Delta \theta$$

بدست می آید.

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta(r\theta)}{\Delta t} = \frac{r \Delta \theta}{\Delta t} = r \bar{\omega} \Rightarrow \bar{v} = r \bar{\omega}$$

در صورتی که تغییرات زمان را به سمت صفر میل دهیم $\Delta t \rightarrow 0$ و حد بگیریم نتیجه میگیریم

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(r\theta)}{dt} = \frac{rd\theta}{dt} = r\omega \Rightarrow v = r\omega$$

بنابراین بردار سرعت مماس بر مسیر حرکت است

مثال: سنگی را به ریسمانی به طول ۴۰cm بسته و در راستای قائم در هر دقیقه ۱۸۰ دور میچرخانیم تعیین کنید

(۱) زمان تناوب و فرکانس (۲) سرعت زاویه ای (۳) سرعت خطی

$$L = r = 40cm = 0.4m, t = 1min = 60s, n = 180$$

$$1) T = \frac{t}{n} = \frac{60}{180} = \frac{1}{3}s$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3Hz$$

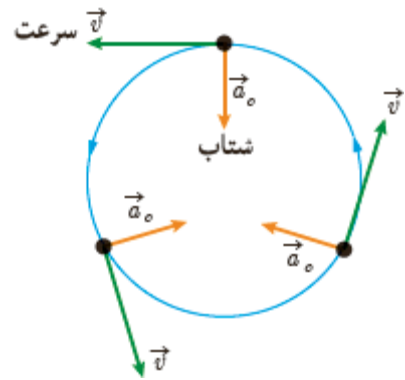
$$2) \omega = 2\pi f = 2\pi \times 3 = 6\pi \frac{rad}{s}$$

$$3) v = r\omega = 0.4 \times 6\pi = 2.4\pi \frac{m}{s} = 2.4 \times 3 = 7.2 \frac{m}{s}$$

شتاب جانبی مرکز : در حرکت دایره ای چون جهت بردار سرعت دائما در حال تغییر است بنابراین تغییرات سرعت

در واحد زمان رخ میدهد بنابراین این حرکت دارای شتاب است و چون جهت این تغییرات به سمت مرکز است به

این شتاب ، شتاب جانبی مرکز گویند و به صورت زیر محاسبه میشود.

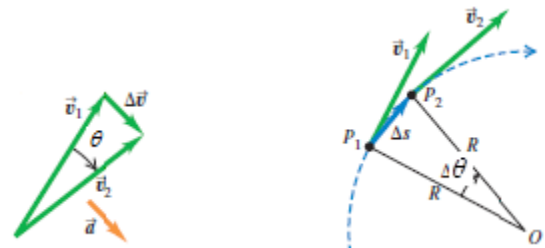


نسبت تشابه بین مثلث سرعت و جابجایی نتیجه میدهد

$$\frac{|\Delta \vec{v}|}{v_1} = \frac{\Delta x}{R} \Rightarrow |\Delta \vec{v}| = v_1 \times \frac{\Delta x}{R}$$

$$a_{av} = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} \Rightarrow a_{av} = \frac{v_1}{R} \times \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$a = \lim \frac{v_1}{R} \times \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v_1}{R} \lim \frac{\Delta x}{\Delta t}$$



چون $\Delta t \rightarrow 0$ میل میکند $v_1 = v = \lim \frac{\Delta x}{\Delta t}$ پس $a = \frac{v^2}{R}$

$$a = \frac{v^2}{R} \xrightarrow{v=R\omega} a = \frac{(R\omega)^2}{R} \Rightarrow a = R\omega^2$$

نیروی جانب مرکز: طبق قانون دوم نیوتن علت ایجاد هر شتابی نیرویی است و عامل ایجاد شتاب جانب مرکز نیروی جانب مرکز است.

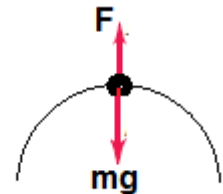
$$F = ma \Rightarrow \begin{cases} F = m \frac{v^2}{R} \\ F = mR\omega^2 \end{cases}$$

F: نیروی جانب مرکز v: سرعت خطی R: شعاع حرکت m: جرم kg ω : سرعت زاویه ای

مثال: سطل آبی را به ریسمانی به طول ۴۰cm بسته و در راستای قائم میچرخانیم حداقل سرعت خطی و زاویه ای چقدر باشد تا آب سطل بیرون نریزد

توجه: در حل مسائل عکس العمل نیروی جانب مرکز یعنی نیروی گریز از مرکز را رسم میکنیم در راستای شعاع و به سمت بیرون

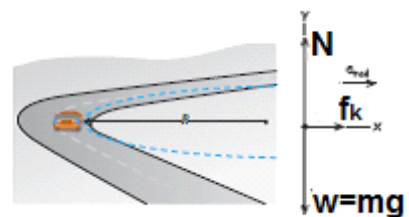
در این مسئله اگر آب پایین بخواند نریزد بالاترین نقطه را در نظر میگیریم



$$F = mg \Rightarrow m \frac{v^2}{R} = mg \Rightarrow v^2 = Rg \Rightarrow v = \sqrt{Rg} = \sqrt{0/4 \times 10} = 2 \frac{m}{s}$$

$$v = R\omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{R} = \frac{2}{0/4} = 5 \frac{rad}{s}$$

مثال: اتومبیلی در پیچ یک مسطح جاده به شعاع ۱۰۰m که ضریب اصطکاک بین لاستیک و سطح ۰/۴ است حداکثر با چه سرعتی حرکت کند که از مسیر خود منحرف نشود

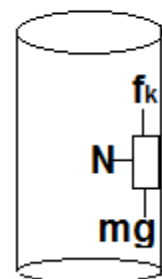


$$\begin{cases} N = mg \\ f_k \leq F \Rightarrow \mu N \geq m \frac{v^2}{R} \end{cases}$$

$$v^2 \leq \mu Rg \Rightarrow v \leq \sqrt{\mu Rg} \Rightarrow v = \sqrt{0/4 \times 100 \times 10} = 20 \frac{m}{s}$$

به همین دلیل جاده ها را شیبدار به سمت مرکز پیچ می سازند تا نیروی گریز از مرکز را خنثی کنند

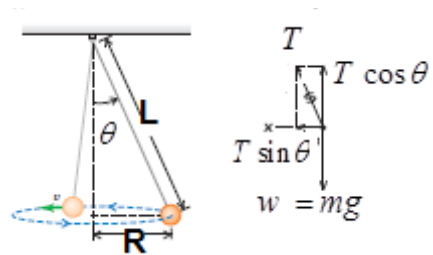
مثال: موتور سواری درون دیوار مرگی به شعاع ۱۲/۵m و ضریب اصطکاک ۰/۲ حداقل با چه سرعتی حرکت کند که پایین نیفتد



$$\begin{cases} N = F = m \frac{v^2}{R} \\ f_k \geq mg \Rightarrow \mu F \geq mg \end{cases}$$

$$\mu m \frac{v^2}{R} \geq mg \Rightarrow v \geq \sqrt{\frac{Rg}{\mu}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{12/5 \times 10}{0/2}} = 25 \frac{m}{s}$$

آونگ مخروطی: هر گاه جسمی به جرم m به ریسمانی به طول L بسته و به محور یک موتور الکتریکی بسته شده و راستای ریسمان با محور زاویه θ بسازد و جسم با سرعت زاویه ای ω بگردد تشکیل یک آونگ مخروطی را میدهد که روابط زیر در آن برقرار است



$$R = L \cdot \sin \theta$$

$$\begin{cases} T \sin \theta = F = mR\omega^2 \\ T \cos \theta = mg \end{cases}$$

$$\frac{T \sin \theta}{T \cos \theta} = \frac{mR\omega^2}{mg} \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{(L \sin \theta)\omega^2}{g} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\cos \theta} = \frac{L\omega^2}{g}$$

محاسبه زمان تناوب آونگ مخروطی

$$\frac{1}{\cos \theta} = \frac{L\omega^2}{g} \xrightarrow{\omega = \frac{2\pi}{T}} \frac{1}{\cos \theta} = \frac{L(\frac{2\pi}{T})^2}{g} \Rightarrow \frac{1}{\cos \theta} = \frac{L(2\pi)^2}{gT^2} \Rightarrow T^2 = \frac{L(2\pi)^2 \cos \theta}{g}$$

$$T = \sqrt{\frac{L(2\pi)^2 \cos \theta}{g}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{L \cos \theta}{g}}$$

محاسبه کشش ریسمان آونگ

$$\begin{cases} T \sin \theta = F = mR\omega^2 \Rightarrow T = \frac{mR\omega^2}{\sin \theta} = \frac{m(L \sin \theta)\omega^2}{\sin \theta} \Rightarrow T = mL\omega^2 \\ T \cos \theta = mg \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos \theta} \\ T = m\sqrt{a^2 + g^2} \\ a = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} \end{cases}$$

مثال: کودکی به جرم 40 kg سوار یک تاب شده مطابق شکل زیر اگر شعاع حرکت $7/5\text{ m}$ و زاویه ریسمان و محور

$$\sin 37^\circ = 0/6, \cos 37^\circ = 0/8 \quad 37^\circ \text{ درجه باشد تعیین کنید}$$

(۱) طول ریسمان (۲) سرعت زاویه ای (۳) سرعت خطی (۴) زمان تناوب (۵) کشش ریسمان

$$1) R = L \cdot \sin \theta \Rightarrow L = \frac{R}{\sin \theta} = \frac{7/5}{0/6} = 12/5 \text{ m}$$

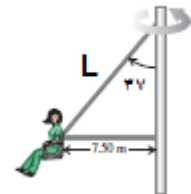
$$2) \frac{1}{\cos \theta} = \frac{L \omega^2}{g} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L \cos \theta}} = \sqrt{\frac{10}{12/5 \times 0/8}} = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$3) v = R \omega = 7/5 \times 1 = 7/5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$4) \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \text{ s} = 6/28 \text{ s}$$

$$5) T = 2\pi \sqrt{\frac{L \cos \theta}{g}} = T = 2\pi \sqrt{\frac{12/5 \times 0/8}{10}} = 2\pi \text{ s} = 6/28 \text{ s}$$

$$5) T \cos \theta = mg \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos \theta} = \frac{40 \times 10}{0/8} = 500 \text{ N}$$



فیزیک مکانیک و حرارت جلسه نهم

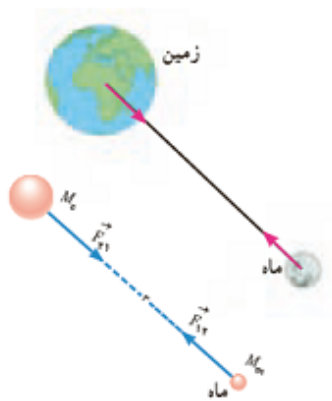
قانون جهانی گرانش نیوتن: هر دو جرم یکدیگر را با نیرویی جذب می کنند که با حاصل ضرب جرم دو جسم

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad \text{رابطه مستقیم و با مجذور فاصله بین دو جسم نسبت عکس دارد. یعنی}$$

F : نیرو N r : فاصله بین دو جسم m m_1, m_2 : جرم دو جسم kg

$$G = 6/673 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \quad G: \text{ثابت جهانی که از آزمایش کاوندیش بدست می آید.}$$

مثال:



جرم زمین و ماه به ترتیب حدود $5/98 \times 10^{24} \text{ kg}$ و $7/36 \times 10^{22} \text{ kg}$ و فاصله متوسط آنها از یکدیگر حدود $3/84 \times 10^8 \text{ m}$ است. نیروی گرانشی را که زمین و ماه به یکدیگر وارد می کنند پیدا کنید.

پاسخ: فاصله دو کره در این مثال خیلی بزرگتر از قطر کره هاست. بنابراین می توان کره ها را ذره فرض کرد.

به کمک **قانون جهانی**، نیروی گرانشی را که زمین و ماه بر هم وارد می کنند محاسبه می کنیم:

$$F_{12} = F_{21} = G \frac{M_e M_m}{r^2} = (6/67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2) \frac{(5/98 \times 10^{24} \text{ kg})(7/36 \times 10^{22} \text{ kg})}{(3/84 \times 10^8 \text{ m})^2} = 1/99 \times 10^{20} \text{ N}$$

این نیرو سبب چرخش ماه به دور زمین می شود.

مثال:

دو کره همگن به جرم های 800 kg و 1200 kg را در نظر بگیرید که فاصله مرکز آنها از یکدیگر 100 m است. نیروی گرانشی را که این دو کره بر یکدیگر وارد می کنند محاسبه کنید.

پاسخ: برای محاسبه نیرویی که دو کره همگن به هم وارد می کنند می توانیم فرض کنیم همه جرم های دو کره در مرکز آنها قرار دارد، بنابراین کره ها را به صورت ذراتی در نظر می گیریم که همان جرم کره ها را داشته باشند. به کمک رابطه ۱۵-۲، نیروی گرانشی را که دو کره به یکدیگر وارد می کنند محاسبه می کنیم:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = (6/67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2) \frac{(800 \text{ kg})(1200 \text{ kg})}{(100 \text{ m})^2} = 6/40 \times 10^{-7} \text{ N}$$

همان طور که محاسبه این مثال نشان می دهد، نیروی گرانشی میان جسم های با جرم کوچک قابل ملاحظه نیست.

تعریف شدت میدان گرانش:

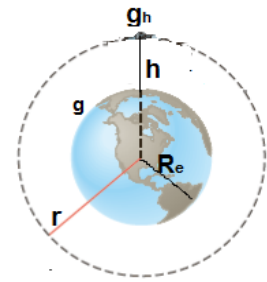
شدت میدان گرانش در هر نقطه از میدان گرانش مقدار نیرویی است که به واحد جرم جسم واقع در آن نقطه وارد

$$g = \frac{F}{m} = \frac{G \frac{M.m}{r^2}}{m} = G \frac{M}{r^2} \quad \text{میشود.}$$

r : فاصله از مرکز سیاره m M : جرم سیاره kg G : ثابت جهانی گرانش نیوتن

به عنوان مثال در سطح زمین شدت میدان گرانش از رابطه $g = G \frac{M_e}{R_e^2}$ بدست می آید.

مثال: در چه فاصله ای از سطح زمین شدت میدان گرانش $\frac{1}{36}$ آن در سطح زمین است

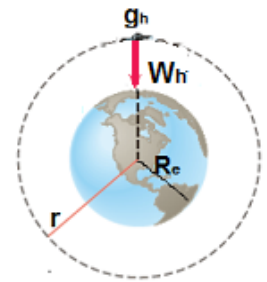


$$\frac{g}{g_h} = \frac{G \frac{M_e}{R_e^2}}{G \frac{M_e}{(R_e + h)^2}} \Rightarrow \frac{g}{g_h} = \frac{(R_e + h)^2}{R_e^2} \Rightarrow \frac{g}{\frac{1}{36}g} = \frac{(R_e + h)^2}{R_e^2}$$

$$\frac{(R_e + h)^2}{R_e^2} = 36 \Rightarrow \frac{(R_e + h)}{R_e} = 6 \Rightarrow 6R_e = R_e + h \Rightarrow h = 5R_e$$

محاسبه سرعت خطی ماهواره:

مسیر حرکت هر ماهواره بگرد زمین مسیری بیضی شکل نزدیک به دایره است که زمین در یکی از کانونهای آن قرار دارد.



$$r = R_e + h$$

$$w_h = mg_h$$

$$F = w_h \Rightarrow m \frac{v^2}{r} = G \frac{M_e}{r^2} m \Rightarrow v^2 = G \frac{M_e}{r} \Rightarrow v = \sqrt{G \frac{M_e}{r}}$$

$$g = G \frac{M_e}{R_e^2} \Rightarrow g R_e^2 = G M_e$$

$$v = \sqrt{G \frac{M_e}{r}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{g R_e^2}{r}} \Rightarrow v = R_e \sqrt{\frac{g}{r}}$$

محاسبه زمان تناوب ماهواره:

برای محاسبه زمان تناوب محیط یک دور بخش بر سرعت ماهواره محاسبه میکنیم تا زمان حرکت یک دور بدست آید

$$t = \frac{x}{v} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{R_e \sqrt{\frac{g}{r}}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{R_e} \sqrt{\frac{r^3}{g}}$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{R_e^2 g} r^3 \Rightarrow T^2 \propto r^3$$

Re: شعاع زمین

r: فاصله از مرکز زمین (سیاره)

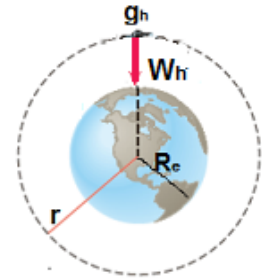
T: زمان تناوب ماهواره

m: جرم ماهواره kg Me: جرم سیاره (زمین) m v: سرعت خطی ماهواره $\frac{m}{s}$

مثال: ماهواره ای به جرم ۵۰۰kg در فاصله ۳۶۰۰km از سطح زمین در حرکت است تعیین کنید.

(۱) سرعت خطی ماهواره (۲) زمان تناوب ماهواره (۳) وزن ماهواره در این ارتفاع

$$g \approx 10 \frac{m}{s^2} \quad R_e = 6400 \text{ km} \text{ شعاع زمین}$$



$$1) r = R_e + h = 6400 + 3600 = 10000 \text{ km} = 10^7 \text{ m}$$

$$v = R_e \sqrt{\frac{g}{r}} = 6400 \times 10^3 \times \sqrt{\frac{10}{10^7}} = \frac{6400 \times 10^3}{10^2} = 6400 \frac{m}{s}$$

$$2) T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2 \times 3.14 \times 10^7}{6400} = 9812.5 \text{ s} \div 3600 = 2.725 \text{ h}$$

$$3) W_h = F = m \frac{v^2}{r} = 500 \times \frac{6400^2}{10^7} = 2048 \text{ N}$$

مثال:

ماهواره ای در مجاورت سطح زمین در حرکت است سرعت خطی و زمان تناوب ماهواره را بدست آورید.

$$1) r = R_e + h = 6400 + 0 = 6400 \text{ km} = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$$

$$v = R_e \sqrt{\frac{g}{r}} = 6400 \times 10^3 \times \sqrt{\frac{10}{6.4 \times 10^6}} = \frac{6400 \times 10^3}{8 \times 10^2} = 8000 \frac{m}{s} = v_{\max}$$

$$2) T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2 \times 3.14 \times 6.4 \times 10^6}{8000} = 5024 \text{ s} = 83.73 \text{ min} = T_{\min}$$

مثال:

ماهواره‌ها در اثر نیروی گرانشی بین زمین و ماهواره، روی مدار تقریباً دایره‌ای به دور زمین می‌چرخند. اگر جرم ماهواره 2000 kg و فاصله آن از سطح زمین 2600 km باشد، کمیت‌های زیر را محاسبه کنید:

الف) نیروی گرانشی بین ماهواره و زمین

ب) تندی مداری ماهواره

پ) دوره گردش ماهواره ($G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$, $M_e = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$)شعاع زمین $R_e = 6400 \text{ km}$

پاسخ: ماهواره را به صورت ذره و زمین را به صورت کره‌ای همگن که جرم آن در مرکز قرار دارد در نظر می‌گیریم و به کمک رابطه ۱۵-۲، نیروی گرانشی بین آنها را محاسبه می‌کنیم.

الف)

$$r = R_e + h = 6400 \text{ km} + 2600 \text{ km} = 9000 \text{ km} = 9.000 \times 10^6 \text{ m}$$

$$F = G \frac{M_e m}{r^2} = (6.67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2) \frac{(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})(2000 \text{ kg})}{(9.000 \times 10^6 \text{ m})^2} = 985 \text{ N}$$

ب) از رابطه ۱۵-۲، برای پیدا کردن تندی ماهواره استفاده می‌کنیم:

$$F_{net} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow 985 \text{ N} = (2000 \text{ kg}) \frac{v^2}{9.000 \times 10^6 \text{ m}} \Rightarrow v = 6.66 \times 10^3 \text{ m/s}$$

پ) با استفاده از رابطه بین سرعت و دوره یعنی رابطه ۱۵-۲، می‌توانیم دوره را محاسبه کنیم:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2(3.14 \text{ rad})(9.000 \times 10^6 \text{ m})}{6.66 \times 10^3 \text{ m/s}} = 8.49 \times 10^3 \text{ s} = 2.36 \text{ h}$$

یعنی، این ماهواره در هر $2/36 \text{ h}$ یک بار به دور زمین می‌چرخد.

قوانین کپلر:

(۱) مسیر حرکت هر سیاره به دور خورشید مسیری بیضی شکل است که خورشید در یکی از دو کانون این بیضی قرار دارد

(۲) خط واصل بین خورشید و هر سیاره در زمان‌های مساوی، مساحت‌های مساوی را طی می‌کند. بنابراین زمانی که سیاره به خورشید نزدیک‌تر است نسبت به زمانی که از خورشید دورتر است با سرعت بیشتری حرکت می‌کند.

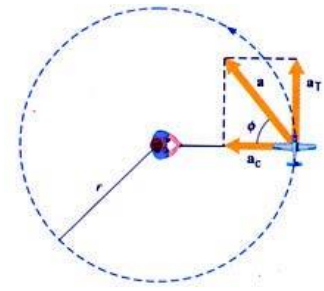
(۳) مربع زمان تناوب هر سیاره به دور خورشید با مکعب نصف محور بزرگ بیضی متناسب است. $T^2 \propto r^3$

نکته: در صورتیکه حرکت دایره‌ای یکنواخت نباشد حرکت دارای دو نوع است

(۱) شتاب جانب مرکز: این شتاب مربوط به تغییرات جهت بردار سرعت است

(۲) شتاب مماسی: این شتاب مربوط به تغییرات مقدار سرعت است

شتاب مماسی و شتاب جانب مرکز عمود بر هم هستند بنابر این شتاب کل از قضیه فیثاغورث بدست می‌آید



$$a_t = \sqrt{a_c^2 + a_T^2}$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2, a_T = \frac{v - v_0}{t}$$

مثال : در یک حرکت دایره ای شتاب جانب مرکز $6 \frac{m}{s^2}$ و شتاب مماسی $8 \frac{m}{s^2}$ است شتاب کل را بدست آورید.

$$a_t = \sqrt{a_c^2 + a_T^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \frac{m}{s^2}$$

فیزیک مکانیک و حرارت جلسه دهم

کار و انرژی

تعریف انرژی : توانایی انجام کار را انرژی گویند واحد انواع انرژی در سیستم SI ژول (J) است .

تعریف کار : هر گاه نقطه اثر نیرو جابجا شود کار انجام میگیرد . که مقدار آن از حاصلضرب مولفه نیرو در راستای جابجایی بدست می آید . به عبارتی کار از ضرب داخلی بردار نیرو و جابجایی کار بدست می آید.

$$w = \vec{F} \cdot \vec{d} \Rightarrow w = Fd \cos \theta$$

که w: کار بر حسب J F: نیرو بر حسب N d: جابجایی بر حسب m θ : زاویه بین نیرو و جابجایی

مثال : کار حاصل از نیروی $F = 5\vec{i} + 6\vec{j}$ و جابجایی $d = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ را بدست آورید .

$$F = 5\vec{i} + 6\vec{j}, d = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$w = \vec{F} \cdot \vec{d} = (5\vec{i} + 6\vec{j}) \cdot (3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}) = 5 \times 3 + 6 \times (-2) + 0 \times 4 = 15 - 12 = 3j$$

مثال : اتومبیلی به جرم 500 kg با سرعت $72 \frac{km}{h}$ در حرکت است ناگهان متوجه مانعی شده ترمز کرده پس از ۲s

می ایستد تعیین کار حاصل از نیروی ترمز.

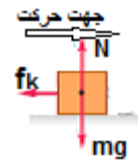
$$v = 72 \frac{km}{h} \div 3/6 = 20 \frac{m}{s}, m = 500kg, t = 2s$$

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - 20}{2} = -10 \frac{m}{s^2}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow d = \frac{0 - 20^2}{2 \times -10} = 20m$$

$$F = m.a = 500 \times 10 = 5000N$$

$$w = Fd \cos \theta = 5000 \times 20 \times \cos 180 = 5000 \times 20 \times -1 = -10000j = -10kj$$



توجه: کار نیروی اصطکاک همیشه منفی است چون زاویه بین نیرو جابجایی 180° درجه است.

بطور کلی می‌توان گفت کار نیروی اصطکاک $w_f = -f_k d$ و کار نیروی وزن وقتی جسم به طرف بالا حرکت میکند $w_{mg} = -mgh$ است چون زاویه بین نیرو جابجایی 180° درجه است. ولی اگر جسم به طرف

پایین حرکت کند کار نیروی وزن مثبت است چون جهت نیرو و جابجایی هم جهت است $w_{mg} = mgh$

مثال: جسمی به جرم $500g$ را به نخ به طول $40cm$ بسته و در راستای افقی با سرعت $10 \frac{m}{s}$ میچرخانم کار نیروی جانب مرکز را بدست آورید.

$$m = 500g = 0.5kg, L = R = 40cm = 0.4, \theta = 90^\circ$$

$$F = m \frac{v^2}{R} = 0.5 \times \frac{10^2}{0.4} = 125N$$

$$w = Fd \cos \theta = 125 \times d \times \cos 90 = 0j$$

به طور کلی کار نیروی جانب مرکز در حرکت دایره ای صفر است چون بردار نیرو و بردار جابجایی عمود بر هم هستند همچنین کار نیروی عمود بر سطح همیشه صفر است. چون نیرو و جابجایی عمود بر هم هستند.

انرژی جنبشی: هر جسم در حال حرکت می‌تواند روی محیط اطراف خود کار انجام دهد بنابراین دارای انرژی

است که به این انرژی، انرژی جنبشی گویند. و از رابطه $k = \frac{1}{2}mv^2$ بدست می‌آید.

$$K: \text{انرژی جنبشی } J \quad m: \text{جرم } kg \quad v: \text{سرعت } \frac{m}{s}$$

قضیه کار و انرژی جنبشی: کار برآیند نیروهای وارد بر یک جسم برابر تغییرات انرژی جنبشی جسم است. یعنی

$$w = \Delta k = k_2 - k_1$$

اثبات:

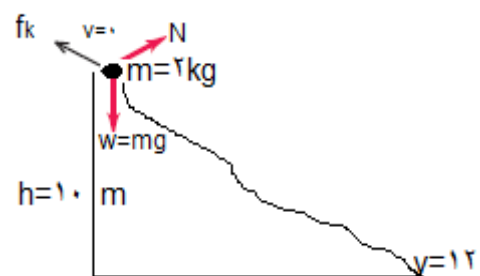
$$w = Fd = (ma)d = m\left(\frac{v^2 - v_1^2}{2d}\right)d = \frac{1}{2}m(v^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\Rightarrow w = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow w = k_2 - k_1 = \Delta k$$

مثال: جسمی به جرم ۲kg از بالای یک تپه به ارتفاع ۱۰m به طرف پایین می غلتد و با سرعت $12 \frac{m}{s}$ به سطح زمین می رسد کار برآیند نیروهای وارد بر جسم (کار اصطکاک) را به دست آورید.

ابتدا نیروهای وارد بر جسم را رسم میکنیم

۱- نیروی وزن ۲- نیروی اصطکاک ۳- نیروی عمودی سطح



$$w = \Delta k$$

$$w_{mg} + w_N + w_f = k_2 - k_1$$

$$mgh + 0 + w_f = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$2 \times 10 \times 10 + w_f = \frac{1}{2} \times 2 \times 12^2 - 0$$

$$w_f = 144 - 200 = -56 \text{ J}$$

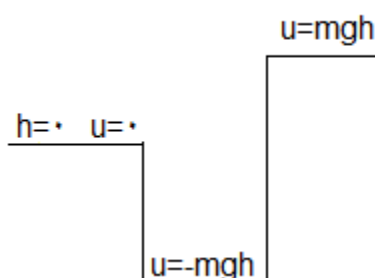
علامت منفی نشان دهنده کار نیروی اصطکاک است که به صورت گرما آزاد میشود.

انرژی پتانسیل:

انرژی نهفته شده در اجسام ساکن به علت موقعیت مکانی که دارند را انرژی پتانسیل گویند و بر دو نوع است.

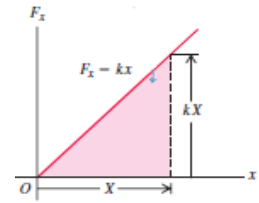
مقدار آن منفی کار انجام شده روی جسم است $u = -w$

۱- **انرژی پتانسیل گرانشی:** این انرژی مربوط به اجسام در ارتفاع است. $u = mgh$



۲- انرژی پتانسیل کشسانی: این انرژی مربوط به کشیدگی یا فشردگی فنر یا زه است. $u = \frac{1}{2}kx^2$

اثبات: انرژی ذخیره شده در فنر را بدست آورید



$$w = \bar{F} \cdot \Delta x = \frac{0+F}{2} \cdot \Delta x = \frac{k \Delta x}{2} \cdot \Delta x \Rightarrow w = \frac{1}{2} k \Delta x$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{2} k (\Delta x)^2$$

انرژی مکانیکی: مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل در هر نقطه را انرژی مکانیکی گویند. و با حرف E نشان

$$E = u + k \quad \text{می دهیم.}$$

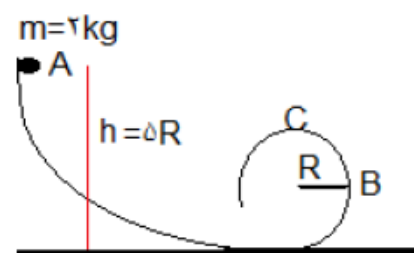
قضیه انرژی مکانیکی: در صورتیکه از اصطکاکها صرفنظر شود انرژی مکانیکی ثابت است. یعنی $E_1 = E_2$

ولی اگر اصطکاکها در نظر گرفته شود از انرژی مکانیکی به اندازه کار نیروی اصطکاک کاسته میشود. یعنی

$$E_2 = E_1 - W_{f_{12}} \Rightarrow E_1 = E_2 + W_{f_{12}} \quad \text{با این روش نوشتن علامت کار اصطکاک مثبت بدست می آید که باید دقت شود}$$

مثال: در شکل زیر اگر از اصطکاکها صرفنظر شود سرعت جسم در نقاط B و C را بدست آورید

چون از اصطکاکها صرفنظر شده انرژی مکانیکی ثابت است



$$E_A = E_B$$

$$U_A + K_A = U_B + K_B$$

$$mgh_A + \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$mg(5R) + \frac{1}{2}m \times 0^2 = mgR + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$5mgR - mgR = \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow 4mgR = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$v_B^2 = 8gR \Rightarrow v_B = \sqrt{8gR} \Rightarrow v_B = 2\sqrt{2Rg}$$

برای نقطه C مانند بالا عمل میکنیم

$$E_A = E_c$$

$$U_A + K_A = U_c + K_c$$

$$mgh_A + \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh_c + \frac{1}{2}mv_c^2$$

$$mg(5R) + \frac{1}{2}m \times 0^2 = mg(2R) + \frac{1}{2}mv_c^2$$

$$5mgR - 2mgR = \frac{1}{2}mv_c^2 \Rightarrow 3mgR = \frac{1}{2}mv_c^2$$

$$v_c^2 = 6gR \Rightarrow v_c = \sqrt{6gR}$$

توجه: نیروی وزن و کشسانی فنر نیروی پایستار هستند و در یک رفت یا برگشت گرما تولید نمی کنند ولی نیروی اصطکاک غیر پایستار است و در یک رفت یا برگشت گرما تولید می کند.

مثال: در شکل زیر حداقل ارتفاع h چقدر باشد تا جسم یک دور درون حلقه کوچک بزند.

توجه: مانند مثال سطل آب در جلسه هشتم در نقطه c حداقل سرعت برای اینکه جسم نیفتد $v = \sqrt{Rg}$ است

$$E_A = E_c$$

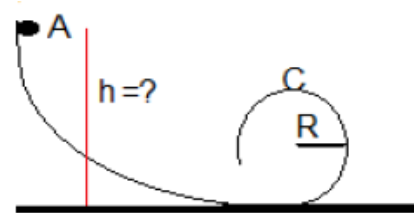
$$U_A + K_A = U_c + K_c$$

$$mgh_A + \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh_c + \frac{1}{2}mv_c^2$$

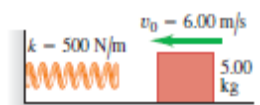
$$mgh_A + \frac{1}{2}m \times 0^2 = mg(2R) + \frac{1}{2}m(\sqrt{Rg})^2$$

$$mgh_A = 2mgR + \frac{1}{2}mgR$$

$$mgh_A = \frac{5}{2}mgR \Rightarrow h_A = \frac{5}{2}R$$



مثال: در شکل زیر اگر اصطکاکها صرفنظر شود فنر حداکثر چقدر متراکم میشود



$$E_A = E_B$$

$$U_A + K_A = U_B + K_B$$

$$\frac{1}{2}kx_A^2 + \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}kx_B^2 + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$0 + \frac{1}{2} \times 5 \times 6^2 = \frac{1}{2} \times 500 \times x_{AB}^2 + 0$$

$$90 = 250x_{AB}^2 \Rightarrow x_{AB} = d = \sqrt{\frac{90}{250}} = 0.6m = 60cm$$

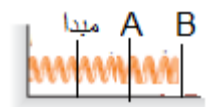
مثال: جسمی به جرم m با سرعت v به فنری با ثابت k برخورد میکند. و فنر حداکثر به اندازه d متراکم میشود مقدار d را بدست آورید. ($x_{AB} = d$)

$$\begin{aligned}
 E_A &= E_B \\
 U_A + K_A &= U_B + K_B \\
 \frac{1}{2}kx_A^2 + \frac{1}{2}mv_A^2 &= \frac{1}{2}kx_B^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 \\
 0 + \frac{1}{2}mv_A^2 &= \frac{1}{2}kd^2 + 0 \Rightarrow d = \sqrt{\frac{mv_A^2}{k}} \\
 \Rightarrow d &= v\sqrt{\frac{m}{k}}
 \end{aligned}$$

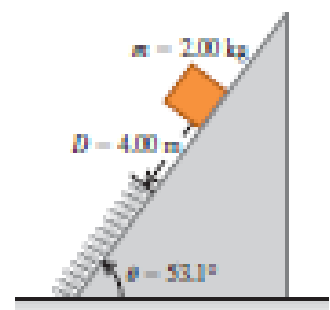


مثال: جسمی به جرم m را به فنری با ثابت k بسته و از وضع تعادل به اندازه d میکشیم سرعت جسم متصل به فنر در فاصله x از وضع تعادل چقدر است.

$$\begin{aligned}
 E_A &= E_B \\
 U_A + K_A &= U_B + K_B \\
 \frac{1}{2}kx_A^2 + \frac{1}{2}mv_A^2 &= \frac{1}{2}kx_B^2 + 0 \\
 \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv_A^2 &= \frac{1}{2}kd^2 \\
 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 &= \frac{1}{2}kd^2 - \frac{1}{2}kx^2 \\
 \frac{1}{2}mv_A^2 &= \frac{1}{2}k(d^2 - x^2) \\
 v_A^2 &= \frac{k(d^2 - x^2)}{m} \Rightarrow v_A = \sqrt{\frac{k}{m}(d^2 - x^2)}
 \end{aligned}$$



مثال: در شکل زیر اگر از اصطکاکها صرفنظر شود فنر چقدر متراکم میشود



$$E_A = E_B$$

$$U_A + K_A = U_B + K_B$$

$$\frac{1}{2}kx_A^2 + mgh_A + \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}kx_B^2 + mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$0 + mg(D \sin 53/1) + mgx \sin 53/1 + 0 = \frac{1}{2} \times 1000 \times x^2 + 0 + 0$$

$$2 \times 10 \times 4 \times 0/8 + 2 \times 10 \times x \times 0/8 = 500x^2$$

$$500x^2 - 16x - 64 = 0$$

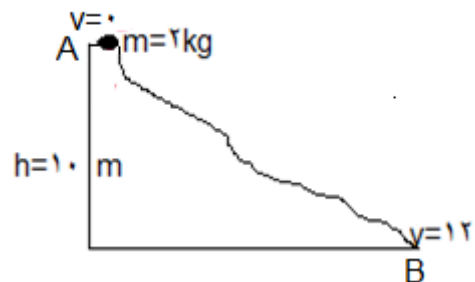
$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 16^2 - 4 \times 500 \times (-64) = 256 + 128000 = 128256$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-16) + \sqrt{128256}}{2 \times 500} = \frac{16 + 358/12}{1000} = .374m = 37/4cm$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-16) - \sqrt{128256}}{2 \times 500} = \frac{16 - 358/12}{1000} = -0/342$$

مثال: جسمی به جرم 2kg از بالای یک تپه به ارتفاع 10m به طرف پایین می‌گلتد و با سرعت $12 \frac{m}{s}$ به سطح

زمین می‌رسد کار برآیند نیروهای وارد بر جسم (کار اصطکاک) را به دست آورید.



$$E_A = E_B + w_{fAB}$$

$$U_A + K_A = U_B + K_B + w_{fAB}$$

$$mgh_A + \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2 + w_{fAB}$$

$$2 \times 10 \times 10 + 0 = 0 + \frac{1}{2} \times 2 \times 12^2 + w_{fAB}$$

$$\Rightarrow w_{fAB} = 200 - 144 = 56\text{J}$$

مثال: سنگی به جرم 200g را با سرعت $20 \frac{m}{s}$ در راستای قائم به طرف بالا پرتاب میکنیم و با سرعت $18 \frac{m}{s}$ به

زمین باز می‌گردد گرمای تولید شده در این جابجایی چقدر است؟

$$E_A = E_B + w_{fAB}$$

$$U_A + K_A = U_B + K_B + w_{fAB}$$

$$mgh_A + \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2 + w_{fAB}$$

$$0 + \frac{1}{2} \times 0/2 \times 20^2 = 0 + \frac{1}{2} \times 0/2 \times 18^2 + w_{fAB}$$

$$\Rightarrow w_{fAB} = 20 - 32/4 = -7/6\text{J} \div 4/2 = 1/8\text{cal}$$

مثال: جسمی به جرم 2 kg را روی سطح افقی به ضریب اصطکاک 0.2 را با سرعت $20\frac{m}{s}$ پرتاب میکنیم پس از طی چه مسافتی جسم می ایستد.

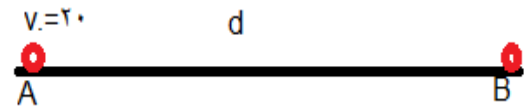
$$E_A = E_B + w_{fAB}$$

$$U_A + K_A = U_B + K_B + w_{fAB}$$

$$mgh_A + \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2 + \mu mgd$$

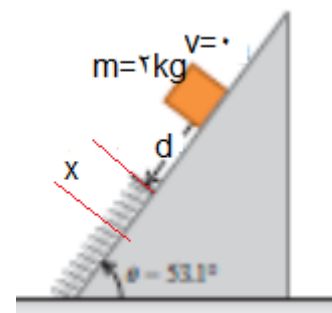
$$0 + \frac{1}{2}mv_A^2 = 0 + 0 + \mu mgd$$

$$\Rightarrow d = \frac{v_A^2}{2\mu g} = \frac{20^2}{2 \times 0.2 \times 10} = 100\text{m}$$



مثال:

جسمی به جرم 2 kg روی سطح شیبدار به ضریب اصطکاک 0.2 به اندازه $x = 20\text{ cm}$ فشرده می کنیم اگر ثابت فنر $k = 1000\frac{N}{m}$ باشد.



$$E_A = E_B + w_{fAB}$$

$$U_A + K_A = U_B + K_B + w_{fAB}$$

$$\frac{1}{2}kx_A^2 + mgh_A + \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}kx_B^2 + mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2 + \mu mg(d+x)\cos 53/1$$

$$\frac{1}{2}kx^2 + 0 + 0 = 0 + mg(d+x)\sin 53/1 + 0 + \mu mg(d+x)\cos 53/1$$

$$\frac{1}{2} \times 1000 \times (0/2)^2 = 2 \times 10 \times (d + 0/2) \times 0/8 + 0/2 \times 2 \times 10 \times (d + 0/2) \times 0/6$$

$$20 = 16d + 3/2 + 2/4d + 0/48$$

$$16/32 = 18/4d$$

$$d = \frac{16/32}{18/4} = 0/88m = 88cm$$

اثبات : رابطه انرژی جنبشی و اندازه حرکت را بدست آورید.

$$\left. \begin{array}{l} p = mv \Rightarrow v = \frac{p}{m} \\ k = \frac{1}{2}mv^2 \end{array} \right\} \Rightarrow k = \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 \Rightarrow k = \frac{p^2}{2m}$$

دوران