

منابع

مبانی فیزیک جلد دوم الکتریسیته و مغناطیس دیوید هالیدی

YOUNG & FREEDMAN

University physics

دکتر محمد ابراهیم ابو کاظمی

فیزیک پایه ۲ (دانشگاه پیام نور)

علی زارعی

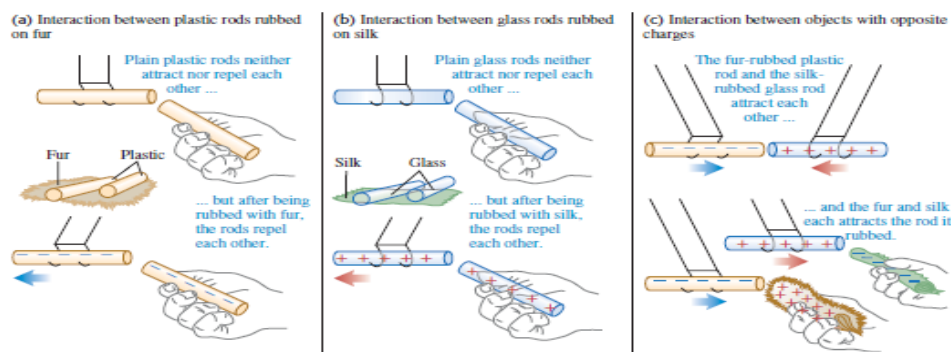
فیزیک جامع کنکور

سازمان پژوهش و برنامه ریزی

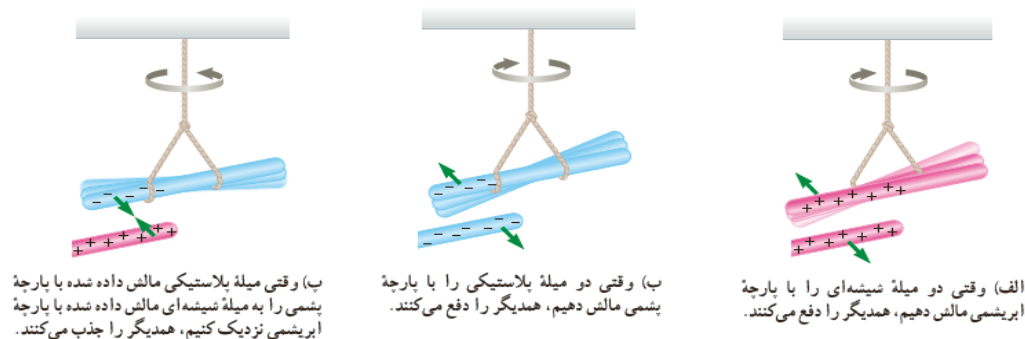
فیزیک ۲ رشته ریاضی فیزیک

یاد آوری

همانگونه که میدانیم اگر یک میله شیشه ای را به پارچه ابریشمی مالش دهیم میله دارای بار مثبت و پارچه ابریشمی دارای بار منفی میشود و اگر میله پلاستیکی را با پارچه پشمی مالش دهیم میله پلاستیکی دارای بار منفی و پارچه پشمی دارای بار مثبت میشود. که بارهای همنام یکدیگر را دفع میکنند و بارهای غیر همنام یکدیگر را جذب می کنند



بارهای همنام یکدیگر را دفع میکنند و بارهای غیر همنام یکدیگر را جذب می کنند



بنابراین میتوان گفت بار الکتریکی به صورت دانه ای است یعنی $q = \pm n e$ که در این رابطه q بار الکتریکی بر حسب

کولن (c) و n تعداد بار پایه و $e = 1/6 \times 10^{-19} c$ مقدار بار پایه بر حسب کولن است

مثال: بار جسمی ۳۲ میکرو کولن است تعداد بار پایه را بدست آورید.

$$q = 32\mu\text{C} = 32 \times 10^{-6} \text{C}, e = 1/6 \times 10^{-19}$$

$$q = \pm n e \Rightarrow n = \frac{q}{e} = \frac{32 \times 10^{-6}}{1/6 \times 10^{-19}} = 2 \times 10^{14}$$

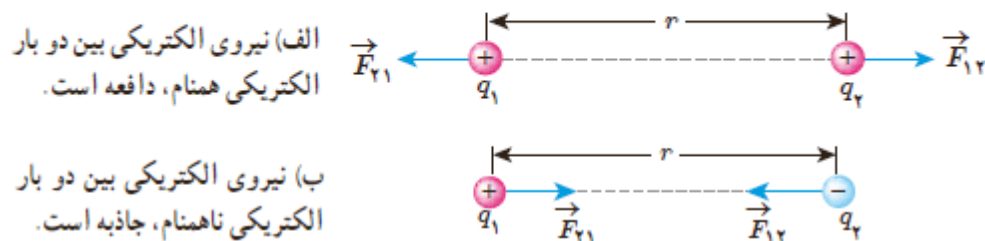
قانون کولن: هر دو بار الکتریکی یکدیگر را با نیرویی جذب یا دفع می کنند که با حاصلضرب دو بار رابطه مستقیم و با مربع فاصله بین آنها نسبت عکس دارد.

$$F = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}, k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}, \epsilon_r = 8/85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$$

یاد آوری: اگر دو بار همنام باشند یکدیگر را دفع و اگر غیر همنام باشند یکدیگر را جذب می کنند.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \Rightarrow F_{12} = F_{21} = F$$



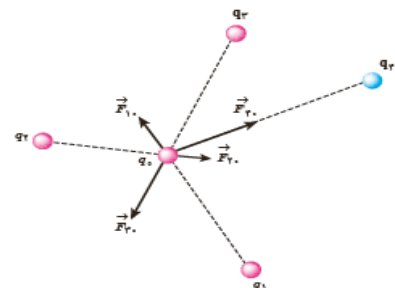
مثال: نیروی بین دو بار $10\mu\text{C}$ و $-20\mu\text{C}$ که به فاصله 30cm از هم قرار دارند را بدست آورید.

$$F = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \Rightarrow F = 9 \times 10^9 \frac{10 \times 10^{-6} \times (-20) \times 10^{-6}}{0.3^2} = -20\text{N}$$

نوع نیرو جاذبه است چون دو بار غیر همنام هستند

در صورتیکه چند بار نقطه ای داشته باشیم بر آیند آنها را محاسبه میکنیم

$$\vec{F}_{T_s} = \vec{F}_{1s} + \vec{F}_{2s} + \dots + \vec{F}_{ns}$$



در صورتیکه فقط مقدار عددی را بخواهیم بدست آوریم بارها را داخل قدر مطلق قرار میدهیم

$$F = k \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}, k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}, \epsilon_r = 8/85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

مثال:



سه ذره با بارهای $q_1 = +2/5 \mu C$ ، $q_2 = -1/0 \mu C$ و $q_3 = +4/0 \mu C$ در نقطه های A، B و C مطابق شکل روبه رو ثابت شده اند. نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_2 را محاسبه کنید.

پاسخ: نیروی الکتریکی خالصی که بر بار q_2 وارد می شود، برآیند دو نیرویی است که از طرف بارهای q_1 و q_3 بر آن وارد می شوند. برای محاسبه این نیرو، نیرویی را که هر یک از بارهای q_1 و q_3 در نبود دیگری، بر بار q_2 وارد می کند، محاسبه می کنیم. نیروی الکتریکی وارد بر q_2 ، برآیند این دو نیرو است.

فاصله بین بارهای q_1 و q_2 را با r_{12} و فاصله بین بارهای q_2 و q_3 را با r_{23} نشان می دهیم. با استفاده از رابطه ۱-۲ داریم:

$$F_{12} = k \frac{|q_1| |q_2|}{r_{12}^2} = (9/0 \times 10^9 N \cdot m^2 / C^2) \frac{(2/5 \times 10^{-6} C)(1/0 \times 10^{-6} C)}{(6/0 m)^2}$$

$$= 2/5 \times 10^{-3} N$$

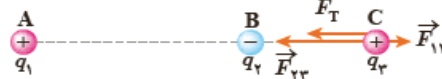
$$F_{23} = k \frac{|q_2| |q_3|}{r_{23}^2} = (9/0 \times 10^9 N \cdot m^2 / C^2) \frac{(1/0 \times 10^{-6} C)(4/0 \times 10^{-6} C)}{(2/0 m)^2}$$

$$= 9/0 \times 10^{-3} N$$

نیرویی که بار q_1 بر بار q_2 وارد می کند، دافعه و نیرویی که بار q_3 بر بار q_2 وارد می کند جاذبه است.

مطابق شکل، نیروهای $\vec{F}_{12}$ و $\vec{F}_{23}$ در جهت های مخالف یکدیگرند و برآیند آنها برابر است با

$$\vec{F}_T = \vec{F}_{23} + \vec{F}_{12}$$



بنابراین، اندازه نیروی برآیند برابر با تفاضل اندازه آنهاست:

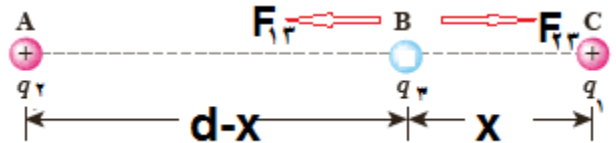
$$F_T = F_{23} - F_{12} = 6/5 \times 10^{-3} N$$

و جهت آن در جهت نیروی بزرگ تر ($\vec{F}_{23}$)، یعنی از سمت راست به طرف چپ، است. اگر محور x را روی خط واصل سه بار و جهت مثبت آن را به سمت راست در نظر بگیریم و بردار یکه محور x را، $\vec{i}$ بنامیم، داریم:

$$\vec{F}_T = (-6/5 \times 10^{-3} N) \vec{i}$$

مثال: سه بار نقطه ای $q_1 = 10\mu C, q_2 = 90\mu C, q_3 = 30\mu C$ را در نظر بگیرید که در فاصله 60 cm از هم قرار دارند در چه فاصله ای از هریک از بارهای q_1, q_2 نیروی وارد بر بار q_3 صفر میشود.

چون دو بار کناری q_1, q_2 همنام هستند نیروی وارد بر بار سوم در نقطه ای بین دو بار و نزدیک به بار کوچکتر از لحاظ قدر مطلق صفر میشود



$$q_1 = 10\mu C, q_2 = 90\mu C, q_3 = 30\mu C, d = 60\text{ cm}$$

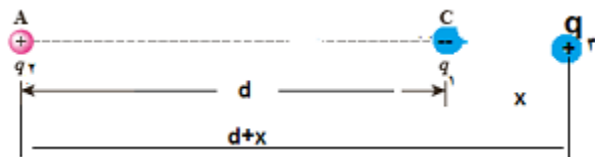
$$F_{13} = F_{23} \Rightarrow k \frac{|q_1| \cdot |q_3|}{r_{13}^2} = k \frac{|q_2| \cdot |q_3|}{r_{23}^2} \Rightarrow \frac{|q_1|}{r_{13}^2} = \frac{|q_2|}{r_{23}^2} \Rightarrow \frac{|q_1|}{|q_2|} = \frac{r_{13}^2}{r_{23}^2} \Rightarrow \frac{|q_1|}{|q_2|} = \frac{x^2}{(d-x)^2}$$

$$\frac{|q_1|}{|q_2|} \Rightarrow \frac{x^2}{(d-x)^2} \Rightarrow \frac{x}{(d-x)} = \pm \sqrt{\frac{|q_1|}{|q_2|}} \Rightarrow \frac{x}{(60-x)} = \sqrt{\frac{10\mu C}{90\mu C}} \Rightarrow \frac{x}{(60-x)} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3x = 60 - x$$

$$\Rightarrow 4x = 60 \Rightarrow x = \frac{60}{4} = 15\text{ cm}, \quad d - x = 60 - 15 = 45\text{ cm}$$

مثال: سه بار نقطه ای $q_1 = 10\mu C, q_2 = -40\mu C, q_3 = 10\mu C$ را در نظر بگیرید که در فاصله 60 cm از هم قرار دارند در چه فاصله ای از هریک از بارهای q_1, q_2 نیروی وارد بر بار q_3 صفر میشود.

چون دو بار کناری q_1, q_2 غیرهمنام هستند نیروی وارد بر بار سوم در نقطه ای خارج دو بار و نزدیک به بار کوچکتر از لحاظ قدر مطلق صفر میشود



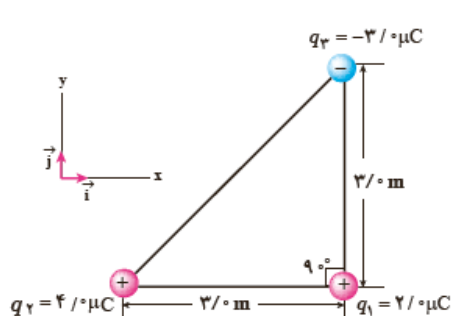
$$q_1 = 10\mu\text{C}, q_2 = 40\mu\text{C}, q_3 = 30\mu\text{C}, d = 60\text{cm}$$

$$F_{13} = F_{23} \Rightarrow k \frac{|q_1| \cdot |q_3|}{r_{13}^2} = k \frac{|q_2| \cdot |q_3|}{r_{23}^2} \Rightarrow \frac{|q_1|}{r_{13}^2} = \frac{|q_2|}{r_{23}^2} \Rightarrow \frac{|q_1|}{|q_2|} = \frac{r_{13}^2}{r_{23}^2} \Rightarrow \frac{|q_1|}{|q_2|} = \frac{x^2}{(d+x)^2}$$

$$\frac{|q_1|}{|q_2|} \Rightarrow \frac{x^2}{(d+x)^2} \Rightarrow \frac{x}{(d+x)} = \pm \sqrt{\frac{|q_1|}{|q_2|}} \Rightarrow \frac{x}{(60+x)} = \sqrt{\frac{10\mu\text{C}}{40\mu\text{C}}} \Rightarrow \frac{x}{(60+x)} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 60+x$$

$$\Rightarrow x = 60 \Rightarrow d + x = 60 + 60 = 120\text{cm}$$

مثال:



سه ذره باردار مطابق شکل روبه‌رو در سه رأس مثلث قائم‌الزاویه‌ای ثابت شده‌اند. نیروی الکتریکی خالص وارد بر ذره واقع در رأس قائمه را به‌دست آورده و اندازه این نیرو را محاسبه کنید.

پاسخ: نیروی الکتریکی بین بارهای q_1 و q_2 دافعه و نیروی بین بارهای q_1 و q_3 جاذبه است. با استفاده از رابطه ۱-۲ داریم:

$$F_{21} = k \frac{|q_2||q_1|}{r_{21}^2} = (9 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2) \frac{(2 \times 10^{-6} \text{ C})(4 \times 10^{-6} \text{ C})}{(3 \text{ m})^2} = 8 \times 10^{-3} \text{ N}$$

با توجه به دستگاه مختصات داده شده، $\vec{F}_{21}$ در جهت مثبت محور x است. بنابراین، $\vec{F}_{21} = (8 \times 10^{-3} \text{ N}) \vec{i}$ می‌شود. به همین ترتیب، برای نیروی بین بارهای q_2 و q_3 داریم:

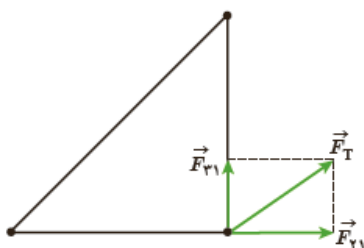
$$F_{32} = k \frac{|q_3||q_2|}{r_{32}^2} = (9 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2) \frac{(3 \times 10^{-6} \text{ C})(2 \times 10^{-6} \text{ C})}{(3 \text{ m})^2} = 6 \times 10^{-3} \text{ N}$$

با توجه به دستگاه مختصات داده شده، $\vec{F}_{32}$ در جهت مثبت محور y است. بنابراین، $\vec{F}_{32} = (6 \times 10^{-3} \text{ N}) \vec{j}$ می‌شود. پس برآیند نیروهای الکتریکی وارد بر بار q_1 برابر است با

$$\vec{F}_T = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{32} = (8 \times 10^{-3} \text{ N}) \vec{i} + (6 \times 10^{-3} \text{ N}) \vec{j}$$

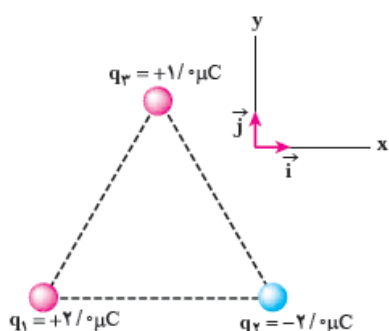
و بزرگی آن با استفاده از رابطه فیثاغورس، چنین به‌دست می‌آید:

$$F_T = \sqrt{F_{21}^2 + F_{32}^2} = \sqrt{(8 \times 10^{-3} \text{ N})^2 + (6 \times 10^{-3} \text{ N})^2} = 10 \times 10^{-3} \text{ N}$$



فیزیک ۲ (الکتریسیته و مغناطیس) جلسه ۲

مثال:



سه ذره باردار، مطابق شکل در سه رأس مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع $1/5\text{m}$ ثابت شده‌اند.

الف) نیرویی که بار q_1 بر بار q_3 وارد می‌کند $(\vec{F}_{13})$ را بر حسب بردارهای یکه $\vec{i}$ و $\vec{j}$ دستگاه مختصات نشان داده شده در شکل بنویسید.

ب) نیروی $\vec{F}_{23}$ را نیز بر حسب بردارهای یکه بنویسید.

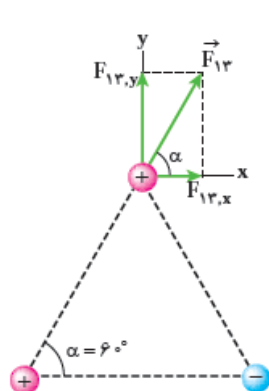
پ) برآیند نیروهای وارد بر بار q_3 را به دست آورید.

پاسخ:

الف) بزرگی نیرویی که بار q_1 بر بار q_3 وارد می‌کند را با استفاده از قانون کولن به دست می‌آوریم:

$$F_{13} = k \frac{|q_1| |q_3|}{r_{13}^2} = (9 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2) \frac{(2 \times 10^{-6} \text{ C})(1 \times 10^{-6} \text{ C})}{(1/5 \text{ m})^2}$$

$$= 1.8 \times 10^{-3} \text{ N}$$



همان‌طور که در شکل دیده می‌شود نیروی $\vec{F}_{13}$ دارای مؤلفه‌های x و y است، به‌طوری که:

$$F_{13,x} = F_{13} \cos \alpha = (1.8 \times 10^{-3} \text{ N}) \cos 60^\circ = 0.9 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$F_{13,y} = F_{13} \sin \alpha = (1.8 \times 10^{-3} \text{ N}) \sin 60^\circ = 1.56 \times 10^{-3} \text{ N}$$

بنابراین، نیروی $\vec{F}_{13}$ بر حسب بردارهای یکه به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\vec{F}_{13} = (0.9 \times 10^{-3} \text{ N}) \vec{i} + (1.56 \times 10^{-3} \text{ N}) \vec{j}$$

ب) مانند قسمت الف می‌توانیم بنویسیم:

$$F_{23} = k \frac{|q_2| |q_3|}{r_{23}^2} = (9 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2) \frac{(2 \times 10^{-6} \text{ C})(1 \times 10^{-6} \text{ C})}{(1/5 \text{ m})^2}$$

$$= 1.8 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$F_{23,x} = F_{23} \cos \beta = (1.8 \times 10^{-3} \text{ N}) \cos 60^\circ = 0.9 \times 10^{-3} \text{ N}$$

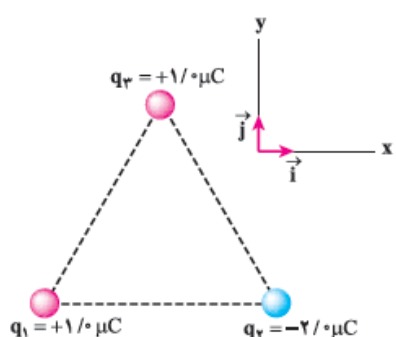
$$F_{23,y} = -F_{23} \sin \beta = -(1.8 \times 10^{-3} \text{ N}) \sin 60^\circ = -1.56 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$\vec{F}_{23} = (0.9 \times 10^{-3} \text{ N}) \vec{i} - (1.56 \times 10^{-3} \text{ N}) \vec{j}$$

پ) برآیند نیروهای الکتریکی وارد بر بار q_3 برابر است با

$$\vec{F}_{T3} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = (1.8 \times 10^{-3} \text{ N}) \vec{i}$$

مثال:



سه ذره باردار، مطابق شکل روبه‌رو در سه رأس مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $1/5\text{m}$ ثابت شده‌اند.

الف) نیرویی که بار q_1 بر بار q_3 وارد می‌کند ($\vec{F}_{13}$) را برحسب بردارهای یکه $\vec{i}$ و $\vec{j}$ دستگاه مختصات نشان داده شده در شکل بنویسید.

ب) نیروی $\vec{F}_{23}$ را نیز برحسب بردارهای یکه بنویسید.

پ) برآیند نیروهای وارد بر بار q_3 را به‌دست آورید.

ت) بزرگی بردار برآیند نیروهای وارد بر بار q_3 چقدر است و این بردار

چه زاویه‌ای با محور x می‌سازد؟

پاسخ:

الف) بزرگی نیرویی که بار q_1 بر بار q_3 وارد می‌کند را با استفاده از قانون کولن به‌دست می‌آوریم:

$$F_{13} = k \frac{|q_1||q_3|}{r_{13}^2} = (9 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2) \frac{(1 \times 10^{-6} \text{ C})(1 \times 10^{-6} \text{ C})}{(1/5 \text{ m})^2}$$

$$= 4/5 \times 10^{-3} \text{ N}$$

همان‌طور که در شکل دیده می‌شود نیروی $\vec{F}_{13}$ دارای مؤلفه‌های x و y است،

به‌طوری‌که:

$$F_{13,x} = F_{13} \cos \alpha = (4/5 \times 10^{-3} \text{ N}) \cos 60^\circ = 2/5 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$F_{13,y} = F_{13} \sin \alpha = (4/5 \times 10^{-3} \text{ N}) \sin 60^\circ = 3/5 \times 10^{-3} \text{ N}$$

بنابراین، نیروی $\vec{F}_{13}$ برحسب بردارهای یکه به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\vec{F}_{13} = (2/5 \times 10^{-3} \text{ N}) \vec{i} + (3/5 \times 10^{-3} \text{ N}) \vec{j}$$

ب) مانند قسمت الف می‌توانیم بنویسیم:

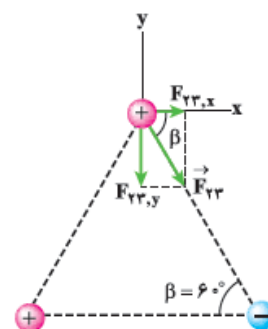
$$F_{23} = k \frac{|q_2||q_3|}{r_{23}^2} = (9 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2) \frac{(2 \times 10^{-6} \text{ C})(1 \times 10^{-6} \text{ C})}{(1/5 \text{ m})^2}$$

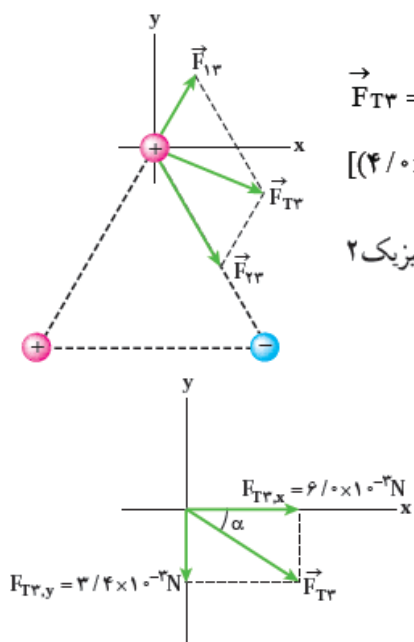
$$= 8/5 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$F_{23,x} = F_{23} \cos \beta = (8/5 \times 10^{-3} \text{ N}) \cos 60^\circ = 4/5 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$F_{23,y} = -F_{23} \sin \beta = -(8/5 \times 10^{-3} \text{ N}) \sin 60^\circ = -6/5 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$\vec{F}_{23} = (4/5 \times 10^{-3} \text{ N}) \vec{i} - (6/5 \times 10^{-3} \text{ N}) \vec{j}$$





پ) برآیند نیروهای وارد بر بار q_3 برابر است با

$$\vec{F}_{T3} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = [(2/0 \times 10^{-3} \text{ N}) \vec{i} + (3/5 \times 10^{-3} \text{ N}) \vec{j}] + [(4/0 \times 10^{-3} \text{ N}) \vec{i} - (6/9 \times 10^{-3} \text{ N}) \vec{j}] = (6/0 \times 10^{-3} \text{ N}) \vec{i} - (3/4 \times 10^{-3} \text{ N}) \vec{j}$$

بردار نیروی برآیند $\vec{F}_{T3}$ با استفاده از روش متوازی الاضلاع که در کتاب فیزیک ۲ و آزمایشگاه آموختید در شکل روبه‌رو رسم شده است.

ت) بردار نیروی برآیند $\vec{F}_{T3}$ که در شکل قبل دیدیم را جداگانه همراه با محورها x و y در شکل روبه‌رو به مقیاس رسم می‌کنیم. در این شکل α زاویه‌ای است که $\vec{F}_{T3}$ با محور x می‌سازد.

نخست با استفاده از قضیه فیثاغورس بزرگی $\vec{F}_{T3}$ را به دست می‌آوریم

$$F_{T3} = \sqrt{F_{T3,x}^2 + F_{T3,y}^2} = \sqrt{(6/0 \times 10^{-3} \text{ N})^2 + (-3/4 \times 10^{-3} \text{ N})^2} = 6/9 \times 10^{-3} \text{ N}$$

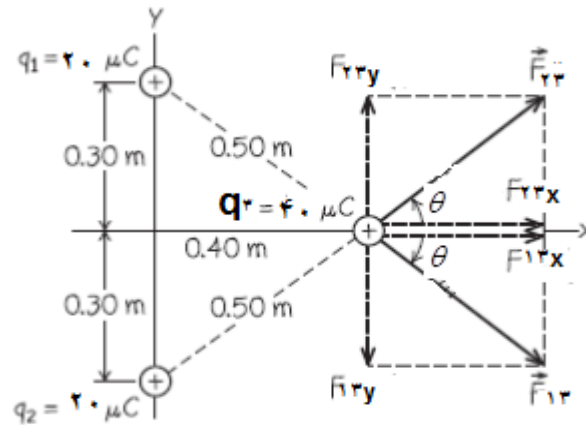
و با استفاده از شکل، می‌توانیم تانژانت زاویه α را محاسبه کنیم:

$$\tan \alpha = \frac{F_{T3,y}}{F_{T3,x}} = \frac{-3/4 \times 10^{-3} \text{ N}}{6/0 \times 10^{-3} \text{ N}} = -0/57$$

با توجه به مقدار به دست آمده برای $\tan \alpha$ ، زاویه α می‌تواند -3° یا $+15^\circ$ باشد. در چنین مواردی با توجه به شکل مسئله مقدار درست زاویه α را می‌یابیم. در این مسئله با توجه به شکل $\alpha = -3^\circ$ می‌شود.

مثال:

دو بار الکتریکی $q_1 = q_2 = 20 \mu\text{C}$ به فاصله 60 cm از یکدیگر قرار گرفته اند نیروی وارد بر بار $q_3 = 40 \mu\text{C}$ که در فاصله 40 cm روی عمود منصف دوبار قرار گرفته چقدر است



$$r_{13} = r_{23} = r = \sqrt{0.3^2 + 0.4^2} = 0.5 \text{ m}$$

$$F_{13} = F_{23} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{20 \times 10^{-6} \times 40 \times 10^{-6}}{0.5^2} = 28.8 \text{ N}$$

$$\sin \theta = \frac{0.3}{0.5} = 0.6, \cos \theta = \frac{0.4}{0.5} = 0.8$$

$$F_y = F_{23y} - F_{13y} = F_{23} \cdot \sin \theta - F_{13} \cdot \sin \theta = 28.8 \times 0.6 - 28.8 \times 0.6 = 0$$

$$F_x = F_{23x} + F_{13x} = F_{23} \cdot \cos \theta + F_{13} \cdot \cos \theta = 28.8 \times 0.8 + 28.8 \times 0.8 = 23.04 + 23.04 = 46.08 \text{ N}$$

$$F_T = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} = 46.08 \vec{i} + 0 \vec{j} \Rightarrow |F_T| = \sqrt{46.08^2 + 0^2} = 46.08 \text{ N}$$

روش کوتاه: چون دو بار هم نام هستند از رابطه جمع دو بردار مساوی میتوان حل کرد

$$F_T = 2F \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = 2F \cdot \cos \theta = 2 \times 28.8 \times 0.8 = 46.08 \text{ N}$$

شدت میدان الکتریکی: مقدار نیرویی که به واحد بار الکتریکی واقع در نقطه مورد نظر وارد میشود. و با حرف E نشان

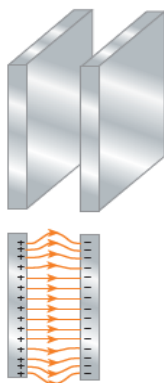
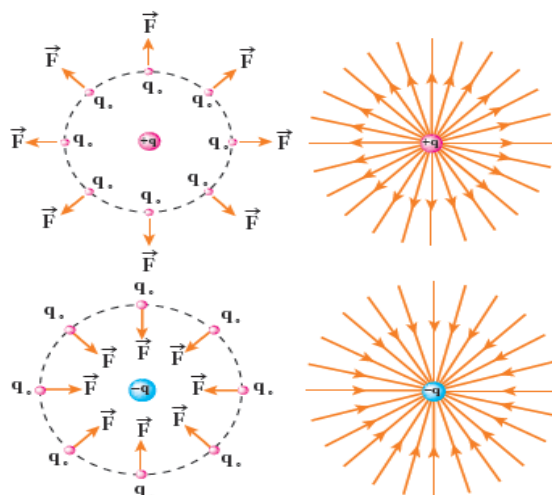
میدهم و از رابطه $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$ بدست می آید. و کمیتی برداری است.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{k \frac{q \cdot q_0}{r^2}}{q_0} \Rightarrow \vec{E} = k \frac{q}{r^2}$$

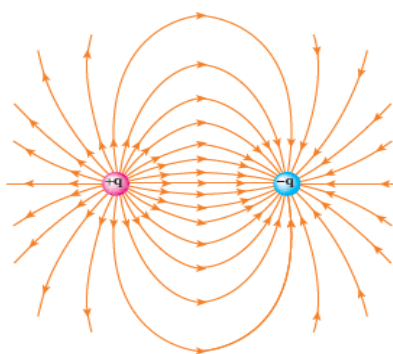
$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

E: شدت میدان الکتریکی بر حسب $\frac{N}{C}$ q: بار بر حسب C r: فاصله بر حسب m

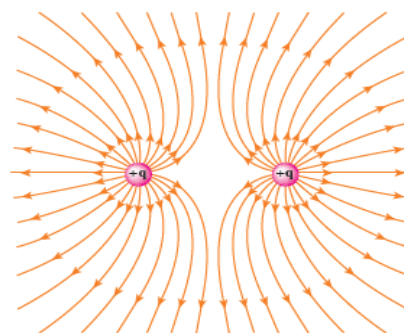
برای تعیین جهت میدان الکتریکی بار آزمون را بار مثبت یک کولن در نظر گرفته میشود بنابراین جهت میدان الکتریکی بار مثبت رو به بیرون و جهت میدان الکتریکی بار منفی بطرف بار منفی است.



پ) میدان بین دو صفحه رسانای موازی با بارهای هم اندازه و ناهم نام (نمونه ای از یک میدان یکنواخت)



ب) دو بار الکتریکی ناهم نام و هم اندازه



الف) دو بار الکتریکی مثبت و هم اندازه

شکل ۱-۱ میدان الکتریکی در اطراف چند جسم باردار

مثال:

برای تعیین میدان الکتریکی در نقطه ای از فضا بار آزمون $+2 \times 10^{-9} \text{ C}$ را در آن نقطه قرار می دهیم. نیروی الکتریکی $5/0 \times 10^{-3} \text{ N}$ در راستای جنوب - شمال و به طرف شمال بر این بار وارد می شود. بزرگی و جهت میدان الکتریکی در این نقطه را مشخص کنید.

پاسخ: از رابطه ۲-۳ می توان بزرگی میدان الکتریکی در نقطه مورد نظر را محاسبه کرد.

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{5/0 \times 10^{-3} \text{ N}}{20 \times 10^{-9} \text{ C}} = 2/5 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

جهت میدان در نقطه مورد نظر هم جهت با نیروی وارد بر بار آزمون، یعنی رو به شمال است.

مثال:

بزرگی میدان الکتریکی ذره‌ای با بار $2 \times 10^{-6} \text{ C}$ را در نقطه M به فاصله 2 m (الف) و 4 m (ب) از این بار الکتریکی محاسبه کنید و بردار میدان را در این نقطه برای حالت الف رسم کنید.

پاسخ: با استفاده از رابطه ۲-۴ اندازه میدان را در نقطه‌های مورد نظر، به دست می‌آوریم:

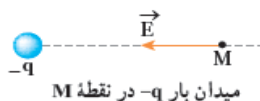
$$E = k \frac{|q|}{r^2} \quad \text{(الف)}$$

$$E_1 = (9 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2) \frac{(2 \times 10^{-6} \text{ C})}{(2 \text{ m})^2} = 4.5 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

(ب)

$$E_2 = (9 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2) \frac{(2 \times 10^{-6} \text{ C})}{(4 \text{ m})^2} = 1.125 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

برای رسم بردار میدان در نقطه M بار آزمونی را در آن نقطه فرض می‌کنیم. چون بار q منفی است، بار آزمون فرضی را جذب می‌کند. میدان بار q در جهت همین نیروست که در شکل زیر نشان داده شده است.



مثال:

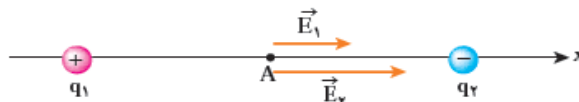
دو ذره با بارهای $q_1 = 4 \times 10^{-6} \text{ C}$ ، $q_2 = -6 \times 10^{-6} \text{ C}$ در فاصله 8 m از یکدیگر ثابت شده‌اند. بزرگی میدان الکتریکی را در نقطه‌های زیر به دست آورید:

(الف) در وسط خط واصل دو ذره،

(ب) در نقطه‌ای به فاصله 8 m از بار q_1 و 16 m از بار q_2 و روی خط واصل دوبار.

پاسخ: در غیاب هر یک از دو بار، میدان حاصل از بار دیگر را محاسبه می‌کنیم. میدان حاصل از مجموعه دو بار، برآیند این دو میدان خواهد بود.

(الف) در شکل زیر اگر بار آزمون را در نقطه A واقع در وسط خط واصل دو ذره قرار دهیم، بار q_1 آن را می‌راند و بار q_2 آن را می‌رباید. بنابراین، همان‌طور که شکل نشان می‌دهد، $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ در نقطه A هم‌جهت و به سوی بار q_2 (در سوی مثبت محور x) هستند.



با استفاده از اصل برهم نهی میدان‌های الکتریکی داریم:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_1 \vec{i} + E_2 \vec{i}$$

مقادیر E_1 و E_2 را با استفاده از رابطه ۲-۴ ($E = k|q|/r^2$) به دست می‌آوریم:

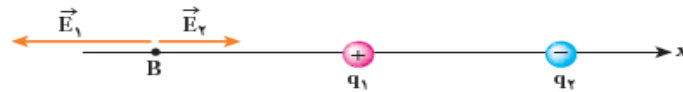
$$E_1 = k \frac{|q_1|}{r_1^2} = (9 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2) \frac{(4 \times 10^{-6} \text{ C})}{(4 \text{ m})^2} = 2.25 \times 10^3 \text{ N/C}$$

$$E_r = k \frac{|q_r|}{r_r^2} = (9 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2) \frac{(6 \times 10^{-6} \text{ C})}{(4 \times 10^{-2} \text{ m})^2} = 3.4 \times 10^3 \text{ N/C}$$

بنابراین:

$$\vec{E}_A = (2.2 \times 10^3 \text{ N/C}) \vec{i} + (3.4 \times 10^3 \text{ N/C}) \vec{i} = (5.6 \times 10^3 \text{ N/C}) \vec{i}$$

ب) اکنون اگر بار آزمون را در نقطه B قرار دهیم شکل میدان‌ها به صورت زیر در می‌آید:



با استفاده از اصل برهم نهی میدان‌های الکتریکی داریم:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_r = -E_1 \vec{i} + E_r \vec{i}$$

که در آن E_1 و E_r برابرند با

$$E_1 = k \frac{|q_1|}{r_1^2} = (9 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2) \frac{(4 \times 10^{-6} \text{ C})}{(8 \times 10^{-2} \text{ m})^2} = 5.6 \times 10^3 \text{ N/C}$$

$$E_r = k \frac{|q_r|}{r_r^2} = (9 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2) \frac{(6 \times 10^{-6} \text{ C})}{(16 \times 10^{-2} \text{ m})^2} = 2.1 \times 10^3 \text{ N/C}$$

بنابراین:

$$\vec{E}_B = (-5.6 \times 10^3 \text{ N/C}) \vec{i} + (2.1 \times 10^3 \text{ N/C}) \vec{i} = (-3.5 \times 10^3 \text{ N/C}) \vec{i}$$

مثال:

دو ذره با بارهای $q_1 = +5 \text{ nC}$ و $q_2 = -5 \text{ nC}$ در فاصله $a = 16 \text{ cm}$ از یکدیگر ثابت شده‌اند. میدان الکتریکی را روی عمود منصف خطی که دو ذره را به یکدیگر وصل می‌کند و به فاصله $x = 6 \text{ cm}$ از وسط خط واصل دو ذره، به دست آورید. به مجموعه این دو بار الکتریکی، **دو قطبی الکتریکی** گفته می‌شود.

پاسخ: همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، میدان الکتریکی حاصل از این دو بار، در نقطه موردنظر هم‌اندازه‌اند.

$$r_1 = r_2 = \sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{(16 \text{ cm})^2 + (6 \text{ cm})^2} = 17 \text{ cm}$$

با استفاده از رابطه ۲-۴ داریم:

$$E = k \frac{|q|}{r^2}$$

$$E_1 = E_2 = (9 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2) \frac{(5 \times 10^{-9} \text{ C})}{(17 \times 10^{-2} \text{ m})^2} = 1.5 \times 10^4 \text{ N/C}$$

در نتیجه برای مؤلفه در نقطه M داریم:

$$E_{1x} = -E_{2x} = E_1 \cos \theta$$

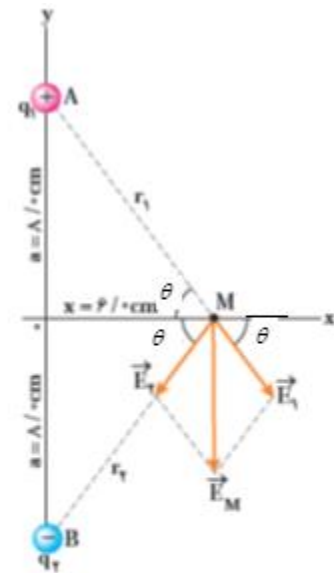
$$\cos \theta = \frac{x}{r_1} = \frac{6 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 0.6$$

$$E_{1x} = -E_{2x} = (4/5 \times 10^4 \text{ N/C})(0.6) = 4.8 \times 10^4 \text{ N/C}$$

$$E_{1y} = E_{2y} = -E_1 \sin \theta$$

$$\sin \theta = \frac{a}{r} = \frac{8 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 0.8$$

$$E_{1y} = E_{2y} = -(4/5 \times 10^4 \text{ N/C})(0.8) = -6.4 \times 10^4 \text{ N/C}$$



با توجه به اینکه $E_{1x} = -E_{2x}$ است، مؤلفه x میدان الکتریکی برآیند صفر است، و با توجه به اینکه $E_{1y} = E_{2y}$ است، مؤلفه y میدان الکتریکی برآیند $2E_{1y}$ است و داریم:

$$\vec{E} = 2E_{1y} \hat{j} = 2 \times (-6.4 \times 10^4 \text{ N/C}) \hat{j} = (-1.28 \times 10^5 \text{ N/C}) \hat{j}$$

روش کوتاه:

$$E_T = 2E_1 \sin \frac{\alpha}{2} = 2E_1 \sin \theta = 2 \times 4/5 \times 10^4 \times 0.8 = 1.28 \times 10^5 \text{ N/C}$$

مثال:

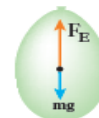
در بادکنکی به جرم 1 g و بار الکتریکی 200 nC ایجاد می‌کنیم و آن را در یک میدان الکتریکی خارجی قرار می‌دهیم، به طوری که نیروی وزن بادکنک با نیروی الکتریکی وارد بر آن موازنه شود. بزرگی و جهت این میدان الکتریکی را تعیین کنید. ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$)

پاسخ: برای اینکه نیروی الکتریکی با وزن بادکنک موازنه شود باید نیروی الکتریکی در خلاف جهت وزن بادکنک به آن وارد شود و بزرگی آن با وزن بادکنک برابر باشد:

$$F_E = mg$$

$$|q|E = mg$$

$$\Rightarrow E = \frac{mg}{|q|} = \frac{(1 \times 10^{-3} \text{ kg})(9.8 \text{ N/kg})}{200 \times 10^{-9} \text{ C}} = 4.9 \times 10^5 \text{ N/C}$$



با توجه به رابطه $\vec{F} = q\vec{E}$ و منفی بودن q ، جهت میدان الکتریکی در خلاف جهت نیروی الکتریکی و بنابراین، مستقیماً روبه پایین است.

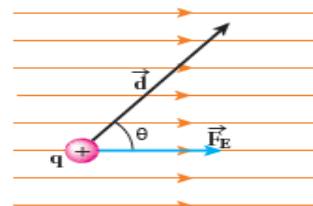
انرژی پتانسیل الکتریکی

تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی یک ذره بار دار الکتریکی در میدان الکتریکی E در یک جابجایی مشخص برابر منفی کار انجام شده توسط نیروی الکتریکی در همان جابجایی است.

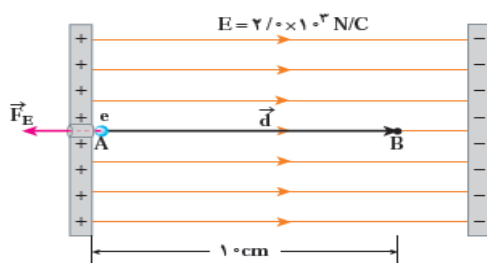
$$\Delta U_E = -W_E$$

$$W_E = F_E d \cos \theta = |q| E d \cos \theta$$

$$\Delta U_E = -W_E = -|q| E d \cos \theta$$



مثال:



در میدان الکتریکی یکنواخت نشان داده شده در شکل، الکترونی از نقطه A با سرعت v پرتاب شده است. الکترون سرانجام در نقطه B متوقف می‌شود. بار الکترون $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ و جرم آن $9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ است.

الف) تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی الکترون در این جابجایی

چه مقدار است؟

ب) سرعت پرتاب الکترون را پیدا کنید.

پاسخ:

الف) با توجه به رابطه ۸-۲ داریم:

$$\Delta U_E = -|q| E d \cos \theta = -(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(2.0 \times 10^3 \text{ N/C})(1.0 \times 10^{-2} \text{ m})(\cos 180^\circ) \\ = 3.2 \times 10^{-17} \text{ J}$$

ب) طبق قضیه کار و انرژی می‌توان نوشت:

$$W_E = \Delta K \Rightarrow -\Delta U_E = \frac{1}{2} m (0 - v^2) \\ -3.2 \times 10^{-17} \text{ J} = \frac{1}{2} (9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})(-v^2) \Rightarrow v = 8.4 \times 10^6 \text{ m/s}$$

فیزیک ۲ (الکتریسیته و مغناطیس) جلسه ۳

مثال: پروتونی که به موازات میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E} = 10^3 \vec{i} \frac{N}{C}$ در حرکت است مسافتی معادل $4m$ را می پیماید

اگر سرعت ابتدایی الکترون $10^6 \frac{m}{s}$ باشد سرعت نهایی چقدر میشود

$$m_p = 1/67 \times 10^{-27} Kg, e_p = q = 1/6 \times 10^{-19} C, E = 10^3 \frac{N}{C}$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{E \cdot q}{m} = \frac{10^3 \times 1/6 \times 10^{-19}}{1/67 \times 10^{-27}} = 9/6 \times 10^{10} \frac{m}{s^2}$$

$$v_f^2 - v_i^2 = 2 \cdot a \cdot \Delta x \Rightarrow v_f^2 = v_i^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta x = (10^6)^2 + 2 \times 9/6 \times 10^{10} \times 4 \times 10^{-2} = 1/77 \times 10^{10}$$

$$v_f = \sqrt{1/77 \times 10^{10}} = 1/33 \times 10^5 \frac{m}{s}$$

بارهای گسترده:

همانگونه که میدانیم شدت میدان الکتریکی بارهای نقطه ای از رابطه $E = k \frac{q}{r^2}$ بدست می آید ولی در بارهای

پیوسته بار را به کوچکترین جزء dq در نظر گرفته و $dE = k \frac{dq}{r^2}$ را محاسبه میکنیم. و با انتگرال گیری از dE مقدار E را محاسبه میکنیم

چگالی خطی بار: مقدار بار واحد طول را چگالی خطی بار گویند. و از رابطه $\lambda = \frac{q}{L}$ بدست می آید و چون

$$\lambda = \frac{q}{L} \Rightarrow q = \lambda \cdot L \Rightarrow dq = \lambda \cdot dL$$

چگالی خطی بار ثابت در نظر گرفته میشود.

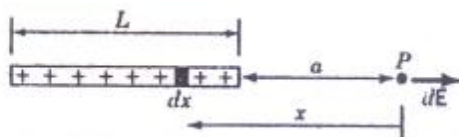
چگالی سطحی بار: مقدار بار واحد طول را چگالی سطحی بار گویند. و از رابطه $\sigma = \frac{q}{A}$ بدست می آید و چون چگالی

$$\sigma = \frac{q}{A} \Rightarrow q = \sigma \cdot A \Rightarrow dq = \sigma \cdot dA$$

سطحی بار ثابت در نظر گرفته میشود.

مثال ۶.۲: میله نازک عایقی را در نظر بگیرید که بار الکتریکی Q به طور یکنواخت در طول آن، L ، توزیع شده است. شدت میدان را در نقطه‌ای به فاصله a از یک سر میله، در امتداد محور آن، پیدا کنید.

حل: نخست باید میدان ناشی از بار موجود در جزء طول dx را، مطابق شکل ۱۵.۲، پیدا کنیم. چون می‌دانیم $\frac{dq}{Q} = \frac{dx}{L}$ ، بار موجود روی این جزء طول عبارت است از $dq = \lambda dx$ ، که در آن



شکل ۱۵.۲ برای تعیین میدان ناشی از میله باردار، میله را به جزء طولهای بی‌نهایت کوچک dx به بار الکتریکی $dq = (Q/L) dx$ تقسیم می‌کنیم.

$\lambda = \frac{Q}{L}$ چگالی خطی بار الکتریکی است. شدت میدان ناشی از این جزء بار در نقطه P چنین می‌شود

$$dE = \frac{k(\lambda dx)}{x^2}$$

و جهت آن، به فرض مثبت بودن λ ، به طرف راست محور است. با انتگرال‌گیری از dE در طول میله می‌توان شدت میدان کل میله را به دست آورد

$$\begin{aligned} E &= k\lambda \int_a^{a+L} \frac{dx}{x^2} \\ &= k\lambda \left[-\frac{1}{x} \right]_a^{a+L} = k\lambda \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+L} \right) = \frac{kQ}{a(a+L)} \end{aligned}$$

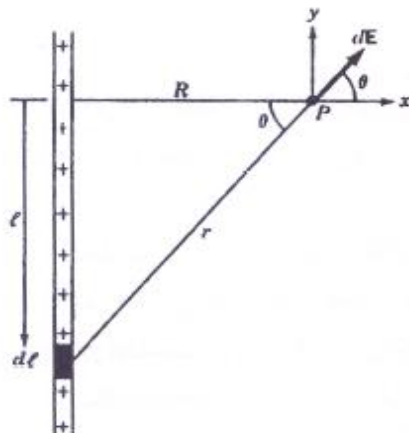
که در آن $Q = \lambda L$ است. در فواصل بسیار دور از میله (یعنی $a \gg L$)، می‌توان در مقابل a از L صرف‌نظر کرد. در این صورت، داریم $E = \frac{kQ}{a^2}$. همچنانکه انتظار می‌رود، میدان ناشی از میله باردار در فواصل بسیار دور همانند میدان ناشی از بار نقطه‌ای است. برای بررسی عبارتهای جبری و حصول اطمینان از سازگاری آنها، همیشه می‌توان از این آزمونها استفاده کرد.

مثال ۷.۲: شدت میدان در فاصله R از یک محور باردار بی نهایت بلند، که چگالی خطی بار آن برابر $(\frac{C}{m})$ است، چقدر می شود؟

حل: میدان جزئی ناشی از جزء طول dl در نقطه P ، مطابق شکل ۱۶.۲، عبارت است از

$$dE = \frac{k\lambda dl}{r^2}$$

$$r = R \cdot \sec \theta, L = R \cdot \tan \theta \Rightarrow dL = R \cdot \sec^2 \theta$$



شکل ۱۶.۲ برای تعیین میدان ناشی از یک محور باردار بی نهایت بلند، متغیرهای l و r را برحسب متغیر θ می نویسیم.

$$dE = \frac{k\lambda d\theta}{R}$$

به ازای هر جزء باری که روی نیم محور $+y$ در نظر بگیریم، یک جزء بار متقارن روی نیم محور $-y$ وجود دارد. مؤلفه های y میدان ناشی از این زوج بارها متقابلاً یکدیگر را خنثی می کنند. بدین سان، میدان برآیند عمود بر محور باردار، یعنی در راستای x ، قرار خواهد داشت. با توجه به شکل ۱۶.۲، معلوم می شود که $dE_x = dE \cos \theta$. میدان کل ناشی از محور باردار با انتگرال از همین مؤلفه، از $-\theta_1$ تا θ_2 ، به دست می آید

$$E = \frac{k\lambda}{R} \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta = \frac{k\lambda}{R} [\sin \theta]_{-\theta_1}^{\theta_2}$$

$$= \frac{k\lambda}{R} (\sin \theta_2 + \sin \theta_1)$$

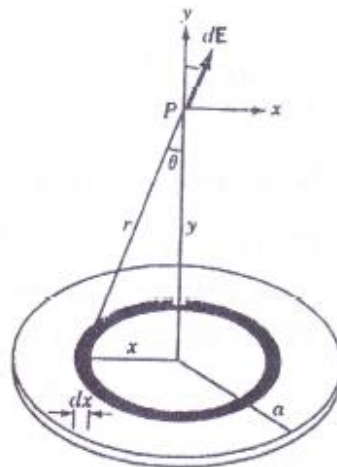
برای محور باردار بی نهایت بلند، داریم $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ ؛ در نتیجه

$$E = \frac{2k\lambda}{R} \quad (9.2)$$

همچنانکه می بینیم، این میدان متناسب با $\frac{1}{R}$ کاهش می یابد. چون محور باردار بی نهایت بلند در نظر گرفته شده است، میدان حاصل هرگز مانند میدان بار نقطه ای متناسب با $\frac{1}{r^2}$ کاهش نخواهد یافت. خطوط میدان حول تمامی نقاط محور باردار به صورت شعاعی ظاهر می شوند.

مثال ۸.۲: قرص نارسانایی را به شعاع a و چگالی بار سطحی $\sigma \frac{C}{m^2}$ در نظر بگیرید. شدت میدان را در نقطه‌ای به فاصله y از قرص، در امتداد محور مرکزی آن، به دست آورید.

حل: تقارن دایره‌ای قرص نشان می‌دهد که جزء بار را باید، مطابق شکل ۱۷.۲، به صورت حلقه‌ای به شعاع x و پهنای dx برگزید. تمامی نقاط این حلقه از نقطه P به یک فاصله‌اند. اگر مؤلفه میدان موازی با سطح قرص را در نظر بگیریم، هر جزئی از این مؤلفه که از ناحیه خاصی از حلقه ناشی شود با جزء مساوی و مختلف‌الجهتی که از ناحیه قرینه قطری روی حلقه حاصل می‌شود خنثی خواهد شد. بنابراین، با توجه به تقارن می‌توانیم بگوییم که میدان هیچ مؤلفه‌ای به موازات سطح قرص نخواهد داشت؛ یعنی $E_x = 0$.



شکل ۱۷.۲ میدان ناشی از قرص باردار یکنواخت. جزء بار به صورت حلقه‌ای به شعاع x و پهنای dx در نظر گرفته می‌شود که حاوی بار $dq = \sigma dA$ است.

مؤلفه y میدان عبارت است از

$$dE_y = dE \cos \theta = \frac{k dq}{r^2} \frac{y}{r}$$

که در آن داریم $r^2 = x^2 + y^2$ و $dq = \sigma \cdot dA = \sigma (2\pi x dx)$ جزء بار روی حلقه است. اکنون،

میدان کل را با انتگرال گیری از تمامی حلقه های روی قرص به دست می آوریم

$$E = \pi k \sigma y \int_0^a \frac{x dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \pi k \sigma y \int_0^a \frac{d(x^2)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$= \pi k \sigma y \left[\frac{-2}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \right]_0^a = 2\pi k \sigma \left[1 - \frac{y}{(a^2 + y^2)^{1/2}} \right]$$

هنگامی که چنین عبارتهایی را به دست می آوریم، لازم است که درستی شان را از نظر ابعادی آزمایش کنیم. به ویژه اینکه، جمله دوم درون کروشه باید بدون بعد باشد. (چرا؟) آزمون دیگر را به این ترتیب در نظر می گیریم که به ازای مقادیر بسیار بزرگ y ، مقدار این عبارت باید به صورت میدان حاصل از بار نقطه ای درآید. می دانیم که به ازای مقادیر کوچک z می توانیم از بسط دو جمله ای $(1+z)^n \approx 1 + nz$ استفاده کنیم. جمله دوم درون کروشه را می توان به صورت $y(a^2 + y^2)^{-1/2} = (1 + \frac{a^2}{y^2})^{-1/2}$ نوشت. هنگامی که $y \gg a$ باشد، با استفاده از بسط دو جمله ای خواهیم داشت

$$(1 + \frac{a^2}{y^2})^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} (\frac{a^2}{y^2}) + \dots$$

با قرار دادن این عبارت در نتیجه بالا و استفاده از $Q = \sigma \pi a^2$ به دست می آوریم

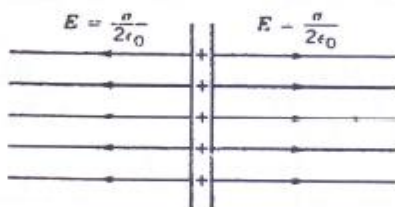
$$E \longrightarrow \frac{kQ}{y^2}$$

که همان میدان ناشی از بار نقطه ای است.

■

مثال ۹.۲: میدان ناشی از (الف) یک صفحه باردار نامتناهی به چگالی بار سطحی $+\sigma$ ، و (ب) دو صفحه موازی نامتناهی با چگالی بارهای $+\sigma$ و $-\sigma$ را پیدا کنید.

حل: (الف) در این مورد می توانیم از نتیجه مثال ۸.۲، میدان ناشی از قرص باردار، استفاده کنیم. در حد $a \rightarrow \infty$ ، جمله دوم درون کروشه به طرف صفر میل می کند و خواهیم داشت



شکل ۱۸.۲ میدان ناشی از صفحه باردار نامتناهی، یکنواخت است.

$$E = \lim_{a \rightarrow \infty} \pi k \sigma \left[1 - \frac{y}{(a^2 + y^2)^{1/2}} \right] = \pi k \sigma$$

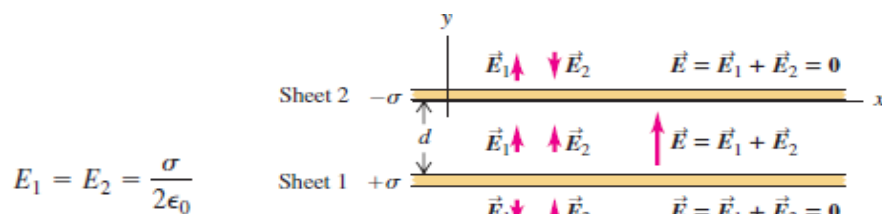
یا

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (۱۰.۲)$$

که در آن از $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ استفاده کرده ایم. این نمونه ای از میدان یکنواخت است؛ یعنی میدانی که هم بزرگی و هم جهت ثابت دارد (شکل ۱۸.۲). (ب) در شکل ۱۹.۲- الف، دو صفحه موازی نامتناهی را با چگالی بارهای متساوی و مختلف علامت نشان داده ایم. خطوط میدان هر یک از صفحات به صورت خط چین یا نقطه چین نموده شده است. خطوط میدان در ناحیه میان دو صفحه هم جهت اند، و بنابراین اثر یکدیگر را تقویت می کنند. در نواحی بیرون از فاصله میان صفحات، اثر میدانها متقابلاً خنثی می شود. میدان برابند در فاصله میان دو صفحه، مطابق شکل ۱۹.۲- ب، عبارت است از

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (۱۱.۲)$$

بزرگی این میدان یکنواخت، درست دو برابر میدان ناشی از یک صفحه باردار منفرد نامتناهی است.



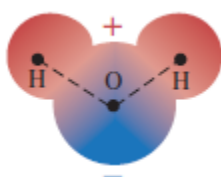
$$E_1 = E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

بنابر این

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \begin{cases} 0 & \text{above the upper sheet} \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{j} & \text{between the sheets} \\ 0 & \text{below the lower sheet} \end{cases}$$

دوقطبی: زوجی از بارهای مساوی و مختلف علامت را که به فاصله d از یکدیگر قرار گرفته باشند را دو قطبی الکتریکی گویند. هر مولکولی که مراکز بارهای $+$ و $-$ آنها بر هم منطبق نباشد میتواند یک دو قطبی در نظر گرفت مانند H_2O, CO, HCL که مولکول قطبی نامیده میشوند

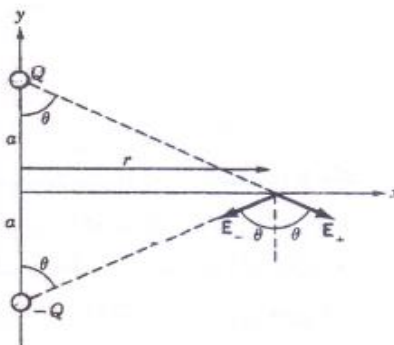
مولکول آب



میدان ناشی از دو قطبی که جلسه قبل اثبات شده بود

در شکل ۲۱.۲، یک دو قطبی متشکل از بارهای Q و $-Q$ را به ترتیب در نقاط (a, θ) و $(-a, -\theta)$ نشان داده‌ایم. می‌خواهیم میدان الکتریکی را در نقطه‌ای به فاصله r از خط واصل میان Q و $-Q$ و روی عمود منصف آن پیدا کنیم. میدانهای ناشی از این بارها، در هر نقطه‌ای از محور x بزرگی یکسان دارند

$$E_+ = E_- = \frac{kQ}{r^2 + a^2}$$



شکل ۲۱.۲ تعیین میدان روی عمود منصف یک دو قطبی.

چون زاویه‌های این دو میدان نسبت به محور y یکسان هستند، مؤلفه‌های x آنها اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند. مؤلفه قائم میدان برآیند عبارت است از

$$E_y = -(E_+ + E_-) \cos \theta$$

$$= - \frac{2KaQ}{(r^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{-2KaQ}{(r^2 + a^2)^{3/2}}$$

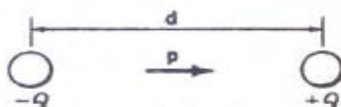
تعریف گشتاور: عاملی که باعث دوران یک جسم حول محور خود میشود را دوران گویند. و از ضرب برداری نیرو و شعاع بدست می آید $\vec{\tau} = \vec{F} \times \vec{r} = Fr \sin \theta$ گشتاور جفت نیرو یا زوج نیرو دو برابر این مقدار است

گشتاور دو قطبی الکتریکی p را به صورت حاصلضرب مقدار یکی از بارها در فاصله میان آنها تعریف می کنیم

$$p = Qd \quad (12.2)$$

در اینجا $d = 2a$ می شود. همچنانکه در شکل ۲۲.۲ نشان داده شده است، این گشتاور را به

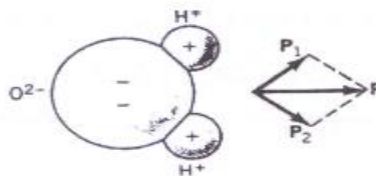
صورت برداری در نظر می گیریم که جهت آن از بار منفی به طرف بار مثبت است.



شکل ۲۲.۲ گشتاور دو قطبی را به صورت $p = Qd$ تعریف می کنیم.

یکی گشتاور دو قطبی الکتریکی در دستگاه بین المللی، کولن متر (C.m) است. هنگامی که توزیع بار در سه نقطه متمرکز شود، مانند مورد مولکول آب در شکل ۲۳.۲، گشتاور برآیند را از جمع برداری دو گشتاور دو قطبی به دست می آوریم. در فواصل بسیار دور از دو قطبی (یعنی $r \gg a$)، می توان در برابر a از r صرف نظر کرد و در نتیجه $r^3 \rightarrow r^2 + a^2$ در این صورت، عبارت E_y بزرگی برآیند «میدان دور» را روی خط عمود منصف نشان می دهد

$$E = \frac{kp}{r^3} \text{ و } r \gg a \quad (13.2)$$



شکل ۲۳.۲ گشتاور برآیند دو قطبی از جمع برداری گشتاور دو قطبیهها حاصل می شود.

میدان برآیند در این حالت با عکس مکعب فاصله متناسب است، که در مقایسه با بار نقطه ای سریعتر به سمت صفر میل می کند. دلیل این امر را باید در حذف متقابل بعضی از مؤلفه ها به خاطر علامت مخالف بارها جستجو کرد. در خودآزمایی ۵ از شما خواسته می شود که نشان دهید «میدان دور» یک دو قطبی در امتداد محور آن عبارت است از

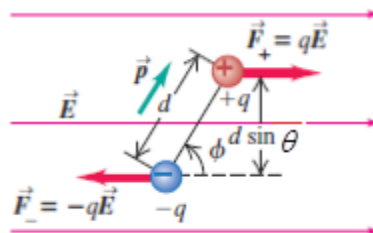
$$E = \frac{2kp}{r^3} \text{ و } r \gg a \quad (14.2)$$

گشتاور نیرو در میدان یکنواخت:

در اینجا گشتاور زوج نیرو اجاد شده است

$$\vec{\tau} = \vec{F} \times \vec{r} = Fr \sin \theta$$

$$\tau = 2(Eq)\left(\frac{d}{2} \sin \theta\right) = pE \sin \theta \Rightarrow \vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$



انرژی پتانسیل دو قطبی

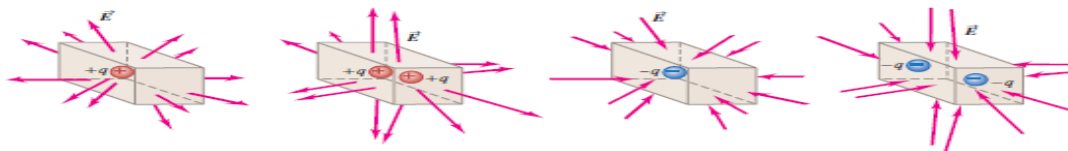
$$w = \int -\tau d\theta = -\int_{\theta_2}^{\theta_1} pE \sin \theta = pE (-\cos \theta_2 + \cos \theta_1)$$

برای راحتی محاسبات فرض میکنیم

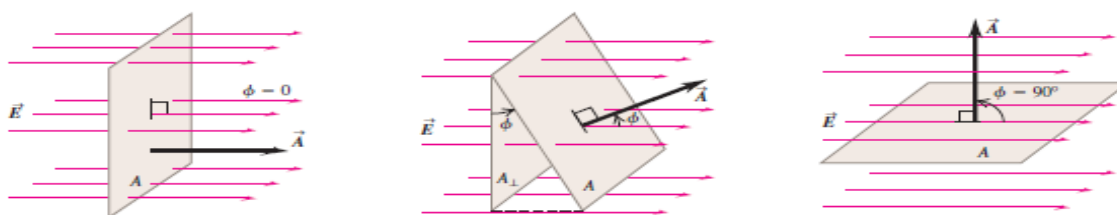
$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad E_1 = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{p} \cdot \vec{E}}{pE}$$

فیزیک الکتریسیته و مغناطیس جلسه چهارم

شار الکتریکی: شار الکتریکی معیاری برای توزیع میدان الکتریکی در یک سطح معین است. شار الکتریکی را با Φ_E نشان می‌دهند. به میزان خطوطی از میدان الکتریکی که از یک منبع و به صورت عمود بر یک صفحه می‌گذرند، شار الکتریکی گذرنده از آن سطح گفته می‌شود.



قانون گاوس: ارتباط بین توزیع بار الکتریکی و میدان الکتریکی را نشان می‌دهد. شار الکتریکی Φ_E به میزان خطوطی از میدان الکتریکی که از یک منبع و به صورت عمود بر یک صفحه می‌گذرند، شار الکتریکی گذرنده از آن سطح گفته می‌شود. و چنین تعریف می‌شود

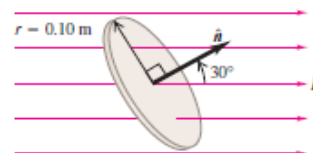
$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos \phi$$


$$a) \Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos \phi = EA \cos 0 = EA$$

$$b) \Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos \phi = EA \cos \phi$$

$$c) \Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos \phi = EA \cos 90 = 0$$

مثال: یک صفحه به شکل دایره به شعاع ۱۰ سانتیمتر عمود بر خطوط میدان الکتریکی $2 \times 10^3 \frac{N}{C}$ قرار گرفته است اگر به اندازه ۳۰ درجه بچرخد تغییرا شار الکتریکی را بدست آورید.



$$A = \pi r^2 = 3.14 \times 0.1^2 = 0.0314 m^2$$

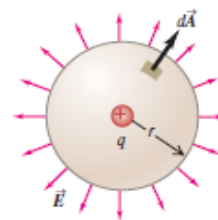
$$a) \Phi_{E1} = EA \cos \phi_1 = EA \cos 0 = 2 \times 10^3 \times 0.0314 \times 1 = 63 \frac{N \cdot m^2}{C}$$

$$b) \Phi_{E2} = EA \cos \phi_2 = EA \cos 30 = 2 \times 10^3 \times 0.0314 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 54 \frac{N \cdot m^2}{C}$$

$$\Delta \Phi_E = \Phi_{E2} - \Phi_{E1} = 54 - 63 = -9 \frac{N \cdot m^2}{C}$$

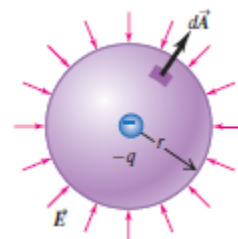
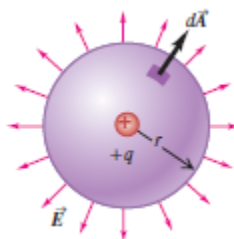
نکته: هر گاه میدان یکنواخت نباشد و یا سطح مورد نظر تخت نباشد از رابطه $\Phi_E = \iint E \cdot d\vec{A}$ استفاده میشود

مثال: شار الکتریکی حاصل بار $+q$ را بدست آورید.



$$\Phi_E = \oint E \cdot d\vec{A} = E \oint dA = E (4\pi r^2) \xrightarrow{E = k \frac{q}{r^2}, k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \right) \cdot (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

بطور کلی برای بار منفی و مثبت داریم



$$\Phi_E = \oint E_{\perp} dA = \oint \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

بار مثبت

$$\Phi_E = \oint E_{\perp} dA = \oint \left(\frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) dA = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint dA = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{-q}{\epsilon_0}$$

بار منفی

بنابراین شار گذرنده از یک سطح بسته برابر

$$\Phi_E = \oint E \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

است با حاصلضرب $\frac{1}{\epsilon_0}$ در بار خالص محصور در سطح یعنی

مراحل حل مسائل با قانون گاوس

۱. برای تعیین نقش خطوط میدان از تقارن توزیع بار استفاده کنید.
۲. سطح گاوسی را چنان برگزینید که E موازی با dA یا عمود بر آن باشد.
۳. اگر E موازی با dA باشد، بزرگی E باید در این قسمت از سطح ثابت باشد. در این صورت، انتگرال برابر حاصل جمع جزء سطوحها می شود.

مثال ۱.۳: پوسته‌ای کروی به شعاع R را، در حالی که بار Q به طور یکنواخت در سطح آن توزیع شده است، در نظر بگیرید. میدان الکتریکی را در نقاط زیر پیدا کنید: (الف) بیرون پوسته، (ب) درون پوسته.

حل:

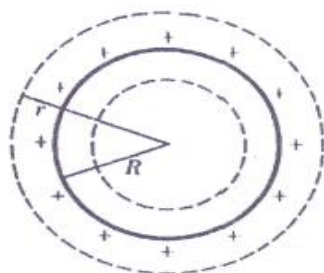
(الف) نقاط بیرونی: چون توزیع بار دارای تقارن کروی است، میدان نیز تقارن کروی خواهد داشت. خطوط میدان باید شعاعی و رویه خارج باشند. همچنین، شدت میدان باید در تمامی نقاط روی هر سطح کروی فرضی، هم مرکز با پوسته باردار، مقدار ثابتی داشته باشد. با توجه به این تقارن، سطح گاوسی را کره‌ای به شعاع $r > R$ انتخاب می‌کنیم (شکل ۸.۳). به این ترتیب، هر جزء سطح دلخواه dA با میدان موضعی E موازی است و در نتیجه برای همه نقاط روی این سطح داریم $E \cdot dA = E dA$. با قرار دادن در معادله ۳.۳، به دست می‌آوریم

$$\oint E dA = E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

پس

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{kQ}{r^2} \quad (4.3)$$

برای نقاط بیرون از پوسته، میدان همانند میدانی است که از یک بار نقطه‌ای موجود در مرکز حاصل شده باشد. این محاسبه، در مقایسه با انتگرال‌گیری لازم در کاربرد مستقیم قانون کولن،



شکل ۸.۳ سطح گاوسی را برای توزیع باری که تقارن کروی دارد، کره در نظر می‌گیریم.

بسیار ساده است.

(ب) نقاط درونی: در این ناحیه هم میدان از همان تقارن برخوردار است، بنابراین مجدداً یک سطح گاوسی کروی، ولی به شعاع $r < R$ ، در نظر می‌گیریم. چون بار محصور در این حالت برابر صفر است، معادله ۳.۳ به صورت زیر درمی‌آید

$$E = (4\pi r^2) = 0$$

بنابراین نقاط درونی صفر میشود

مثال ۲.۳: کره‌ای نارسا به شعاع R را در نظر بگیرید که بار الکتریکی Q به طور یکنواخت در حجم آن توزیع شده است. میدان الکتریکی را در نقاط زیر پیدا کنید: (الف) بیرون کره، (ب) درون کره.

حل:

(الف) بیرون کره: وضعیت میدان در بیرون کره مشابه مثال قبلی است. چون بار محصور در یک سطح گاوسی کروی به شعاع $r > R$ برابر Q است، داریم

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

که از آن، به دست می‌آوریم

$$E = \frac{kQ}{r^2} \quad (5.3)$$

میدان در نقاط بیرون از کره همانند میدانی است که از یک بار نقطه‌ای مستقر در مرکز حاصل می‌شود. باید توجه داشت که این نتیجه فقط به تقارن کروی توزیع بار بستگی دارد نه به یکنواخت بودن آن.

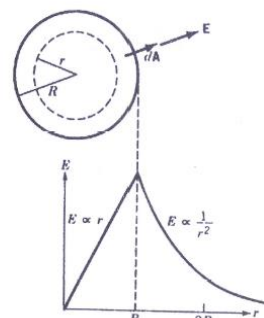
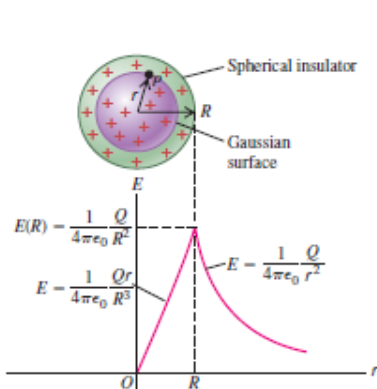
(ب) درون کره: مطابق شکل ۹.۳، یک سطح گاوسی کروی به شعاع $r < R$ در نظر می‌گیریم. بار محصور در چنین کره‌ای متناسب با حجم، $\frac{4}{3}\pi r^3$ ، آن است. پس، بخشی از بار کل Q که در داخل سطح گاوسی قرار دارد برابر $Q \left(\frac{r^3}{R^3} \right)$ می‌شود. با استفاده از همان بحث تقارن پیشین، قانون گاوس به صورت زیر درمی‌آید

$$E(4\pi r^2) = \frac{(r^3/R^3) Q}{\epsilon_0}$$

که با توجه به $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ، خواهیم داشت

$$E = \frac{kQr}{R^3} \quad (6.3)$$

میدان الکتریکی، با افزایش فاصله از مرکز، به طور خطی افزایش می یابد. تغییر میدان E بر حسب فاصله r در شکل ۹.۳ نشان داده شده است. باید توجه داشت که نتایج حاصل از هر دو عبارت (۵.۴) و (۶.۴) به ازای $r = R$ با هم سازگاری دارند؛ یعنی میدان در سطح کره پیوستگی دارد.



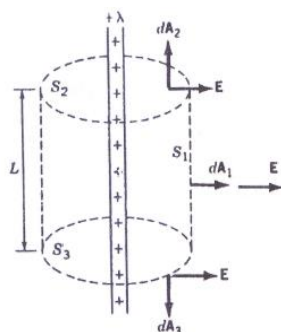
شکل ۹.۳ نمایش سطح گاوسی کروی در داخل کره‌ای که به طور یکنواخت باردار شده است.

مثال ۳.۳: محور باردار بی نهایت بلندی را با چگالی بار λ ($\frac{C}{m}$) در نظر بگیرید. میدان الکتریکی را در فاصله r از این محور پیدا کنید.

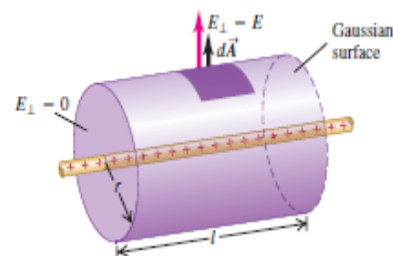
حل: تقارن استوانه‌ای حاکی است همه نقاطی که به یک فاصله از محور واقع اند، شدت میدان یکسانی دارند. چون محور بی نهایت بلند و یکنواخت است، مطابق شکل ۱۰.۳، برای هر جزء باری که روی نیمه $+y$ در نظر گرفته شود جزء بار متقارنی در نیمه $-y$ وجود دارد. مؤلفه‌های قائم میدانهای حاصل از این جزء بارها دو به دو یکدیگر را خنثی می کنند. بنابراین، خطوط میدان شعاعی و بر محور بار عمود خواهند بود.

سطح گاوسی مناسب در اینجا استوانه‌ای به شعاع r و طول L است. از سطوح تخت انتهایی S_p و S_q ، با توجه به عمود بودن E و A ، هیچ خط شاری نمی گذرد. در سطح خمیده S_c ، چون E موازی dA است، داریم $E \cdot dA = EdA$. بار محصور در استوانه برابر $Q = \lambda L$ است. اگر قانون گاوس را برای این سطح خمیده به کار ببریم، به دست می آوریم

$$E \oint dA = E(2\pi rL) = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$



شکل ۱۰.۳ سطح گاوسی استوانه‌ای حول یک محور باردار بی‌نهایت بلند. شار الکتریکی فقط روی سطح خمیده دیده می‌شود.

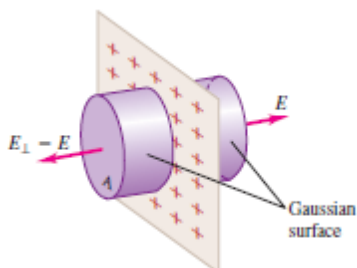
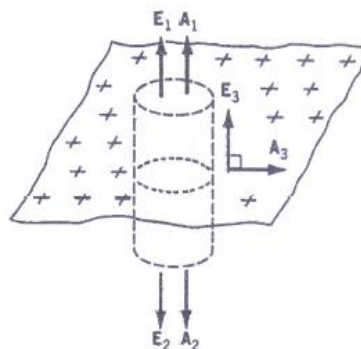


$$E \oint dA = E (2\pi r L) = \frac{Q}{\epsilon} \xrightarrow{Q=\lambda L} E (2\pi r L) = \frac{\lambda L}{\epsilon} \xrightarrow{k=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}} E = \frac{2k\lambda}{r}$$

در واقع

مثال ۴.۳: میدان الکتریکی ناشی از یک صفحه باردار نامتناهی، با چگالی سطحی یکنواخت $\sigma \left(\frac{C}{m^2} \right)$ را پیدا کنید.

حل: چون بار روی یک صفحه نامتناهی توزیع شده است، همه نقاطی که به یک فاصله از صفحه قرار دارند هم‌ارزند. پس میدان روی هر صفحه‌ای که به موازات صفحه باردار در نظر گرفته شود، باید ثابت بماند. تقارن مسأله همچنین نشان می‌دهد که خطوط میدان باید بر این صفحه عمود باشند. بنابراین، مطابق شکل ۱۱.۳، سطح گاوسی مورد نظرم را به صورت استوانه‌ای اختیار می‌کنیم که قاعده‌های آن به موازات صفحه باردار و به یک فاصله از آن قرار داشته باشند.



شکل ۱۱.۳ تقریب «قوطی» گاوسی برای صفحه باردار نامتناهی. شار الکتریکی فقط از سطوح انتهایی می‌گذرد.

(چنین استوانه‌ای را «قوطی گاوس» هم می‌گویند.)
در این حالت، از سطح خمیده استوانه هیچ شاری نمی‌گذرد ($E_{\perp}$ عمود بر $A_{\perp}$ است). اگر مساحت هر قاعده استوانه را A بگیریم، بار محصور برابر σA می‌شود. با استفاده از قانون گاوس داریم

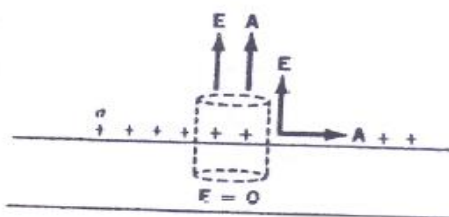
$$\oint E \cdot dA = E_1 A_1 + E_2 A_2 = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

می‌دانیم که $A_1 = A_2$ و شدت میدان هم باید روی هر دو قاعده یکسان باشد. به این ترتیب، عبارت بالا به صورت $2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$ درمی‌آید، و در نتیجه خواهیم داشت

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (۸.۳)$$

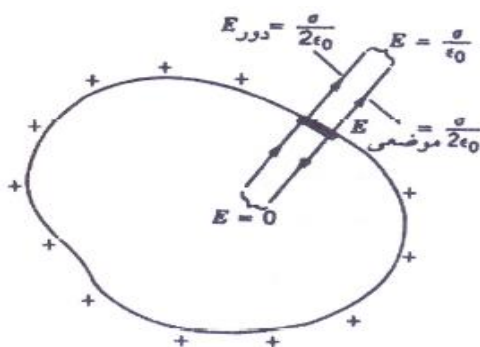
۳-۳ رساناها

با استفاده از قانون گاوس می‌توان درباره بارها و میدانهای مربوط به اجسام رسانا اطلاعات جالبی به دست آورد. هنگامی که بار خالصی را روی یک جسم رسانا قرار می‌دهیم، میدان



شکل ۱۳.۳ یک صفحه رسانای نامتناهی باردار. چون در داخل رسانا داریم $E = 0$ ، شار فقط از یک قاعده قوطی عبور خواهد کرد.

میدانی که در معادله ۹.۳ به دست آوردیم، دو برابر مقداری است که برای یک صفحه باردار نامتناهی (نارسانا) با همان چگالی سطحی بار به دست آمده بود. در مورد جسم رسانا تمام شار در یک جهت است، در حالی که در مورد صفحه نارسانا شار در دو جهت تقسیم می شود. معادله ۹.۳ را اگر چه برای جسم رسانای تخت نامتناهی به دست آورده ایم، ولی در تقریب اول می توان آن را برای هر جسم رسانایی که نوک تیز نباشد به کار برد. بنابراین معادله، شدت میدان با افزایش فاصله از جسم رسانا کاهش نمی یابد. برای جسم رسانایی که اندازه محدودی داشته باشد، این نتیجه وقتی قابل استفاده است که نواحی خیلی نزدیک به سطح در نظر گرفته شوند. میدانهای درونی و بیرونی جسم رسانا هر دو از برهمتهی دو مؤلفه حاصل می شوند. بار درون قوطی، مطابق شکل ۱۴.۳، مولد میدان «موضعی» $E_f = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ در هر دو طرف سطح جسم رسانا است. چون میدان برآیند در داخل جسم رسانا برابر صفر است، تمام بارهای دیگر

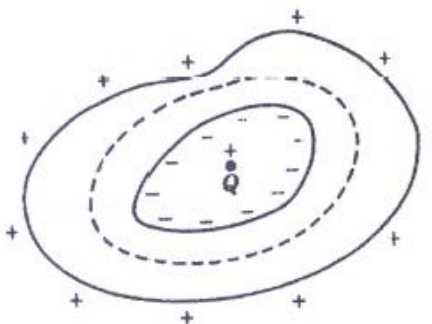


شکل ۱۴.۳ وقتی سطح کوچکی از یک جسم رسانای باردار را در نظر می گیریم، میدان خارجی از دو مؤلفه به وجود می آید: یکی میدان موضعی ناشی از بارهای روی این سطح و دیگری میدان دور ناشی از سایر بارهای روی جسم رسانا.

روی سطح باید مولد میدان «دور» $E_f = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ باشند، به طوری که مجموع مؤلفه های میدانهای موضعی و دور در داخل برابر صفر شود. اما در خارج از سطح جسم رسانا، میدان موضعی با میدان دور جمع می شود که حاصل آن برآیند $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ است.

کاواک درون جسم رسانا

مطابق شکل ۱۵.۳ جسم رسانایی را در نظر می‌گیریم که دارای یک کاواک محتوی بار نقطه‌ای Q است. در داخل جسم رسانا روی هر سطح گاوسی که در اطراف کاواک در نظر گرفته شود داریم $E = 0$ ، بنابراین شار خالص گذرنده از این سطح هم برابر صفر است. در این صورت، طبق قانون گاوس، بار الکتریکی خالص محصور در این سطح نیز باید برابر صفر باشد. این بدان معنی است که روی دیواره درونی کاواک بار القایی $-Q$ مستقر شده است. چون جسم رسانا در کل جسمی خنثی است، روی سطح بیرونی آن، نیز باید بار $+Q$ مستقر شده باشد.

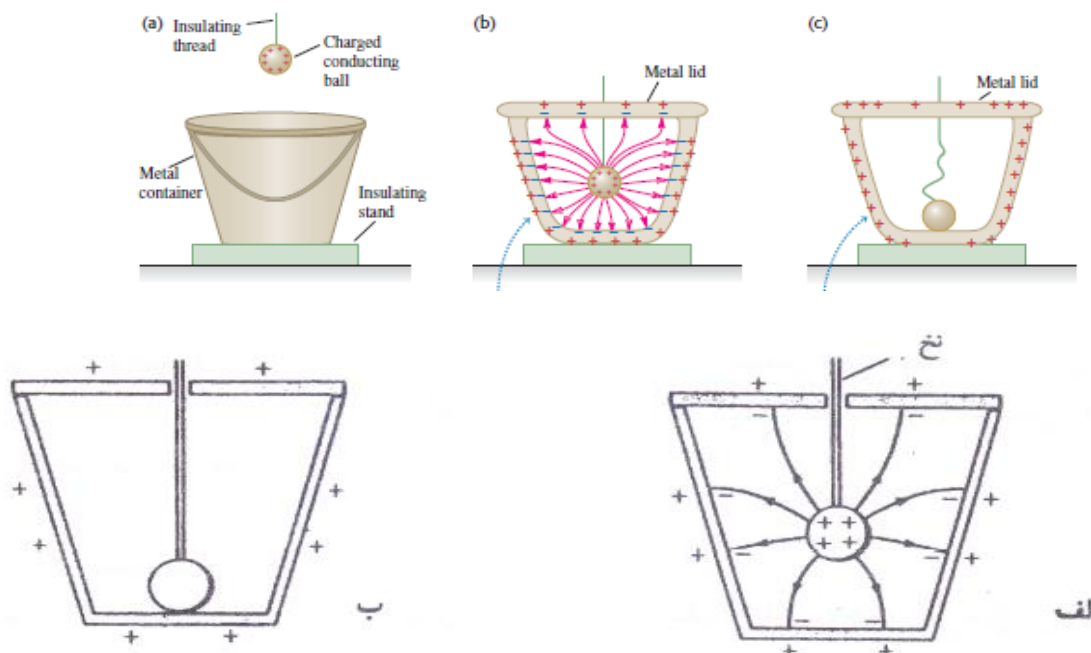


شکل ۱۵.۳ بار نقطه‌ای Q که درون کاواکی در یک جسم رسانا مستقر شده است، سبب القای بارهای مساوی و مختلف‌العلامت در سطح کاواک و سطح جسم رسانا می‌شود.

یکی از راههای تعیین مقدار بار القایی روی جسم رسانا، تکرار آزمایش یخدان فاراده است. گلوله فلزی بارداری را در داخل یک ظرف فلزی توخالی مستقر می‌کنیم، و سپس درپوش فلزی ظرف را روی آن قرار می‌دهیم. این گلوله باردار، مطابق شکل ۱۶.۳-الف، باعث القای بارهای مساوی و مختلف‌العلامت روی دیواره‌های بیرونی و درونی ظرف می‌شود. هنگامی که گلوله بادیواره درونی برخورد می‌کند، بارهایشان یکدیگر را خنثی می‌کنند. به این ترتیب، مطابق شکل ۱۶.۳-ب، باری مساوی بار اولیه گلوله روی دیواره بیرونی بر جای می‌ماند.

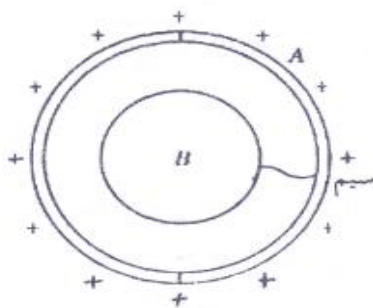
آزمایش کاوندیش

قانون گاوس در الکتروستاتیک اساساً همان قانون کولن است که به زبانی دیگر بیان می‌شود؛ یعنی هر کدام از آنها را می‌توان از دیگری استنباط کرد. با استفاده از قانون گاوس نشان دادیم که،



شکل ۱۶.۳ در آزمایش یخدان فاراده، بار گلوله فلزی تماماً به سطح خارجی یخدان فلزی منتقل می‌شود.

در تعادل الکتروستاتیکی، هر بار خالصی باید روی سطح جسم رسانا قرار گیرد. بنابراین، هر گونه باری که در داخل یک جسم رسانا آشکارسازی شود، هر دو قانون گاوس و کولن را نقض خواهد کرد. هنری کاوندیش در سال ۱۷۷۱ میلادی، مطابق شکل ۱۷.۳، پوسته‌ای (یا کره‌ای) فلزی را در داخل یک پوسته فلزی دیگر که متشکل از دو نیمکره بود قرار داد. این پوسته‌ها با سیم به یکدیگر اتصال دارند، و باری روی پوسته خارجی A مقرر داده می‌شود. اگر بر بارهای موجود در پوسته A نیرویی وارد شود، این امر به تبادل بار میان پوسته‌های A و B منجر می‌شود. در این حالت، سیم ارتباط را قطع و پوسته A را از B دور می‌کنند. آزمایش نشان می‌دهد که در این صورت، هیچ‌گونه باری روی B قابل آشکارسازی نیست.



شکل ۱۷.۳ آزمون قانون گاوس و آزمون غیرمستقیم قانون کولن. پوسته فلزی B با سیم به پوسته A متصل است. هنگامی که A باردار می‌شود، مطابق قانون گاوس، هیچ باری روی B دیده نمی‌شود.

فیزیک الکتریسیته و مغناطیس جلسه پنجم

اختلاف پتانسیل: عاملی که باعث حرکت بارهای الکتریکی می شود را اختلاف پتانسیل گویند. و عبارت است از مقدار کاری که برای انتقال واحد بار الکتریکی انجام میشود و با حرف V نشان می دهیم واحد آن ولت (V)

$$\left(1V = \frac{1J}{1C}\right) \text{ است. و از رابطه } \Delta v = \frac{\Delta w}{q} \text{ یا } \Delta v = \frac{\Delta u}{q} \text{ بدست می آید. } U \text{ یا } w \text{ کار بر حسب ژول و } q \text{ بار بر حسب کولن}$$

مثال: برای انتقال بار $20\mu C$ در اختلاف پتانسیل $40V$ چقدر کار انجام میشود.

$$v = 40V, q = 20\mu C$$

$$v = \frac{w}{q} \Rightarrow w = qv = 20 \times 10^{-6} \times 40 = 800 \times 10^{-6} J = 8 \times 10^{-4} J = 0.8 kJ$$

تعریف کار: حاصلضرب مولفه نیرو در راستای جابجایی را کار گویند که در واقع سطح زیر نمودار نیرو جابجایی است

$$W_E = -\Delta U_E$$

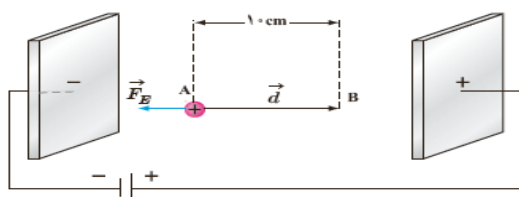
$$W_E = F \cos \theta \cdot d = Fd \cos \theta \xrightarrow{F=Eq} W_E = Eqd \cos \theta$$

$$\Delta U_E = -W_E = -Eqd \cos \theta$$

$$dv = \frac{du}{q} = \frac{-Eqd \cos \theta}{q} = -Ed \cos \theta = -E \cdot d$$

$$V_B - V_A = -\int_A^B E \cdot ds$$

مثال:



در یک میدان الکتریکی یکنواخت $E = 2.0 \times 10^3 N/C$ ، پروتونی از نقطه A با سرعت v_0 در خلاف جهت میدان الکتریکی پرتاب شده است. پروتون سرانجام در نقطه B متوقف می شود. بار پروتون $1.6 \times 10^{-19} C$ و جرم آن $1.67 \times 10^{-27} kg$ است.

الف) تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی پروتون در این جابجایی چقدر است؟

ب) تندی پرتاب پروتون را پیدا کنید (از وزن پروتون و مقاومت هوا چشم پوشی شود).

پاسخ:

الف) با توجه به رابطه ۸-۱ داریم:

$$\Delta U_E = -W_E = -|q| E d \cos \theta = -(1.6 \times 10^{-19} C)(2.0 \times 10^3 N/C)(0.10 m)(\cos 180^\circ) = 3.2 \times 10^{-17} J$$

ب) طبق قضیه کار-انرژی جنبشی می توان نوشت:

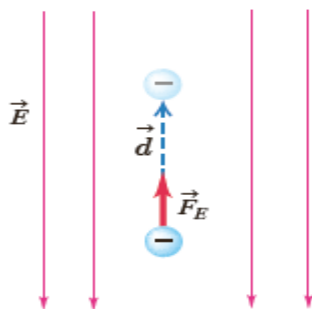
$$W_E = \Delta K \Rightarrow -\Delta U_E = \frac{1}{2} m(v_0^2 - v^2)$$

$$-3.2 \times 10^{-17} J = \frac{1}{2} (1.67 \times 10^{-27} kg)(-v_0^2) \Rightarrow v_0 = 1.96 \times 10^5 m/s \approx 2.0 \times 10^5 m/s$$

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = -q \Delta v$$

توجه:

مثال:



در نتیجه برخورد پرتوهای کیهانی با مولکول‌های هوا، الکترون‌هایی از این مولکول‌ها کنده می‌شوند. در نزدیکی سطح زمین، میدان الکتریکی با بزرگی 150 N/C و جهت رو به پایین وجود دارد. الف) اگر یکی از این الکترون‌ها، تحت تأثیر این میدان 500 m رو به بالا جابه‌جا شود، انرژی پتانسیل الکتریکی آن چقدر تغییر می‌کند؟ ب) اختلاف پتانسیل الکتریکی دو نقطه‌ای که الکترون بین آنها جابه‌جا شده چقدر است؟

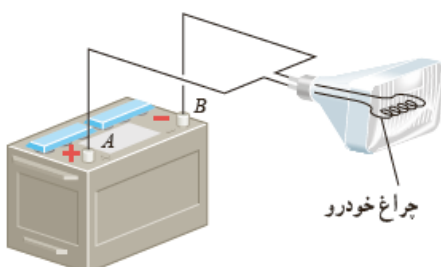
پاسخ: الف) با استفاده از رابطه ۱-۸ برای تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی الکترون داریم

$$\Delta U_E = -W_E = -|q|Ed \cos \theta = -(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})(150 \text{ N/C})(500 \text{ m}) \cos 0^\circ \\ = -1.20 \times 10^{-14} \text{ J}$$

ب) با استفاده از رابطه ۱-۹ برای اختلاف پتانسیل داریم

$$\Delta V = \frac{\Delta U_E}{q} = \frac{-1.20 \times 10^{-14} \text{ J}}{-1.60 \times 10^{-19} \text{ C}} = 7.50 \times 10^4 \text{ V} = 75.0 \text{ kV}$$

مثال



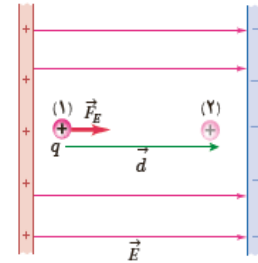
اختلاف پتانسیل الکتریکی پایانه‌های باتری خودروی نشان داده شده در شکل برابر 12.0 V است. اگر بار الکتریکی -50 C کولن از پایانه منفی به پایانه مثبت باتری جابه‌جا شود، انرژی پتانسیل الکتریکی آن چقدر تغییر می‌کند؟ **پاسخ:** با استفاده از رابطه ۱-۹ داریم:

$$\Delta V = \frac{\Delta U_E}{q}$$

$$\Delta U = q\Delta V = q(V_+ - V_-) = (-50 \text{ C})(+12.0 \text{ V}) = -600 \text{ J}$$

بنابراین، انرژی پتانسیل الکتریکی این بار به اندازه 600 J کاهش یافته است.

میدان الکتریکی یکنواخت: میدانی که راستا و مقدار شدت میدان الکتریکی در آن ثابت است

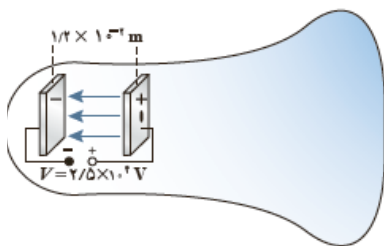


$$\Delta v = \frac{\Delta u}{q} = \frac{-qEd \cos 0}{q} \Rightarrow \Delta v = -Ed$$

$$E = \frac{\Delta v}{d}$$

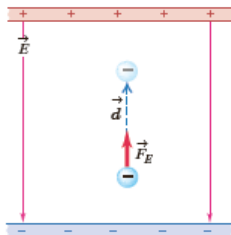
مثال:

لامپ‌های تصویر تلویزیون‌ها و نمایشگرهای قدیمی، لامپ پرتو-کاتدی (CRT) بودند. در این لامپ، الکترون‌ها در میدان الکتریکی یکنواخت بین دو صفحه باردار، مطابق شکل، شتاب می‌گیرند و با صفحه نمایشگر برخورد می‌کنند. اگر صفحه‌ها در فاصله $1/2 \times 10^{-2} \text{ m}$ از یکدیگر باشند و اختلاف پتانسیل بین آنها $2/5 \times 10^4 \text{ V}$ باشد، بزرگی میدان الکتریکی بین صفحه‌ها را تعیین کنید.

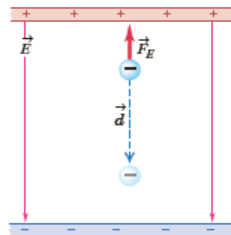


پاسخ: با استفاده از رابطه ۱۱-۱ داریم:

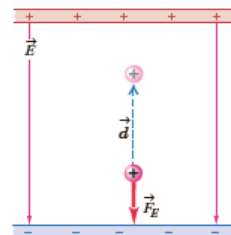
$$E = \frac{|\Delta V|}{d} = \frac{2/5 \times 10^4 \text{ V}}{1/2 \times 10^{-2} \text{ m}} = 2/0.8 \times 10^6 \text{ V/m} \approx 2/1 \text{ MV/m}$$



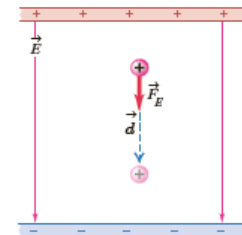
الف) بار مثبت را در جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ جابه‌جا می‌کنیم: میدان الکتریکی کار مثبت W_E را روی بار انجام می‌دهد. انرژی پتانسیل الکتریکی U_E کاهش می‌یابد.



ب) بار منفی را در جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ جابه‌جا می‌کنیم: میدان الکتریکی کار منفی W_E را روی بار انجام می‌دهد. انرژی پتانسیل الکتریکی U_E افزایش می‌یابد.



ب) بار مثبت را در خلاف جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ جابه‌جا می‌کنیم: میدان الکتریکی کار منفی W_E را روی بار انجام می‌دهد. انرژی پتانسیل الکتریکی U_E افزایش می‌یابد.



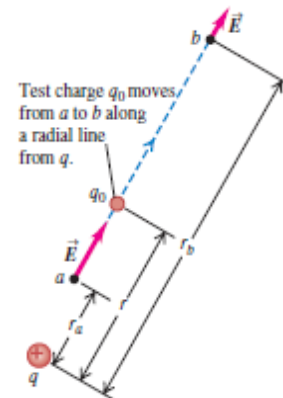
الف) بار مثبت را در جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ جابه‌جا می‌کنیم: میدان الکتریکی کار مثبت W_E را روی بار انجام می‌دهد. انرژی پتانسیل الکتریکی U_E کاهش می‌یابد.

تعریف کار: حاصلضرب مولفه نیرو در راستای جابجایی را کار گویند که در واقع سطح زیر نمودار نیرو جابجایی است

$$W_{a \rightarrow b} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b F \cos \phi \, dl \quad (\text{work done by a force})$$

مثال: کار حاصل از بار الکتریکی q که در میدان الکتریکی E از نقطه a به نقطه b جابجا میشود را بدست آورید.

$$w_{a \rightarrow b} = \int_{r_a}^{r_b} f_r dr = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qq_0}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qq_0}{r^2} \left[\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right]$$



می دانیم

$$F = qE, du = -dw$$

$$du = -F_c ds = -qE ds$$

$$dv = \frac{du}{q} = \frac{-qE ds}{q} = -E ds$$

$$dv = -E ds \Rightarrow V_B - V_A = -\int_A^B E ds$$

مثال: تغییرات پتانسیل حاصل از q را بدست آورید.

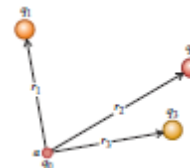
$$V_B - V_A = -\int_A^B E_r dr = -\int_A^B k \frac{q}{r^2} dr = -kq \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right] = kq \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right]$$

حال اگر به فاصله خیلی دور برده شود $r_B = \infty$ در نتیجه پتانسیل بار نقطه ای از رابطه $v = k \frac{q}{r}$ بدست

می آید

پتانسیل دستگاه بارهای نقطه ای: از جمع جبری پتانسیل تک تک بارها بدست می آید

$$v = \sum_{i=1}^n k \frac{q_i}{r_i} = k \frac{q_1}{r_1} + k \frac{q_2}{r_2} + k \frac{q_3}{r_3} + \dots$$



انرژی پتانسیل بارهای نقطه ای: همانطور که میدانیم $u = qv$ است بنابر این $u = k \frac{qQ}{r}$ یا به عبارتی

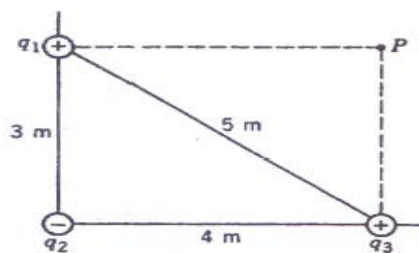
$$U_{ij} = k \frac{q_i q_j}{r}$$

مثال ۲.۴: سه بار نقطه‌ای $q_1 = 1\mu C$ ، $q_2 = -2\mu C$ و $q_3 = 3\mu C$ را، مطابق شکل ۱۳.۴، به طور ثابت در محل استقرارشان در نظر بگیرید. (الف) پتانسیل نقطه P واقع در گوشه مستطیل را به دست آورید. (ب) برای آنکه بار $q_4 = 2/5\mu C$ را از بی‌نهایت به نقطه P بیاوریم، چقدر کار باید انجام دهیم؟ (ج) انرژی پتانسیل کل بارهای q_1 ، q_2 و q_3 چقدر است؟

حل:

(الف) پتانسیل کل از جمع نرده‌ای زیر به دست می‌آید

$$V_P = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} + \frac{kq_3}{r_3}$$



شکل ۱۳.۴ انرژی پتانسیل این مجموعه بارها منفی است.

یا استفاده از مقادیر معلوم، خواهیم داشت

$$V_1 = \frac{(9.0 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2)(1.0 \times 10^{-6} \text{ C})}{3 \text{ m}} = 3.0 \times 10^3 \text{ V}$$

به همین ترتیب، داریم $V_2 = -3.6 \times 10^3 \text{ V}$ و $V_3 = 9.0 \times 10^3 \text{ V}$. پس، پتانسیل کل عبارت است از $V_P = 7.65 \times 10^3 \text{ V}$.

(ب) کار خارجی برابر است با $W_{ext} = q(V_f - V_i)$. چون در اینجا $V_i = 0$ ، پس

$$W_{ext} = q_4 V_P = (2.5 \times 10^{-6} \text{ C})(7.65 \times 10^3 \text{ V}) = 0.19 \text{ J}$$

(ج) انرژی پتانسیل کل این سه بار عبارت است از

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23} = \frac{kq_1 q_2}{r_{12}} + \frac{kq_1 q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2 q_3}{r_{23}}$$

پس از قرار دادن مقادیر، به دست می‌آید

$$U_{12} = \frac{(9.0 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2)(1.0 \times 10^{-6} \text{ C})(-2.0 \times 10^{-6} \text{ C})}{3 \text{ m}} = -6.0 \times 10^{-3} \text{ J}$$

به همین ترتیب، داریم $U_{13} = 5.4 \times 10^{-3} \text{ J}$ و $U_{23} = -1.35 \times 10^{-3} \text{ J}$. بنابراین، انرژی پتانسیل برابر است با $U = -1.41 \times 10^{-3} \text{ J}$. منفی بودن انرژی پتانسیل حاکی از آن است که نیروی خارجی باید برای جداسازی ذرات از یکدیگر و بردن آنها به بی‌نهایت، کاری انجام دهد.

مثال ۳.۴: نیلس بوردر ۱۹۱۳ برای اتم هیدروژن مدلی عرضه کرد که در آن یک الکترون در مسیری دایره‌ای به دور پروتونی ساکن در گردش است. با استفاده از شعاع این مدار که برابر $5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$ است، انرژی مکانیکی کل الکترون را پیدا کنید.

حل: انرژی مکانیکی برابر حاصل جمع انرژیهای جنبشی و پتانسیل، $E = K + U$ است. انرژی پتانسیل، بنابر ۱۲.۴ - الف، عبارت است از

$$U = - \frac{ke^2}{r} \quad (1)$$

برای تعیین انرژی جنبشی باید سرعت حرکت مداری، v ، را به دست آوریم. نیروی مرکزی در این مسأله از جاذبه کولنی بین پروتون و الکترون تأمین می‌شود. با توجه به قانون دوم نیوتون، $F = ma$ داریم

$$\frac{ke^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

پس، انرژی جنبشی الکترون چنین به دست می‌آید

$$K = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{ke^2}{2r} \quad (2)$$

در نتیجه، انرژی مکانیکی کل برابر است با

$$\begin{aligned} K + U &= - \frac{ke^2}{2r} \\ &= \frac{-(8.99 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2)(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{2(5.3 \times 10^{-11} \text{ m})} \\ &= -2.18 \times 10^{-18} \text{ J} = -13.6 \text{ eV} \end{aligned}$$

انرژی کل منفی حاکی از مقید بودن ذره در حال گردش است. مقدار 13.6eV با مقدار تجربی انرژی یونش اتم، که کمینه انرژی لازم برای جداسازی الکترون از پایین ترین مدار آن است، سازگاری خوبی دارد.

۴-۴ میدان الکتریکی مشتق از پتانسیل

در درس فیزیک پایه ۱ دیدیم که با مشتق‌گیری از تابع انرژی پتانسیل، $F_x = -\frac{dU}{dx}$ می‌توان یک نیروی پایستار را به دست آورد. به همین ترتیب، با در دست داشتن تابع پتانسیل (نرده‌ای) می‌توان میدان الکتریکی (برداری) را معین کرد. با توجه به معادله ۴.۴، تغییر پتانسیل متناظر به جابه‌جایی ds عبارت است از

$$dV = -E ds = -E ds \cos\theta$$

چون $E_s = E \cos\theta$ مؤلفه E در جهت ds است، معادله بالا را می‌توان به صورت $-E_s ds = dV$ نوشت که از آن به دست می‌آید

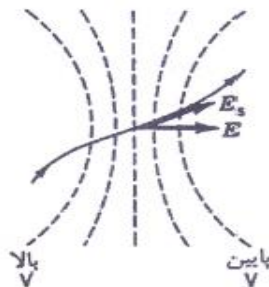
$$E_s = -\frac{dV}{ds} \quad (13.4)$$

چون جهت ds اختیاری است، معادله ۱۳.۴ را می‌توان چنین تعبیر کرد: با استفاده از آهنگ تغییر V بر حسب فاصله، در جهتی که در نظر می‌گیریم، می‌توانیم هر مؤلفه‌ای از E را به دست آوریم. این آهنگ تغییر در یک جهت به بیشینه مقدار خود می‌رسد. بزرگی E را می‌توان با همین مقدار بیشینه مشتق مکانی مشخص کرد، یعنی $E = -\left(\frac{dV}{ds}\right)_{\max}$. همان‌طور که در شکل ۱۴.۴ می‌بینیم، این مقدار بیشینه در راستایی به دست می‌آید که در آن هم پتانسیلها بیش از سایر نقاط به یکدیگر نزدیک‌اند.

در دستگاه مختصات قائم، میدان الکتریکی را به صورت $E = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k}$ و جزء جابه‌جایی را به صورت $ds = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$ می‌توان نشان داد. پس داریم

$$dV = -E ds = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz)$$

وقتی که جابه‌جایی در راستای x باشد، داریم $dy = dz = 0$ و در نتیجه $dV = -E_x dx$. بنابراین، خواهیم داشت



شکل ۱۴.۴ جهت میدان الکتریکی از پتانسیل بالاتر به طرف پتانسیل پایین تر است. مؤلفه میدان در امتداد جابه جایی ds برابر است با $E_s = - \frac{dV}{ds}$. بردار میدان برهم پتانسیلها عمود است.

$$E_x = - \frac{dV}{dx} \quad (y \text{ و } z \text{ ثابت})$$

مشتقی که در آن همه متغیرها جز یکی ثابت نگهداشته می شوند، مشتق جزئی نام دارد و به جای d با ∂ نشان داده می شود. پس، میدان الکتریکی عبارت است از

$$\mathbf{E} = - \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k} \quad (۱۴.۴)$$

طرف راست معادله ۱۴.۴ را گرایان V می گویند.

مثال ۴.۴: پتانسیل ناشی از بار نقطه ای Q از $V = \frac{kQ}{r}$ به دست می آید. (الف) مؤلفه شعاعی میدان الکتریکی؛ (ب) مؤلفه x میدان الکتریکی را پیدا کنید.

حل: (الف) مؤلفه شعاعی را با استفاده از معادله ۱۳.۴ به دست می آوریم

$$E_r = - \frac{dV}{dr} = + \frac{kQ}{r^2}$$

این عبارت با آنچه از قانون کولن می دانیم سازگاری دارد.

(ب) در مختصات قائم، فاصله شعاعی عبارت است از $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ ؛ پس، تابع پتانسیل $V = \frac{kQ}{r}$ به صورت زیر در می آید

$$V = \frac{kQ}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

برای تعیین مؤلفه x میدان الکتریکی، y و z را ثابت در نظر می‌گیریم. بنابراین، داریم

$$E_x = - \frac{\partial V}{\partial x} = + \frac{kQx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = + \frac{kQx}{r^3}$$

۵-۴ بارهای گسترده

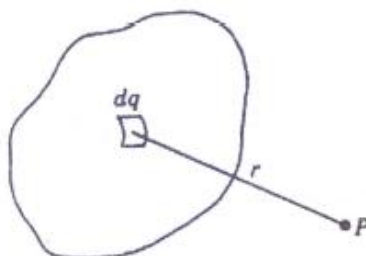
پتانسیل ناشی از مجموعه بارهای نقطه‌ای را با معادله ۱۰-۴ نشان دادیم. پتانسیل ناشی از بار الکتریکی با توزیع پیوسته را به روشهای زیر می‌توان به دست آورد.

در روش نخست، مطابق شکل ۱۵-۴، پتانسیل ناشی از جزء بار (نقطه‌ای) dq را در نقطه P مشخص می‌کنیم

$$dV = \frac{k dq}{r}$$

سپس، پتانسیل ناشی از کل بار را با انتگرال‌گیری به دست می‌آوریم

$$V = k \int \frac{dq}{r} \quad (15.4)$$



شکل ۱۵-۴ یکی از راههای تعیین پتانسیل برای باری که توزیع پیوسته‌ای دارد این است

که از پتانسیل ناشی از جزء بار dq انتگرال بگیریم؛ یعنی $V = k \int \frac{dq}{r}$

این معادله بدان معنی است که پتانسیل در بی نهایت برابر صفر می شود.
در روش دوم، برای تعیین پتانسیل از معادله ۵.۴ استفاده می کنیم

$$V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (۱۶.۴)$$

اگر $\mathbf{E}$ در دست باشد - مثلاً از طریق قانون گاوس - به کمک این معادله می توان ΔV را محاسبه کرد. در این حالت، پتانسیل مبنا (یا پتانسیل صفر) را در نقطه ای انتخاب می کنیم که کار محاسبه را آسانتر کند.

مثال ۵.۴: قرص نارسانایی به شعاع a و چگالی بار سطحی یکنواخت σ را در نظر بگیرید. پتانسیل را در نقطه‌ای از محور قرص، به فاصله y از مرکز آن، پیدا کنید.

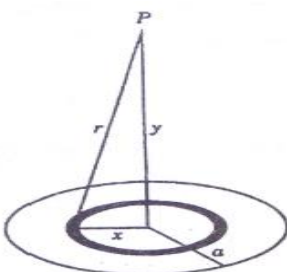
حل: با توجه به تقارن قرص، جزء بار را به صورت بار موجود در حلقه‌ای به شعاع x و ضخامت dx در نظر می‌گیریم (شکل ۱۶.۴). فاصله تمامی نقاط این حلقه از نقطه P برابر مقدار یکسان $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ است. بار موجود روی این حلقه برابر $dq = \sigma dA = \sigma(2\pi x dx)$ و در نتیجه پتانسیل ناشی از آن عبارت است از

$$dV = \frac{k dq}{r} = \frac{k \sigma (2\pi x dx)}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

چون پتانسیل کمیتی نرده‌ای است، مؤلفه‌ای وجود ندارد که به دنبال آن باشیم. در اینجا فقط با یک متغیر x سروکار داریم، و فاصله y را باید ثابت بگیریم. پتانسیل ناشی از کل قرص را از انتگرال‌گیری عبارت بالا به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} V &= 2\pi k \sigma \int_0^a \frac{x dx}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \\ &= 2\pi k \sigma \left[(x^2 + y^2)^{1/2} \right]_0^a = 2\pi k \sigma \left[(a^2 + y^2)^{1/2} - y \right] \end{aligned}$$

حال ببینیم این عبارت در فاصله‌های دور، $a \gg y$ یا $a \ll y$ ، به چه صورتی درمی‌آید. برای این منظور، جمله اول را با استفاده از قضیه دو جمله‌ای $(1+z)^n \approx 1 + nz$ برای z کوچک



شکل ۱۶.۴ جزء بار مناسب برای قرص، بار موجود روی یک حلقه نازک است. توجه داشته باشید که برای تعیین پتانسیل نیازی به مؤلفه‌ها نیست.

سطح می‌دهیم

$$(a^2 + y^2)^{1/2} = y \left(1 + \frac{a^2}{y^2} \right)^{1/2} \approx y \left(1 + \frac{a^2}{2y^2} + \dots \right)$$

پس از قرار دادن آن در عبارت پتانسیل، به دست می‌آوریم

$$V = \frac{kQ}{y}$$

که در آن $Q = \sigma \pi a^2$ بار کل قرص است. پتانسیل ناشی از قرص در فاصله‌های بسیار دور همانند پتانسیل بار نقطه‌ای Q است.

$$v = k \frac{Q}{y} = k \frac{\sigma \pi a^2}{y}$$

مثال ۶.۴: پوسته‌ای به شعاع R را در نظر بگیرید که بار Q به طور یکنواخت در سطح آن توزیع شده است. پتانسیل این پوسته را در فاصله $r > R$ از مرکز آن پیدا کنید.

حل: در اینجا با استفاده از معادله ۱۵.۴ می‌توان پتانسیل را محاسبه کرد. اما به کمک میدان الکتریکی آسانتر می‌توانیم به نتیجه برسیم. بنابر قانون گاوس، میدان در نقاط خارجی یک توزیع بار کروی عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{kQ}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

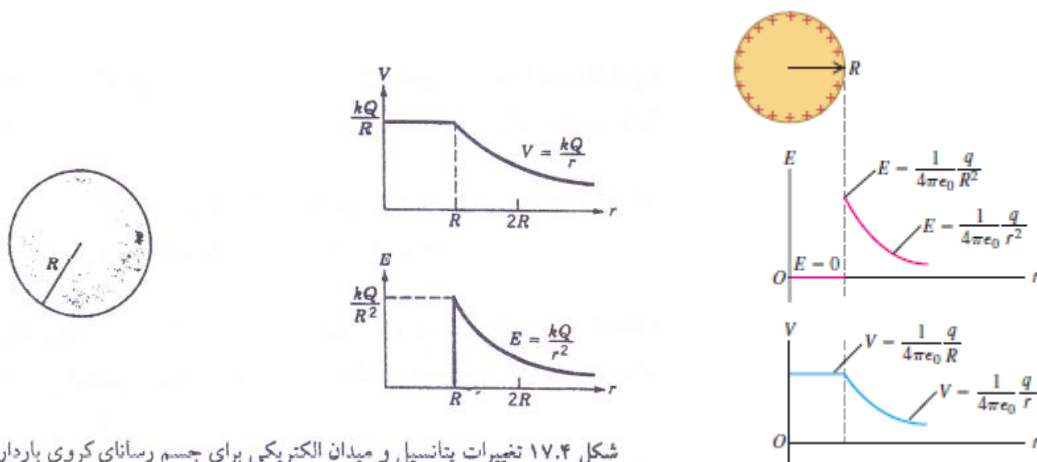
پتانسیل در نقطه $r > R$ را می‌توان از معادله ۵.۴ به دست آورد. چون میدان $\mathbf{E}$ شعاعی است، داریم $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_r dr$. با توجه به $V(\infty) = 0$ ، خواهیم داشت

$$V(r) - V(\infty) = - \int_{\infty}^r \frac{kQ}{r'^2} dr' = -kQ \left[-\frac{1}{r'} \right]_{\infty}^r$$

$$V = \frac{kQ}{r} \quad \text{و} \quad r > R \quad (17.4)$$

چنانکه می‌بینیم، پتانسیل پوسته باردار یکنواخت همانند پتانسیل بار نقطه‌ای Q مستقر در مرکز آن است. این نتیجه برای هر نوع توزیع بار با تقارن کروی صادق است، زیرا این توزیع بارها را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از پوسته‌های هم مرکز در نظر گرفت.

معادله ۱۷.۴ برای کره‌های رسانا هم قابل استفاده است، زیرا بار الکتریکی روی سطح این گونه اجسام قرار می‌گیرد. در شکل ۱۷.۴، یک کره رسانا به شعاع R را که بار Q به طور یکنواخت در سطح آن توزیع شده است نشان داده‌ایم. در شرایط ایستا، در نقاط داخلی جسم رسانا داریم $E = 0$. با توجه به معادله ۱۶.۴ معلوم می‌شود که $V_B = V_A$ ، یعنی هر دو نقطه‌ای از جسم رسانا باید پتانسیل یکسان داشته باشند. به این ترتیب، تمامی نقاط این کره رسانا پتانسیل یکسان دارند و مقدار آن برابر پتانسیل روی سطح، $V = \frac{kQ}{R}$ ، است. تغییرات میدان و پتانسیل الکتریکی برحسب r در شکل ۱۷.۴ نشان داده شده است.



شکل ۱۷.۴ تغییرات پتانسیل و میدان الکتریکی برای جسم رسانای کروی باردار.

مثال ۷.۴: انرژی پتانسیل کره‌ای فلزی به شعاع R و بار Q را به دست آورید.

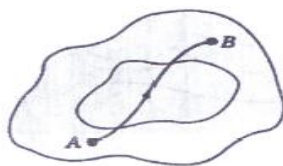
حل: انرژی پتانسیل را می‌توان با محاسبه کار لازم برای گردآوری بار به میزان نهایی آن به دست آورد. اگر وضعیتی را در نظر بگیریم که بار الکتریکی روی کره برابر q باشد، پتانسیل آن بنابر معادله ۱۵.۴ برابر $V = kq/R$ می‌شود. کار لازم برای آنکه جزء بار dq را از بی‌نهایت به روی کره بیاوریم، برابر $dW = Vdq = (kq/R) dq$ است. بدین‌سان، کل کار لازم برای آنکه کره به مقدار Q باردار شود عبارت است از

$$W = \int_0^Q \frac{kq}{R} dq = \frac{kQ^2}{2R}$$

این همان انرژی پتانسیل مربوط به بار الکتریکی توزیع شده در سطح کره رساناست. این عبارت را می‌توان به صورت $U = \frac{1}{2} QV$ نوشت که در آن $V = \frac{kQ}{R}$ پتانسیل کره است. این نتیجه را باید با معادله ۱۱.۴، $U = QV$ ، مقایسه کرد. تفاوت ضریب $\frac{1}{2}$ حاکی از آن است که این دو انرژی پتانسیل، معانی متفاوتی دارند. عبارت $U = QV$ معرف انرژی پتانسیل بار منفرد Q در نقطه‌ای است که پتانسیل ناشی از بارهای دیگر در آنجا برابر V است. این مقدار برابر کار لازم برای انتقال بار Q از بی‌نهایت به نقطه مورد نظر است. عبارت $U = \frac{1}{2} QV$ ، که در این مثال به دست آمده است، انرژی پتانسیل کل مجموعه بارهایی است که روی کره گرد آورده‌ایم. این مقدار برابر کار لازم برای گردآوری این مجموعه بارهاست.

۴-۶ رساناها

کاواکی توخالی را، مطابق شکل ۱۸.۴، در حالت تعادل الکتروستاتیکی در داخل یک جسم رسانا در نظر بگیرید. این جسم را می توان باردار در نظر گرفت یا آن را در میدان الکتریکی خارجی قرار داد. چون میدان در داخل جسم رسانا برابر صفر است، $E = 0$ ، تغییر پتانسیل هم



شکل ۱۸.۴ میدان در داخل یک کاواک توخالی در جسم رسانا برابر صفر است.

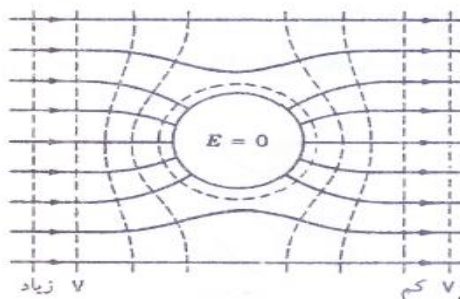
بین هر دو نقطه ای از این جسم باید برابر صفر شود؛ یعنی

$$V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

چون انتگرال برای هر مسیری، از جمله مسیری که از کاواک می گذرد، برابر صفر است، میدان E درون کاواک هم باید برابر صفر باشد. پس، به طور کلی در حالت تعادل الکتروستاتیکی، همه نقاط یک جسم رسانا (اعم از درونی و سطحی) پتانسیل یکسان دارند.

برای جابه جایی ds روی سطح جسم رسانا، داریم $dV = E ds = 0$. این بدان معنی است که E بر ds عمود است. همان طور که در فصل ۲ دیدیم، خطوط میدان بر سطح جسم رسانا عمودند. در شکل ۱۹.۴ یک جسم رسانای کروی بدون بار را در میدانی یکنواخت نشان داده ایم. در نقاط دور از جسم، انتظار داریم که نقش میدان بدون تغییر بماند: یعنی خطوط میدان یکنواخت و هم پتانسیلها به صورت صفحه اند. در نقاط نزدیک به جسم، هم پتانسیلها باید به صورت کره در آیند و خطوط میدان باید شعاعی باشند. توزیع بارها در جسم به صورتی درمی آید که با این شرایط سازگار شود. صفر بودن میدان درون کاواک، بدان معنی است که جسم رسانا نقاط داخلی اش را از میدان خارجی «محافظت می کند». هنگامی که بخواهیم دستگاهی یا کابل حامل علامتی را از تأثیر عوامل خارجی مصون نگه داریم، می توانیم از این خاصیت استفاده کنیم.

فرض کنید که دو کره فلزی باردار به شعاعهای R_1 و R_2 را، مطابق شکل ۲۰.۴، با سیم بلندی به یکدیگر متصل کرده ایم. در این صورت، بار الکتریکی از کره ای به کره دیگر خواهد رفت تا اینکه پتانسیل هر دو کره یکسان شود: $V_1 = V_2$. چون این کره ها را دور از هم در نظر



شکل ۱۹.۴ جسم رسانا نقاط داخلی اش را از میدان خارجی محافظت می کند.



شکل ۲۰.۴ کره‌های باردار که با سیم به یکدیگر وصل شده‌اند، پتانسیل یکسان دارند.

گرفته‌ایم، توزیع بارهایشان یکنواخت خواهد شد و پتانسیل هر کدام از آنها را می‌توان به صورت $V = k \frac{Q}{R}$ نوشت. یکسان بودن پتانسیلها حاکی از آن است که

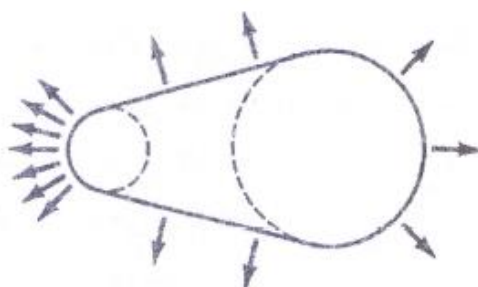
$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}$$

اگر چگالی بار سطحی را با σ نمایش دهیم، داریم $Q = 4\pi R^2 \sigma$ و در نتیجه معادله بالا به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad (۱۸.۴)$$

به این ترتیب، خواهیم داشت: $\sigma \propto \frac{1}{R}$ ؛ یعنی چگالی بار سطحی هر کره متناسب با معکوس شعاع است. با توجه به این نسبت می‌توان در باره توزیع بار روی اجسام رسانایی که شکل نامنظمی دارند اظهار نظر کرد: در اجسام کوژ، هر ناحیه‌ای که شعاع انحنای کمتری داشته باشد چگالی بار سطحی بیشتری خواهد داشت. (شکل ۲۱.۴)

در فصل قبل دیدیم که شدت میدان در نواحی نزدیک به سطح یک جسم رسانا عبارت است از $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. اکنون، با توجه به معادله ۱۸.۴، معلوم می‌شود که شدت میدان در نواحی تیز جسم به حداکثر مقدار می‌رسد. اگر شدت میدان به اندازه کافی زیاد باشد (در حدود $3 \times 10^6 \frac{V}{m}$) در هوای خشک، می‌تواند تخلیه الکتریکی در هوا ایجاد کند. وقوع این پدیده ناشی از برخی



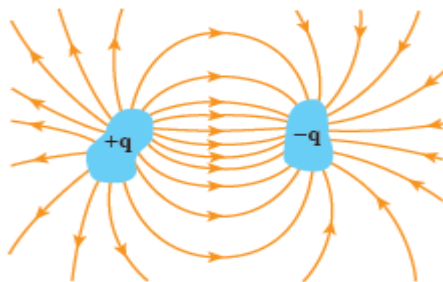
شکل ۲۱.۴ در رساناهای با شکل نامنظم، ناحیه‌ای که شعاع انحنای کوچکتری دارد، چگالی بار سطحی بزرگتری خواهد داشت.

مولکولهای یونیده در هواست که معمولاً بر اثر پرتوهای کیهانی یا پرتوزایی مواد رادیواکتیو درون زمین به وجود می آیند. الکترونهای آزاد موجود در هوا، بر اثر میدان الکتریکی، سریعاً شتاب می گیرند و در پی برخورد با مولکولهای دیگر یونهای بیشتری به وجود می آورند. در این حال، هوا خاصیت عایق بودن را از دست می دهد و تبدیل به رسانا می شود. نتیجه این فرایند، وقوع «تخلیه هاله‌ای» همراه با تابش نور مرئی است. جرقه‌های تابناکی که گهگاه در اطراف خطوط انتقال برق دیده می شود نمونه‌ای از این نوع تخلیه هاست. برای جلوگیری از تخلیه هاله‌ای، سطوح دستگاههای مولد ولتاژ زیاد را معمولاً صاف و با شعاع انحنا بزرگ می سازند. برعکس، برای کمک به وقوع تخلیه، از سطوح نوک تیز استفاده می شود. میله‌های برق‌گیر را طوری می سازند که ابرهای باردار را با تخلیه مداوم خنثی کنند. سیمهای کوتاهی که از بالهای هواپیماها به بیرون کشیده می شوند برای همین منظورند.

در سطح هر کره باردار، پتانسیل به صورت $V = k \frac{Q}{R}$ و شدت میدان به صورت $E = k \frac{Q}{R^2}$ است. بنابراین، می دانیم $V = ER$ ؛ و برای شدت میدان جرقه‌زنی معلوم E داریم $V \propto R$. پتانسیل لازم برای جرقه‌زنی کره‌ای به شعاع ۱۰ cm ممکن است به حدود $3 \times 10^5 V$ برسد. اما، یک ذره غبار به شعاع ۰.۵ mm در پتانسیل ۱۵۰ V هم می تواند باعث تخلیه شود. غبارهایی که در سیلوهای غلات یا کارخانه‌های سیمان وجود دارند، به آسانی ممکن است بر اثر اصطکاک باردار شوند و به این حد از پتانسیل برسند. این نوع تخلیه‌های الکتریکی، در چند مورد در کانادا و ایالات متحد آمریکا به انفجارهای خطرناکی منجر شده است.

فیزیک الکتریسیته و مغناطیس جلسه ۶

خازن: خازن وسیله ای است برای ذخیره بار الکتریکی و انرژی الکتریکی که با حرف C نشان می‌دهیم واحد آن فاراد



دو رسانا که به طور الکتریکی از یکدیگر و محیط اطراف خود منزوی شده‌اند، تشکیل یک خازن را می‌دهند.

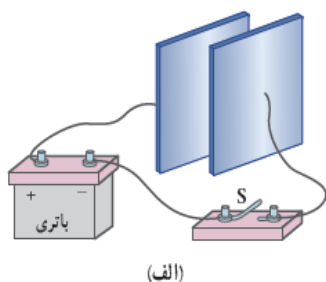
است و با علامت (+-) نشان می‌دهیم.



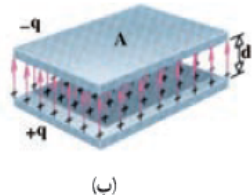
تصویری از چند خازن مختلف



یک خازن تخت، از دو صفحه با مساحت A ساخته شده است که به فاصله d از هم قرار گرفته اند.



(الف)



(ب)

شکل ۷-۱ الف) برای باردار کردن خازن، آن را به باتری وصل کرده ایم. ب) هر صفحه این خازن

باردار (شارژ) کردن خازن: روش ساده و مرسوم برای باردار کردن خازن قرار دادن آن در مدار الکتریکی ساده ای است که دارای یک باتری است (شکل ۲-۲۵ - الف). وقتی کلید S بسته شود بار از طریق سیم رسانا جریان می یابد. این بار همان الکترون هایی هستند که توسط میدان الکتریکی ای که باتری در سیم ها ایجاد می کند در طول سیم ها به حرکت واداشته می شوند. میدان الکتریکی، الکترون ها را از صفحه متصل به پایانه مثبت باتری به حرکت در می آورد. در نتیجه، این صفحه با از دست دادن الکترون دارای بار مثبت می شود. این میدان، درست همین تعداد الکترون را از پایانه منفی باتری به صفحه ای می راند که از طریق کلید به پایانه منفی باتری متصل است. در نتیجه، این صفحه با به دست آوردن الکترون دارای بار منفی می شود که درست به همان اندازه ای است که صفحه دیگر با از دست دادن الکترون دارای بار مثبت شده است. این شارش بار تا هنگامی ادامه پیدا می کند که اختلاف پتانسیل میان دو صفحه خازن با اختلاف پتانسیل میان دو پایانه باتری یکسان شود. با توجه به اینکه صفحه های خازن رساناست تمام نقاط هر صفحه پتانسیل یکسانی دارد و خطوط میدان الکتریکی عمود بر این صفحه ها و از صفحه مثبت به سمت صفحه منفی است (شکل ۲-۲۵ - ب). وقتی یک خازن باردار می شود، صفحه های آن دارای بارهایی با بزرگی یکسان، ولی علامت مخالف می شود: $+q$ و $-q$. ولی بار یک خازن را به صورت q نشان می دهند که همان بار صفحه مثبت است.

بارهایی با علامت مخالف قرار دارد و میدان الکتریکی عمود بر صفحه ها و از صفحه مثبت به سمت صفحه منفی است.

ظرفیت خازن: نسبت تغییرات بار ذخیره شده به تغییرات اختلاف پتانسیل دو سر خازن را ظرفیت خازن گویند و از رابطه

$$C = \frac{q}{V} \quad \text{یا} \quad C = \frac{\Delta q}{\Delta V}$$

واحدهای کوچکتر آن استفاده میشود مانند میکرو فاراد ($10^{-6} F$) و نانو فاراد ($10^{-9} F$) و پیکو فاراد ($10^{-12} F$)

C : ظرفیت خازن فاراد q : بار بر حسب کولن V : اختلاف پتانسیل بر حسب ولت

مثال:

صفحه های خازنی را به پایانه های مولدی با اختلاف پتانسیل $240V$ وصل می کنیم. اگر بار خازن $120 \mu C$ شود الف) ظرفیت خازن را محاسبه کنید.

ب) اگر این خازن را به اختلاف پتانسیل $360V$ وصل کنیم، بار الکتریکی آن چقدر می شود؟

پاسخ:

الف) با استفاده از رابطه ظرفیت داریم:

$$C = \frac{q}{V} = \frac{1/20 \times 10^{-4} C}{24/0 V} = 5/0 \times 10^{-6} F = 5/0 \mu F$$

ب) با توجه به اینکه ظرفیت خازن همواره مقدار ثابتی است از ظرفیت به دست آمده در قسمت الف استفاده می کنیم.

آنگاه با استفاده از رابطه ظرفیت می توان نوشت:

$$q = CV = (5/0 \times 10^{-6} F)(36/0 V) = 18 \times 10^{-6} C = 18 \mu C$$

۱۱-۲- خازن با دی الکتریک

اگر فضای میان صفحه های یک خازن را با ماده ای عایق (مانند کاغذ یا پلاستیک) که به آن **دی الکتریک** گفته می شود پر کنیم برای ظرفیت خازن چه پیش می آید؟ **مایکل فارادی** نخستین بار در سال ۱۸۳۷ میلادی، با استفاده از وسایل ساده ای دریافت که ظرفیت خازن با ضریبی موسوم به ثابت دی الکتریک ماده عایق (که آن را با κ نشان می دهند) افزایش می یابد؛ یعنی اگر ظرفیت خازن بدون دی الکتریک را با C نمایش دهیم آنگاه ظرفیت خازن با دی الکتریک برابر با $C = \kappa C$ می شود. جدول ۱-۲ ثابت دی الکتریک چند ماده عایق را نشان می دهد.

جدول ۱-۲- برخی از ویژگی های دی الکتریک ها در دمای $20^\circ C$		
ماده دی الکتریک	ثابت دی الکتریک	قدرت دی الکتریک (kV/mm)
هوای ۱ atm	۱/۰۰۰۶	۳
تفلون	۲/۱	۶۰
پارافین	۲/۲	۱۰
پلی استیرن	۲/۶	۲۴
میلار	۳/۱	۲۸۰
PVC (پلی وینیل کلراید)	۳/۴	۲۹
کاغذ	۳/۵	۱۶

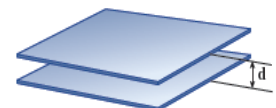
عوامل موثر بر ظرفیت خازن مسطح:

همانطور که از مباحث قبلی میدانیم

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \xrightarrow{\sigma = \frac{Q}{A}} E = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \Rightarrow Q = E \epsilon_0 A$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{E \epsilon_0 A}{V} \xrightarrow{E = \frac{V}{d}} C = \frac{\frac{V}{d} \epsilon_0 A}{V} \Rightarrow C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

$$\epsilon_0 = 8/85 \times 10^{-12} \frac{F}{m}$$



یک خازن تخت، از دو صفحه با مساحت A ساخته شده است که به فاصله d از هم قرار گرفته اند.

که ظرفیت خازن با دی الکتریک K از رابطه $C = K \epsilon_0 \frac{A}{d}$ بدست می آید.

A: سطح صفحات بر حسب متر d: فاصله بین صفحات بر حسب متر K: ضریب دی الکتریک بین صفحات

بنابر این عوامل موثر بر ظرفیت خازن مسطح عبارتند از :

۱- سطح صفحات ۲- فاصله بین صفحات ۳- دی الکتریک بین صفحات

مثال:

مساحت هریک از صفحه‌های خازن تختی $4/0 \times 10^{-2} \text{ cm}^2$ و فاصله جدایی صفحه‌های آن $1/0 \times 10^{-3} \text{ mm}$ است. فضای بین صفحه‌ها را با صفحه کاغذی پر می‌کنیم. با استفاده از جدول ۱-۲ الف) ظرفیت خازن و ب) پتانسیل فروریزش الکتریکی آن را محاسبه کنید.

پاسخ:

الف) ظرفیت خازن با دی الکتریک برابر است با

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

ثابت دی الکتریک کاغذ با استفاده از جدول ۱-۲ برابر با $3/5$ است و از آنجا برای ظرفیت خازن داریم :

$$C = (3/5)(8/85 \times 10^{-12} \text{ F/m}) \frac{(4/0 \times 10^{-2} \text{ m}^2)}{(1/0 \times 10^{-3} \text{ m})} = 1/2 \times 10^{-8} \text{ F} = 12 \text{ nF}$$

ب) با استفاده از رابطه میدان به ازای $\alpha = 0$ ($\Delta V = -Ed$) پتانسیل فروریزش را به دست می‌آوریم. همان‌طور که گفتیم در نمادگذاری این کتاب از نماد V برای نشان دادن قدر مطلق اختلاف پتانسیل صفحه‌های خازن استفاده می‌کنیم. بنابراین، منظور از پتانسیل فروریزش همان اختلاف پتانسیل بیشینه‌ای است که به فروریزش دی الکتریک خازن می‌انجامد. آنگاه با استفاده از جدول ۱-۲ داریم :

$$V_{\text{فروریزش}} = E_{\text{فروریزش}} d = (16 \times 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}})(1/0 \times 10^{-3} \text{ m}) = 1/6 \times 10^4 \text{ V} = 1/6 \text{ kV}$$

توجه کنید در محاسبه بالا از قدرت دی الکتریک به جای $E_{\text{فروریزش}}$ استفاده کردیم.

مثال:



برخی از صفحه کلیدهای رایانه (شکل الف) بر مبنای تغییر ظرفیت خازن عمل می کنند. هر کلید این صفحه به یک سر پایه ای نصب شده است که سر دیگر آن به یک صفحه فلزی متحرک متصل است. این صفحه فلزی خود توسط یک دی الکتریک انعطاف پذیر از صفحه فلزی ثابتی جدا شده است و درواقع این دو صفحه یک خازن تخت را تشکیل می دهند (شکل ب). با فشار دادن کلید، صفحه متحرک به صفحه ثابت نزدیک می شود و ظرفیت خازن افزایش می یابد. این تغییر ظرفیت به صورت سیگنالی الکتریکی توسط مدارهای الکترونیکی رایانه آشکار می شود و بدین ترتیب مشخص می شود که کدام کلید فشار داده شده است.

فاصله بین صفحه ها عموماً $5/00 \times 10^{-3} \text{ m}$ است که این فاصله با فشار دادن کلید به $1/50 \times 10^{-3} \text{ m}$ می رسد. مساحت صفحه ها $9/50 \times 10^{-5} \text{ m}^2$ است و خازن از ماده ای با ثابت دی الکتریک $3/50$ پر شده است. تغییر ظرفیتی که با فشار دادن کلید، توسط مدارهای الکترونیکی رایانه آشکار می شود چقدر است؟

پاسخ: با استفاده از رابطه

ظرفیت خازن پیش از فشار دادن کلید برابر است با

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} = 3/50 (8/85 \times 10^{-12} \text{ F/m}) \frac{(9/50 \times 10^{-5} \text{ m}^2)}{(5/00 \times 10^{-3} \text{ m})}$$

$$= 0/589 \times 10^{-12} \text{ F} = 0/589 \text{ PF}$$

پس از فشردن کلید، فاصله بین صفحه ها به $1/50 \times 10^{-3} \text{ m}$ می رسد و با محاسبه ای مشابه به $C = 19/6 \times 10^{-12} \text{ F} = 19/6 \text{ PF}$ می رسیم. بنابراین، تغییر ظرفیت خازن که به صورت سیگنالی آشکار می شود از تفاضل دو مقدار بالا به دست می آید:

$$\Delta C = 19/6 \text{ PF} - 0/589 \text{ PF} = 19/0 \text{ PF}$$

انواع خازن ها

غالباً خازن ها را براساس دی الکتریک آنها دسته بندی می کنند؛ مثلاً خازن کاغذی، الکترولیتی، سرامیکی، میکا و خازن ها بسیار متنوع اند؛ زیرا برای کاربردهای مختلفی ساخته می شوند. در اینجا با چند نمونه خازن آشنا می شوید.



خازن های کاغذی: این خازن ها از دو ورقه قلع یا آلومینیوم تشکیل شده اند که بین آنها دو ورقه کاغذ ظریف و نازک آغشته به روغن جا داده می شود. این ورق ها را لوله می کنند و به صورت یک استوانه درمی آورند و در محفظه ای پلاستیکی یا پوشش مومی قرار می دهند (شکل روبه رو). ظرفیت این نوع خازن ها از 1 nF تا $1 \mu\text{F}$ است.

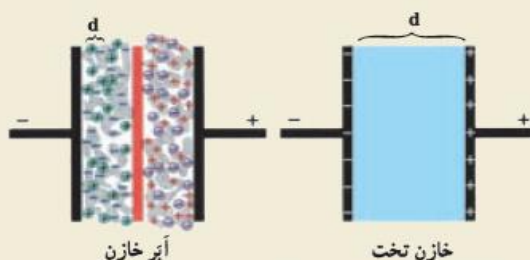
خازن های میکا: بین ورقه های فلزی نازک قلعی، ورقه های نازک میکا قرار می دهند و ورقه های قلع را یک در میان به یکدیگر وصل می کنند. ظرفیت این خازن ها حدود 50 تا 500 پیکوفاراد است.

خازن های سرامیکی: دی الکتریک این خازن ها سرامیک است که با استفاده از انواع سیلیکات ها در دمای بالا تهیه می شود. ثابت دی الکتریک این خازن ها زیاد و در حدود 1000 است. خازن های سرامیکی به شکل عدس تهیه می شوند و

حجم آنها کم است. صفحه‌های رسانای آنها نیز با ذوب نقره در دو طرف سرامیک تهیه می‌شود. ظرفیت این خازن‌ها حدود ده‌ها نانوفاراد (nF) است.

خازن‌های الکترولیتی: این نوع خازن‌ها از صفحه‌های آلومینیومی تشکیل شده‌اند که در میان آنها الکترولیت‌هایی از انواع مختلف فسفات یا کربنات قرار می‌دهند. در بین صفحه‌ها ماده‌ای اسفنجی است که الکترولیت را به خود جذب می‌کند. ظرفیت این خازن‌ها بالاست و تا حدود 10^5 F می‌رسد.

آبر خازن: این نوع خازن‌ها می‌توانند با حجمی حدود $16/4 \text{ cm}^3$ ظرفیتی تا چند کیلوفاراد داشته باشند. صفحه‌های این نوع خازن‌ها که از نوعی الکترولیت پر شده‌اند با استفاده از موادی ساخته شده‌اند که در مقیاس نانو مساحت سطح بسیار بزرگی دارند. فناوری نانو به کار گرفته شده در این خازن‌ها به ظرفیت‌های بسیار بزرگی (از مرتبه کیلوفاراد) می‌انجامد. یکی از ویژگی‌های این خازن‌ها آن است که خیلی سریع‌تر از باتری‌های شارژ شدنی شارژ می‌شوند و می‌توان آنها را به دفعاتی تا هزاران بار بیشتر از این باتری‌ها شارژ کرد. همین ویژگی است که باعث استفاده از این خازن‌ها در وسایل نقلیه الکتریکی می‌شود.



طرحی از ساختار یک آبر خازن در مقایسه با یک خازن تخت معمولی. به تفاوت d ها توجه کنید. در عمل این تفاوت به مراتب بیشتر است. d در یک آبر خازن از مرتبه نانومتر است.

خازن‌های متغیر: دی‌الکتریک این خازن‌ها معمولاً هواست. در ساختمان آنها دو نوع صفحه فلزی، یک دسته ثابت و دسته دیگر متحرک به کار رفته است که هر دو دسته، روی یک محور قرار گرفته‌اند؛ ولی صفحه‌های متحرک روی این محور می‌چرخند. صفحه‌ها به شکل نیم دایره‌اند و با چرخیدن صفحه‌های متحرک، مساحت خازن کم و زیاد می‌شود. این نوع خازن‌ها در گیرنده‌های رادیویی به کار می‌رفته است.



تصویری از یک خازن متغیر

۱۲-۲- انرژی خازن

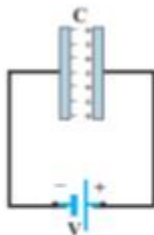
وقتی صفحه‌های خازن دارای بار الکتریکی می‌شوند در خازن انرژی نیز ذخیره می‌شود؛ مثلاً در هنگام شارژ شدن خازن توسط باتری، دائماً باری جزئی از یک صفحه خازن جدا و به همان اندازه به صفحه دیگر منتقل می‌شود. در این فرایند طبق رابطه پتانسیل باتری روی این بار کار انجام می‌دهد. هنگام انتقال بار، اختلاف پتانسیل دو صفحه خازن نیز به آهستگی افزایش می‌یابد. بنابراین، برای انتقال بارهای بعدی به کار بیشتری نیاز است. بنا به رابطه $(V = q/C)$ و با توجه به اینکه در این فرایند ظرفیت خازن همواره مقدار ثابتی است، می‌توانیم اختلاف پتانسیل دو صفحه خازن را تابعی خطی از بار ذخیره شده در آن بدانیم که به طور یکنواخت از صفر تا V افزایش می‌یابد. بنابراین، در هنگام باردار شدن خازن می‌توان اختلاف پتانسیل متوسطی را به صورت $\bar{V} = \frac{V+0}{2} = \frac{V}{2}$ برای دو صفحه خازن در نظر گرفت. آنگاه با استفاده از رابطه ۱۲-۲، کار انجام شده برای باردار شدن کامل خازن برابر با حاصل ضرب کل بارهای جزئی منتقل شده (q) در اختلاف پتانسیل متوسط است:

$$W = q\bar{V} = q\left(\frac{V}{2}\right) = \frac{1}{2}qV$$

این کار به صورت انرژی پتانسیل الکتریکی در میدان الکتریکی فضای بین صفحه‌های خازن ذخیره می‌شود. بنابراین روابط انرژی ذخیره شده در خازن به صورت زیر است

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{w}{q} \Rightarrow w = q\bar{v} \xrightarrow{\bar{v} = \frac{0+v}{2} = \frac{v}{2}} w = q \cdot \frac{v}{2} \Rightarrow w = \frac{1}{2}qv \\ w &= \frac{1}{2}qv \xrightarrow{q=Cv} w = \frac{1}{2}(cv)v \Rightarrow w = \frac{1}{2}cv^2 \\ w &= \frac{1}{2}qv \xrightarrow{v=\frac{q}{c}} w = \frac{1}{2}q\left(\frac{q}{c}\right) \Rightarrow w = \frac{1}{2}\frac{q^2}{c}\end{aligned}$$

مثال:



دو سرب یک خازن $0.5 \mu F$ را به ولتاژ $12V$ وصل می‌کنیم. بار و انرژی ذخیره در آن را محاسبه کنید.

پاسخ: با توجه به رابطه $q = CV$ بار ذخیره شده برابر است با

$$q = CV = (0.5 \times 10^{-6} F)(12V) = 6 \times 10^{-6} C = 6 \mu C$$

با استفاده از رابطه $U = \frac{1}{2}qV$ انرژی خازن را محاسبه می‌کنیم:

$$W = U = \frac{1}{2}qV = \frac{1}{2}(6 \times 10^{-6} C)(12V) = 3.6 \times 10^{-5} J = 3.6 \mu J$$

مثال:

دستگاه رفع لرزش نامنظم قلب (دیفبریلاتور^۱)

توانایی خازن برای ذخیره انرژی پتانسیل الکتریکی، اساس کار بسیاری از دستگاه‌ها مانند دستگاه‌های رفع لرزشی است که توسط گروه‌های فوریت‌های پزشکی برای توقف لرزش بطنی افرادی که دچار حمله قلبی شده‌اند به کار می‌رود. در این بیماری انقباض و انقباض ناهماهنگ و آشفته قلب باعث می‌شود خون به درستی به مغز فرستاده نشود. در دستگاه‌های رفع لرزشی قابل حمل، یک باتری، خازنی را تا اختلاف پتانسیل حدود 6 kV باردار می‌کند و خازن در زمانی کمتر از یک دقیقه مقدار زیادی انرژی ذخیره می‌کند. صفحه‌های رابط

(کفشک^۲) روی قفسه سینه بیمار قرار داده می‌شوند و خازن بخشی از انرژی ذخیره شده خود را از طریق بدن بیمار از یک کفشک به کفشک دیگر منتقل می‌کند. هدف از این کار این است که یک پالس (تپ) جریان قوی به قلب بدهند تا قلب به طور موقت از کار بیفتد و پس از آن با آهنگ منظم طبیعی خود به کار افتد.

اگر خازن این دستگاه به ظرفیت $11 \mu\text{F}$ با ولتاژ $6 \times 10^3 \text{ kV}$ شارژ شود و سپس تمام انرژی آن از طریق کفشک‌ها به درون بدن بیمار تخلیه شود،

الف) چقدر انرژی در بدن بیمار تخلیه شده است؟

ب) چه مقدار بار الکتریکی از بدن بیمار عبور کرده است؟

پ) اگر تخلیه انرژی تقریباً در مدت $2 \times 10^{-3} \text{ ms}$ صورت پذیرفته باشد توان پالس جریان چقدر بوده است؟

پاسخ: الف) انرژی ذخیره شده در خازن با استفاده از رابطه (۱۹-۲) به دست می‌آید:

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} (11 \times 10^{-6} \text{ F}) (6 \times 10^3 \text{ V})^2 = 198 \text{ J}$$

که با توجه به فرض مسئله این همان انرژی تخلیه شده در بدن بیمار است.

ب) بار اولیه روی صفحات خازن برابر است با

$$q = CV \Rightarrow q = (11 \times 10^{-6} \text{ F}) (6 \times 10^3 \text{ V}) = 66 \times 10^{-3} \text{ C}$$

با توجه به فرض مسئله، این همان باری است که از بدن بیمار عبور کرده است.

پ) توان پالس (تپ) برابر است با

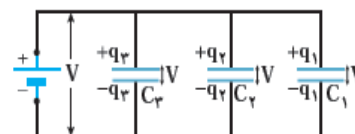
$$P = \frac{U}{t} = \frac{198}{2 \times 10^{-3}} = 99 \times 10^3 \text{ W}$$

ظرفیت خازن معادل: خازنی که به جای دو یا چند خازن قرار میگیرد بطوری که تحت اختلاف پتانسیل ثابت بار ذخیره

شده تغییر نکند و با $C_t = C_{eq}$ نشان می‌دهیم

۲-۱۳ به هم بستن خازن‌ها در مدار

در گذشته‌های دور برای به دست آوردن ظرفیت مورد نیاز، تعداد معینی خازن را طوری به هم می‌بستند که ظرفیت مورد نظر را به دست آورند، ولی امروزه همان‌طور که پیش‌تر دیدیم مدارهای الکتریکی پُر از خازن‌هایی است که هریک بنا به ویژگی‌های خود در مدار استفاده شده است. خازن‌ها می‌توانند به روش‌های مختلفی به یکدیگر متصل شوند که در اینجا دو نوع رایج این اتصال‌ها را بررسی می‌کنیم که **موازی** و **متوالی** نامیده می‌شوند. مجموعه خازن‌هایی که به این روش‌ها به هم متصل شده‌اند را می‌توان با یک خازن جایگزین کرد که به این خازن، **خازن معادل** و به ظرفیت آن، **ظرفیت معادل** (C_{eq}) می‌گویند. انرژی الکتریکی ذخیره شده در این خازن معادل برابر مجموع انرژی تک تک خازن‌هاست.



شکل ۲-۱۳ سه خازن که به‌طور موازی بسته شده‌اند.

الف) بستن خازن‌ها به صورت موازی: شکل ۲-۱۳ یک مدار الکتریکی را نشان می‌دهد که در آن سه خازن به صورت موازی به باتری متصل شده‌اند. توجه کنید واژه «موازی» ارتباط چندانی به چگونگی ترسیم صفحه‌های خازن‌ها ندارد، بلکه «به صورت موازی» به این معناست که صفحه بالایی خازن‌ها به یکدیگر و صفحه پایینی آنها نیز به یکدیگر متصل شده است و اختلاف پتانسیل یکسان V به دو سر این دسته صفحه‌ها اعمال شده است. بنابراین، هریک از خازن‌ها در اختلاف پتانسیل یکسان V قرار دارد:

$$V_1 = V_2 = V_3 = V$$

بار هر خازن طبق رابطه $q = CV$ به صورت زیر درمی‌آید:

$$q_1 = C_1 V, \quad q_2 = C_2 V, \quad q_3 = C_3 V$$

بنابراین، بار کل ذخیره شده در مجموعه خازن‌ها برابر است با:

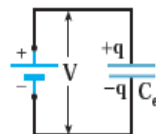
$$q = q_1 + q_2 + q_3 = C_1 V + C_2 V + C_3 V = (C_1 + C_2 + C_3) V$$

در نتیجه ظرفیت معادل ترکیب خازن‌های موازی چنین می‌شود:

$$C_{eq} = \frac{q}{V} = \frac{(C_1 + C_2 + C_3)V}{V} = C_1 + C_2 + C_3$$

و بنابراین، ترکیب این سه خازن موازی را می‌توان با خازن معادل شکل ۲-۱۳ جایگزین کرد. در حالت کلی برای n خازن موازی رابطه بالا به صورت زیر تعمیم می‌یابد:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad (2-21)$$

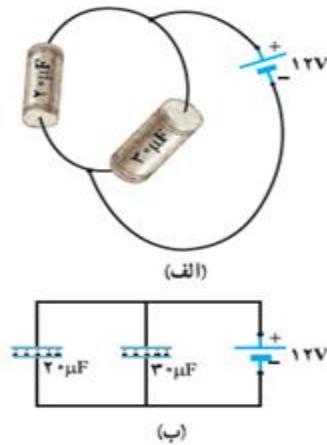


شکل ۲-۱۳ خازن معادل با ظرفیت C_{eq}

بنابراین، ظرفیت خازن معادل خازن‌هایی که به صورت موازی به یکدیگر بسته شده‌اند از ظرفیت هریک از خازن‌ها بیشتر است.

بنابر این ظرفیت خازن معادل از بیشترین ظرفیت خازن بیشتر است

مثال:



شکل الف، دو خازن را نشان می‌دهد که به یک باتری ۱۲V بسته شده‌اند.
الف) ظرفیت، بار و انرژی خازن معادل را محاسبه کنید.
ب) بار و انرژی هر خازن را بیابید.

پاسخ:

الف) شکل الف را می‌توان به صورت آرایش شکل ب نشان داد. با توجه به شکل ب، خازن‌ها موازی‌اند و ظرفیت معادل آنها از مجموع ظرفیت تک‌تک آنها حاصل می‌شود:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 2 \mu F + 3 \mu F = 5 \mu F$$

با توجه به اینکه ولتاژ خازن معادل برابر اختلاف پتانسیل باتری است، بار خازن معادل از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$q = C_{eq} V = (5 \mu F)(12 V) = 60 \times 10^{-6} C$$

و انرژی خازن معادل را می‌توانیم با استفاده از هر کدام از سه رابطه‌ای که برای انرژی خازن به دست آوردیم محاسبه کنیم؛ مثلاً با استفاده از رابطه $U = \frac{1}{2} C V^2$ داریم:

$$U = \frac{1}{2} C_{eq} V^2 = \frac{1}{2} (5 \mu F)(12 V)^2 = 360 \mu J$$

ب) با توجه به اینکه خازن‌ها به صورت موازی بسته شده‌اند، ولتاژ هر خازن برابر با اختلاف پتانسیل دو سر باتری است. اکنون با استفاده از رابطه $q = C V$ بار هر خازن را به دست می‌آوریم:

$$q_1 = C_1 V = (2 \mu F)(12 V) = 24 \times 10^{-6} C$$

$$q_2 = C_2 V = (3 \mu F)(12 V) = 36 \times 10^{-6} C$$

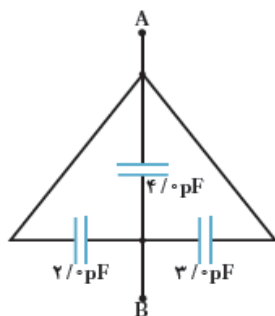
و انرژی هر خازن نیز با استفاده از هر کدام از سه رابطه‌ای که برای انرژی خازن به دست آوردیم محاسبه می‌شود. این دفعه از رابطه $U = \frac{1}{2} q V$ استفاده می‌کنیم:

$$U_1 = \frac{1}{2} q_1 V = \frac{1}{2} (24 \times 10^{-6} C)(12 V) = 144 \mu J$$

$$U_2 = \frac{1}{2} q_2 V = \frac{1}{2} (36 \times 10^{-6} C)(12 V) = 216 \mu J$$

خوب است بررسی کنید که مجموع بار خازن‌ها برابر با بار خازن معادل، و مجموع انرژی خازن‌ها برابر با انرژی خازن معادل است.

مثال:



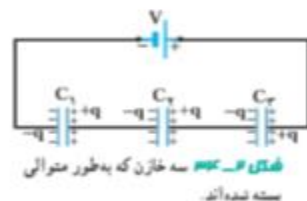
ظرفیت معادل بین پایانه‌های A و B را در شکل روبه‌رو به‌دست آورید.

پاسخ: همان‌طور که در شکل می‌بینیم دو صفحه‌خازن $4/10 \text{ pF}$ به دو صفحه‌خازن‌های $2/10 \text{ pF}$ و $3/10 \text{ pF}$ بسته شده است. بنابراین، خازن $4/10 \text{ pF}$ با دو خازن دیگر موازی است.

در نتیجه داریم:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 = 4/10 \text{ pF} + 3/10 \text{ pF} + 2/10 \text{ pF} = 9/10 \text{ pF}$$

ب) بستن خازن‌ها به صورت متوالی: شکل ۳۴-۲ سه خازن را نشان می‌دهد که به صورت متوالی به یک باتری متصل شده‌اند. توجه کنید واژه «متوالی» ارتباط چندانی به چگونگی ترسیم صفحه‌های خازن‌ها ندارد؛ بلکه «به صورت متوالی» به این معناست که خازن‌ها یکی پس از دیگری به یکدیگر بسته شده‌اند، هیچ انتسابی بین آنها وجود ندارد و یک اختلاف پتانسیل V به دو سر این ترکیب متوالی اعمال شده است. در بستن متوالی خازن‌ها، همه خازن‌ها دارای بار یکسان q می‌شوند. برای توضیح این موضوع، فرایند زیر را که پس از اعمال اختلاف پتانسیل V در خازن‌ها رخ می‌دهد در نظر می‌گیریم.



از خازن ۱ شروع می‌کنیم و رو به سمت راست به سوی خازن ۳ می‌رویم. وقتی باتری به خازن‌های متوالی وصل می‌شود بار $-q$ را روی صفحه سمت چپ خازن ۱ ایجاد می‌کند. آنگاه این بار، بار منفی را از صفحه سمت راست خازن ۱ می‌راند (آن را با بار $+q$ بر جای می‌گذارد). این بار منفی رانده شده به سوی صفحه سمت چپ خازن ۲ حرکت می‌کند (به آن بار $-q$ می‌دهد). سپس بار روی صفحه سمت چپ خازن ۲ بار منفی را از صفحه سمت راست خازن ۲ می‌راند (آن را با بار $+q$ بر جای می‌گذارد) و به صفحه سمت چپ خازن ۳ می‌برد (به آن بار $-q$ می‌دهد). سرانجام بار روی صفحه سمت چپ خازن ۳ کمک می‌کند تا بار منفی از صفحه سمت راست خازن ۳ به سمت باتری حرکت کند و به این ترتیب، صفحه سمت راست را با بار $+q$ بر جای می‌گذارد.

برای به‌دست‌آوردن ظرفیت معادل C_{eq} نخست اختلاف پتانسیل هر یک از خازن‌ها را به‌طور جداگانه به‌دست می‌آوریم:

$$q = q_1 = q_2 = q_3$$

$$V_1 = \frac{q}{C_1}, V_2 = \frac{q}{C_2}, V_3 = \frac{q}{C_3}$$

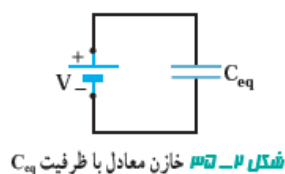
اختلاف پتانسیل کل، برابر با مجموع این سه اختلاف پتانسیل است:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)$$

پس ظرفیت خازن معادل چنین می‌شود:

$$C_{eq} = \frac{q}{V} = \frac{q}{q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}$$

و در نتیجه:



$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

و بنابراین، ترکیب این سه خازن متوالی را می‌توان با خازن معادل شکل ۳۵-۲ جایگزین کرد.

در حالت کلی برای n خازن متوالی رابطه بالا به صورت زیر تعمیم می‌یابد.

بنابراین در اتصال متوالی خازن‌ها ظرفیت معادل از کمترین ظرفیت خازن کمتر است

مثال:



شکل الف دو خازن را نشان می‌دهد که به یک باتری ۱۲V بسته شده‌اند.

الف) ظرفیت، بار و انرژی خازن معادل را محاسبه کنید.

ب) بار، ولتاژ و انرژی هر خازن را بیابید.

پاسخ:

الف) شکل الف را می‌توان به صورت آرایش شکل ب نشان داد.

با توجه به شکل ب، خازن‌ها متوالی‌اند و ظرفیت معادل آنها از رابطه ۲-۲ به دست

می‌آید:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{6 \cdot 10^{-6} F} + \frac{1}{12 \cdot 10^{-6} F} = \frac{1}{4 \cdot 10^{-6} F}$$

در نتیجه $C_{eq} = 4 \cdot 10^{-6} F$ است.

اکنون با استفاده از رابطه $q = C_{eq} V$ بار خازن معادل را به دست می‌آوریم:

$$q = C_{eq} V = (4 \cdot 10^{-6} F)(3 \cdot 10^0 V) = 12 \mu C$$

و انرژی خازن معادل را می‌توانیم با استفاده از هر کدام از سه رابطه‌ای که برای انرژی خازن به دست آوردیم محاسبه

کنیم؛ مثلاً با استفاده از $U = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$ داریم:

$$U = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_{eq}} = \frac{1}{2} \frac{(12 \mu C)^2}{4 \cdot 10^{-6} F} = 18 \mu J$$

ب) با توجه به اینکه خازن‌ها به صورت متوالی بسته شده‌اند، بار هر دو خازن با هم برابر و مساوی بار خازن معادل است:

$$q_1 = q_2 = q = 12 \mu C$$

اکنون با استفاده از رابطه $V = q / C$ ولتاژ هر خازن را می‌یابیم:

$$V_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{12 \mu C}{6 \cdot 10^{-6} F} = 2 \cdot 10^0 V$$

$$V_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{12 \mu C}{12 \cdot 10^{-6} F} = 1 \cdot 10^0 V$$

و انرژی هر خازن نیز با استفاده از هر کدام از سه رابطه‌ای که برای انرژی خازن به دست آوردیم محاسبه می‌شود. این

بار از رابطه $U = \frac{1}{2} qV$ استفاده می‌کنیم:

$$U_1 = \frac{1}{2} q_1 V_1 = \frac{1}{2} (12 \mu C)(2 \cdot 10^0 V) = 12 \mu J$$

$$U_2 = \frac{1}{2} q_2 V_2 = \frac{1}{2} (12 \mu C)(1 \cdot 10^0 V) = 6 \cdot 10^{-6} J$$

خوب است بررسی کنید که مجموع ولتاژ خازن‌ها برابر با ولتاژ کل (ولتاژ باتری) است و نیز مجموع انرژی خازن‌ها

برابر با انرژی خازن معادل است.

تمرین: خازنی به ظرفیت ۸ میکرو فاراد را با اختلاف پتانسیل ۵۰ ولت شارژ می‌کنیم و به یک خازن ۱۲ میکرو فاراد که با

اختلاف پتانسیل ۱۰۰ ولت شارژ شده صفحات همنام را به یکدیگر وصل می‌کنیم تعیین کنید. ۱- بار ذخیره شده قبل از اتصال

به هم ۲- اختلاف پتانسیل بعد از اتصال به یکدیگر ۳- مجموع انرژی دو خازن قبل و بعد از اتصال به یکدیگر ۴- نتیجه

گیری

فیزیک الکتریسیته مغناطیس جلسه هفتم

اتصال مختلط خازنها

مثال ۶.۵: برای مداری که در شکل ۸.۵-الف نشان داده شده است، (الف) ظرفیت معادل؛ (ب) بار و اختلاف پتانسیل هر یک از خازنها را بیابید.

حل: هنگامی که با مدار پیچیده‌ای از خازنها سر و کار داریم، ابتدا باید بکوشیم آنها را به کمترین تعداد مؤلفه‌های متوالی یا متوازی تقلیل دهیم تا مدار به صورت ساده‌ای درآید. (الف) از خازنهای C_3 و C_4 آغاز می‌کنیم که، با توجه موازی بودنشان، معادل یک خازن به ظرفیت $4\mu F$

می‌شوند. این خازن معادل، با توجه به شکل ۸.۵-ب، به طور متوالی با خازنهای C_1 و C_2 قرار می‌گیرد. ظرفیت معادل کل را مطابق شکل ۸.۵-ج، می‌توان از رابطه زیر به دست آورد

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

که از آن حاصل می‌شود $C_{eq} = 2\mu F$.

(ب) چون خازنهای متوالی بار الکتریکی یکسان دارند، داریم

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 = Q_4$$

مقدار باری که روی ظرفیت معادل قرار می‌گیرد نیز همین است، پس داریم

$$Q = C_{eq}V = (2\mu F)(48V) = 96\mu C. \text{ در نتیجه، } Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = 96\mu C$$

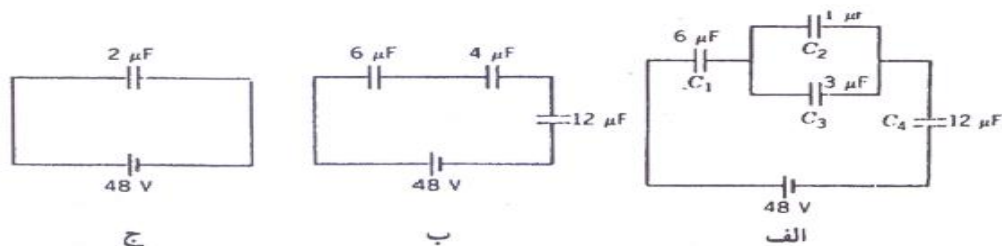
برای تعیین بار الکتریکی دو خازن دیگر، باید اختلاف پتانسیل دو سرشان $V_1 = V_2 = V_3$ را بدانیم. نخست، اختلاف پتانسیلهای خازنهای C_1 و C_2 را پیدا می‌کنیم:

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{96\mu C}{6\mu F} = 16V$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{96\mu C}{12\mu F} = 8V$$

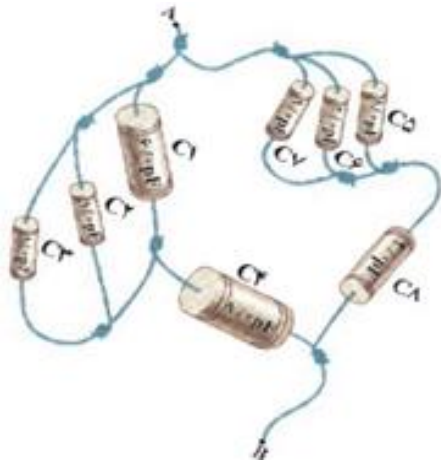
چون اختلاف پتانسیل دو سر باتری برابر $48V$ است، باید داشته باشیم

$$V_3 = V_4 = 48V - (16V + 8V) = 24V$$



شکل ۸.۵ برای یافتن ظرفیت معادل کل می‌توان مسأله را به چند مرحله تقسیم کرد.

$$Q_3 = C_3 V_3 = (3\mu F)(24V) = 72\mu C \quad \text{و} \quad Q_4 = C_4 V_4 = (12\mu F)(24V) = 288\mu C$$



مثال: شکل روبه‌رو، هشت خازن را نشان می‌دهد که به صورت

مجموعه‌ای از اتصال‌های متوالی و موازی به هم بسته شده‌اند.

الف) ظرفیت خازن معادل بین پایانه‌های A و B را در شکل محاسبه کنید.

ب) اگر پایانه‌های A و B را به یک باتری با ولتاژ ۱۲V وصل کنیم چه مقدار انرژی در دستگاه خازن‌ها ذخیره می‌شود؟

پاسخ:

الف) با توجه به شکل، سه خازن خوشه سمت چپ با هم موازی‌اند و ظرفیت معادل آنها برابر است با

$$C_{۱۲۳} = C_1 + C_2 + C_3 = 6/\circ\text{pF} + 1/\circ\text{pF} + 1/\circ\text{pF} = 8/\circ\text{pF}$$

خازن $C_{۱۲۳}$ خود با خازن C_4 متوالی است. بنابراین ظرفیت معادل خازن‌های سمت چپ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1}{C_{\text{چپ}}} = \frac{1}{C_{۱۲۳}} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{8/\circ\text{pF}} + \frac{1}{8/\circ\text{pF}} = \frac{1}{4/\circ\text{pF}} \Rightarrow C_{\text{چپ}} = 4/\circ\text{pF}$$

به همین ترتیب سه خازن خوشه سمت راست با هم موازی‌اند و ظرفیت معادل آنها برابر است با

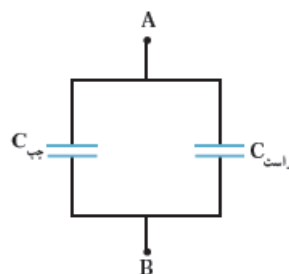
$$C_{۵۶۷} = C_5 + C_6 + C_7 = 1/\circ + 2/\circ + 1/\circ = 4/\circ\text{pF}$$

خازن $C_{۵۶۷}$ خود با خازن C_8 متوالی است. بنابراین، ظرفیت معادل خازن‌های سمت راست از رابطه زیر به دست

می‌آید:

$$\frac{1}{C_{\text{راست}}} = \frac{1}{C_{۵۶۷}} + \frac{1}{C_8} = \frac{1}{4/\circ\text{pF}} + \frac{1}{4/\circ\text{pF}} = \frac{1}{2/\circ\text{pF}} \Rightarrow C_{\text{راست}} = 2/\circ\text{pF}$$

بنابراین، شکل این دستگاه خازن‌ها به صورت شکل زیر درمی‌آید.



در نتیجه ظرفیت خازن معادل این دستگاه خازن‌ها برابر است با

$$C_{\text{eq}} = C_{\text{چپ}} + C_{\text{راست}} = 4/\circ\text{pF} + 2/\circ\text{pF} = 6/\circ\text{pF}$$

ب) با استفاده از یکی از سه رابطه انرژی خازن‌ها می‌توانیم ذخیره شده در این دستگاه را بیابیم. در اینجا ساده‌تر

آن است که از رابطه $U = \frac{1}{2} CV^2$ استفاده کنیم:

$$U = \frac{1}{2} C_{\text{eq}} V^2 = \frac{1}{2} (6/\circ\text{pF}) (12\text{V})^2 = 4/3 \times 10^{-2} \text{pJ}$$

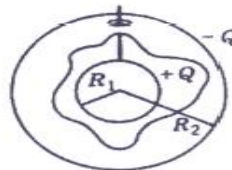
مثال ۳.۵: ظرفیت یک کره منزوی به شعاع R چقدر است؟

حل: اگر کره فلزی منزوی به بار $+Q$ در اختیار داشته باشیم، می‌توانیم بار آن را منتقل شده از سطح زمین در نظر بگیریم (زمین هم رساناست و هم می‌توان آن را به عنوان «صفحه دیگر» در نظر گرفت). پتانسیل این کره برابر $V = \frac{kQ}{R}$ است. چون داریم $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ، ظرفیت کره چنین می‌شود

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R \quad (۴.۵)$$

چنانکه می‌بینیم، ظرفیت کره باردار فقط به شعاع آن، که کمیتی هندسی است، بستگی دارد. این نتیجه از این لحاظ که کره بزرگتر نیاز به بار بیشتری دارد تا پتانسیل آن به مقدار معین برسد، معقول است. اگر زمین را کره‌ای رسانا به شعاع 6370 km در نظر بگیریم، بنابر ۴.۵، ظرفیت آن برابر $710 \mu\text{F}$ خواهد شد.

مثال ۴.۵: خازن کروی، مطابق شکل ۴.۵، از دو کره رسانای هم مرکز درست می‌شود. اگر بار کره درونی به شعاع R_1 برابر $+Q$ و بار کره بیرونی به شعاع R_2 برابر $-Q$ باشد، ظرفیت آن چقدر است؟



شکل ۴.۵ خازن کروی

حل: اختلاف پتانسیل بین کره‌ها را از میدان الکتریکی به دست می‌آوریم: $\Delta V = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$. چون میدان فقط مؤلفه شعاعی دارد، داریم $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_r dr$ که در آن $E_r = +kQ/r^2$ است. (توجه داشته باشید که E_r صرفاً از بار کره درونی حاصل می‌شود.) اختلاف پتانسیل عبارت است از

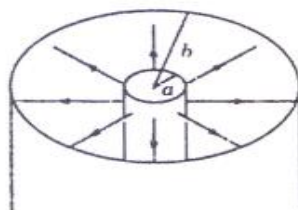
$$\begin{aligned} V_2 - V_1 &= - \int_{R_1}^{R_2} E_r dr = - \left[-\frac{kQ}{r} \right]_{R_1}^{R_2} \\ &= kQ \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \end{aligned}$$

که علامت آن منفی است، اما ما فقط به مقدار آن علاقه‌مندیم. با توجه به $C = Q/V$ ، به دست می‌آوریم

$$C = \frac{R_1 R_2}{k(R_2 - R_1)} \quad (۵.۵)$$

رابطه میان این عبارت و ظرفیت کره منزوی، و همچنین ظرفیت خازن صفحه - موازی را می‌توان به دست آورد.

مثال ۵.۵: خازن استوانه‌ای را، مطابق شکل ۵.۵، با استفاده از یک رسانای مرکزی به شعاع a و پوسته‌ای استوانه‌ای به شعاع b می‌سازند. کابل‌های هم محور بر همین اساس ساخته می‌شوند. معمولاً پوسته بیرونی که به زمین وصل می‌شود، سیگنال‌های سیم داخلی را از اغتشاشهای الکتریکی محافظت می‌کند. یک لایه نایلونی یا تفلونی، سیم داخلی را از پوسته بیرونی جدا می‌کند. با فرض آنکه فاصله بین صفحات از هوا پر شده باشد، ظرفیت خازنی به طول L را به دست آورید.



شکل ۵.۵ خازن استوانه‌ای

حل: فرض می‌کنیم کابل به قدری بلند است که از اثر لبه می‌توانیم صرف‌نظر کنیم. در این صورت، میدان الکتریکی که به کمک قانون گاوس قابل محاسبه است، همانند میدان ناشی از خط باردار نامتناهی است. اگر چگالی بار خطی روی رسانای مرکزی برابر $\lambda \left(\frac{C}{m} \right)$ باشد، میدان الکتریکی در ناحیه $a < r < b$ عبارت است از

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

توجه داشته باشید که شدت میدان را فقط چگالی بار رسانای داخلی تعیین می‌کند. چون میدان فقط مؤلفه شعاعی دارد، داریم $E \cdot ds = E_r dr$. اختلاف پتانسیل بین رساناها عبارت است از

$$\begin{aligned} V_b - V_a &= - \int_a^b E_r dr = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r} \\ &= - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

چیزی که معمولاً نیاز به شناختن آن داریم، مقدار اختلاف پتانسیل است. چون بار موجود در طول L برابر $Q = \lambda L$ می‌شود، ظرفیت خازن عبارت است از

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)} \quad (۶.۵)$$

پس ظرفیت با طول کابل متناسب است و مقدار آن هنگامی که $h \rightarrow a$ ، افزایش می‌یابد. برای درک این رابطه، حالتی را در نظر بگیرید که شعاع پوسته بیرونی ثابت و اختلاف پتانسیل هم مقدار معلومی باشد. عبارت $V_b - V_a$ نشان می‌دهد که همزمان با افزایش شعاع داخلی a ، مقدار $\ln$ هم باید افزایش یابد (چون $\ln \frac{b}{a}$ در حال کاهش است). چگالی بار بزرگتر $\ln$ به معنی بار ذخیره شده بیشتر برای اختلاف پتانسیل معلوم، و در نتیجه افزایش ظرفیت خازن است.

۴-۵ چگالی انرژی در میدان الکتریکی

می‌دانیم کار لازم برای اینکه دو بار نقطه‌ای را از فاصله نامتناهی به فاصله‌ای متناهی از یکدیگر

بیاوریم، به صورت انرژی پتانسیل ذخیره می‌شود. با توجه به اینکه هیچ‌گونه تغییری در بارها به وجود نمی‌آید، می‌توان پرسید که این انرژی پتانسیل در کجا ذخیره می‌شود؟ برای پاسخ دادن به این پرسش، انرژی ذخیره شده در خازن را در نظر می‌گیریم. ظرفیت یک خازن صفحه - موازی (شکل ۱۰.۵) برابر $C = \epsilon_0 A/d$ ، و اختلاف پتانسیل بین صفحات آن برابر $V = Ed$ است. انرژی ذخیره شده در خازن، $U_E = \frac{1}{2} CV^2$ ، را می‌توان چنین نوشت

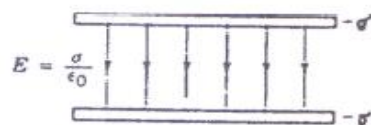
$$U_E = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 (Ad)$$

چون حجم فضای بین صفحات که در آن میدان الکتریکی برقرار می‌شود برابر Ad است، چگالی انرژی یا انرژی متناظر به واحد حجم $(\frac{J}{m^3})$ برابر است با

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (10.5)$$

توجه داشته باشید که در این فرمول هیچ ارجاع مستقیمی به خازن دیده نمی‌شود. پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که انرژی در میدان الکتریکی ذخیره می‌شود. فرمول ۱۰.۵ را، با آنکه در حالت خاصی به دست آورده‌ایم، به‌طور کلی به عنوان چگالی انرژی میدان الکتریکی معتبر می‌دانیم. انرژی پتانسیل مجموعه‌ای از بارها به تغییر شکل میدان الکتریکی وابسته است. برای نمونه، وقتی که خازنی را باردار می‌کنیم، کار را برای تولید میدان بین صفحات انجام می‌دهیم. هنگامی که دوبار نقطه‌ای مثبت را در نزدیکی هم قرار می‌دهیم، برای تشکیل میدان الکتریکی در اطراف بارها کاری انجام می‌شود. چنانچه این بارها به حال خود رها شوند، از یکدیگر فاصله می‌گیرند و با کاهش انرژی میدان، بر انرژی جنبشی بارها افزوده می‌شود.

دانشمندان قرن نوزدهم، میدان الکتریکی را به صورت نوعی کشیدگی یا تغییر شکل در محیطی به نام اتر (یا اثير) در نظر می‌گرفتند. امروزه می‌دانیم که اتر وجود ندارد. میدانهای الکتریکی می‌توانند در فواصل دور از چشمه‌های مولد، در خلأ، وجود داشته باشند. بدین‌سان، برای آنها باید وجود مستقلی را در نظر بگیریم. انرژی‌هایی که به صورت نور و گرما از خورشید دریافت می‌کنیم، در قالب میدانهای الکتریکی و مغناطیسی به ما می‌رسند. چنانکه در فصل ۱۳



شکل ۱۰.۵ انرژی خازن در میدان الکتریکی آن ذخیره می‌شود. چگالی انرژی برابر $u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ است.

خواهیم دید، میدانها نه تنها حامل انرژی بلکه حامل تکانه نیز هستند.

مثال ۸.۵: شدت میدان «شکست»، که در آن هوای خشک خاصیت عایق بودنش را از دست می‌دهد و به تخلیه الکتریکی اجازه عبور می‌دهد، تقریباً در حدود $3 \times 10^6 \frac{V}{m}$ است. چگالی انرژی در این شدت میدان چقدر است؟

حل: چگالی انرژی در این شدت میدان، بتاب ۱۰.۵، برابر است با

$$u_E = \frac{1}{2} \left(8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N.m^2} \right) \left(3 \times 10^6 \frac{V}{m} \right)^2 = 40 \frac{J}{m^3}$$

این مقدار، چون متناظر با شدت میدان شکست است، بیشینه چگالی انرژی قابل حمل توسط میدان الکتروستاتیک را نیز در هوا نشان می‌دهد.

■

مثال ۹.۵: با استفاده از معادله ۱۰.۵، انرژی پتانسیل کره‌ای فلزی به شعاع R و بار Q را به دست آورید.

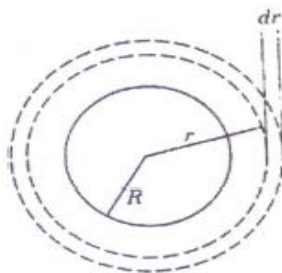
حل: نخست، باید توجه داشته باشیم که در داخل کره رسانا میدان الکتریکی وجود ندارد. با استفاده از قانون گاوس، یا محاسبه مستقیم، می‌توان نشان داد که میدان الکتریکی در خارج کره برابر با همان میدانی است که از بار نقطه‌ای Q در مرکز کره حاصل می‌شود؛ یعنی

$$E = \frac{kQ}{r^2} \quad (r > R)$$

حجم پوسته‌ای فرضی به شعاع r و ضخامت dr ، مطابق شکل ۱۱.۵، برابر $4\pi r^2 dr$ می‌شود. انرژی ذخیره شده در این حجم پوسته عبارت است از

$$\begin{aligned} dU_E &= u_E (4\pi r^2 dr) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{kQ}{r^2} \right)^2 (4\pi r^2 dr) = \frac{kQ^2}{2r^2} dr \end{aligned}$$

که در آن از $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ استفاده شده است. انرژی پتانسیل کل برابر است با



شکل ۱۱.۵ برای محاسبه انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی خارج از کره فلزی باردار، نخست انرژی موجود در پوسته‌ای کروی به شعاع r و ضخامت dr را به دست می‌آوریم.

$$U_E = \frac{kQ^2}{2} \int_R^\infty r^{-2} dr = \frac{kQ^2}{2R}$$

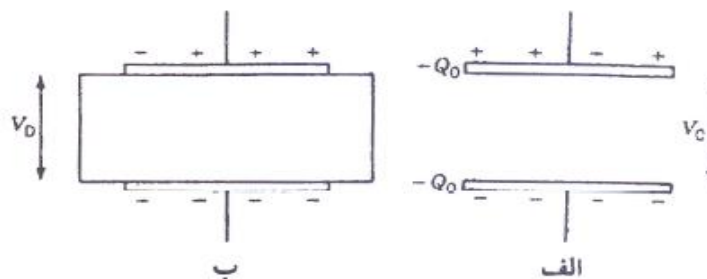
این نتیجه با نتیجه‌ای که در مثال ۶.۴ به دست آوردیم، سازگاری دارد. در اینجا نیز روشن است که انرژی کره باردار را می‌توان به صورت انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی آن در نظر گرفت.

۵-۵ دی الکتریکها

هرگاه ماده نارسانایی مانند شیشه، کاغذ، یا پلاستیک را در فاصله میان صفحات خازن قرار دهیم، ظرفیت آن افزایش می‌یابد. مایکل فارادی، که نخستین کسی است که این اثر را مورد توجه قرار داد، این نوع ماده را دی الکتریک نامید. اثرات ورود دی الکتریک به درون خازن را می‌توان با دو آزمایش ساده نشان داد.

(۱) حالت بدون باتری

در شکل ۱۲.۵-الف، خازنی را با بارهای Q روی هر یک از صفحات و اختلاف پتانسیل V_0 بین دو صفحه نشان داده‌ایم. ظرفیت اولیه خازن، در حالتی که فاصله بین صفحات خالی است، برابر $C_0 = \frac{Q}{V_0}$ است. هنگامی که تیغه‌ای دی الکتریک فاصله بین صفحات را پر کند، مانند حالتی که



شکل ۱۲.۵ (الف) دو صفحه خازن با بارهای مساوی و مختلف‌العلامت $\pm Q_0$ و اختلاف پتانسیل V_C . (ب) هنگامی که فاصله بین صفحات با یک دی الکتریک پر می‌شود، اختلاف پتانسیل به مقدار $V_D = \frac{V_C}{K}$ کاهش می‌یابد، که در آن K ثابت دی الکتریکی است.

در شکل ۱۲.۵- ب نشان داده شده است، اختلاف پتانسیل بین صفحات با ضریب K که آن را ثابت دی الکتریکی می نامند، کاهش می یابد.

$$V_D = \frac{V_0}{K} \quad (11.5)$$

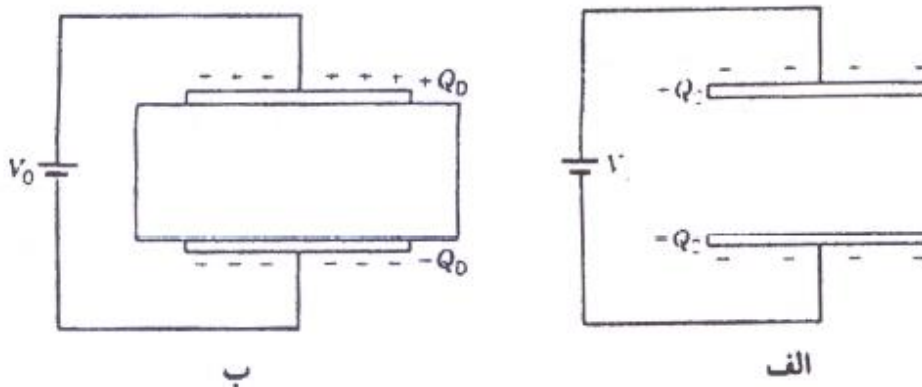
با توجه به رابطه $V = Ed$ معلوم می شود که شدت میدان الکتریکی نیز با همان ضریب کاهش می یابد

$$E_D = \frac{E_0}{K} \quad (12.5)$$

چون بار روی هر یک از صفحات دست نخورده می ماند (در واقع، این بارها جایی برای رفتن ندارند)، ظرفیت خازن در حضور دی الکتریک برابر $C_D = \frac{Q_D}{V_D} = KC_0$ می شود.

(۲) حالت متصل به باتری

خازن شکل ۱۲.۵- الف را در شکل ۱۳.۵- الف مجدداً به صورتی نشان داده ایم که اختلاف پتانسیل V_0 بین دو صفحه به کمک یک باتری تثبیت شده است. اکنون اگر فاصله بین صفحات را، مانند شکل ۱۳.۵- ب، با یک دی الکتریک پر کنیم، بار روی صفحات با ضریب K افزایش می یابد و به مقدار $Q_D = kQ_0$ می رسد. با استفاده از $C_D = Q_D/V_0$ ، در اینجا هم به دست می آوریم $C_D = kC_0$.



شکل ۱۳.۵ (الف) همان خازن شکل ۱۲.۵- الف، در حالی که دو صفحه متصل به باتری هستند. (ب) در حالی که اختلاف پتانسیل بدون تغییر می ماند، بار روی صفحات به مقدار $Q_D = kQ_0$ افزایش می یابد.

نتیجه وارد کردن دی الکتریک در هر دو حالت این است که ظرفیت خازن با ضریب K افزایش می یابد

$$C_D = kC. \quad (۱۳.۵)$$

مقادیر نمونه ای ضریب K را در جدول ۱.۵ نشان داده ایم. واژه دی الکتریک را اگر چه تقریباً همیشه برای مواد عایق به کار می بریم، ولی این کار تا حدودی گمراه کننده است. آب که ثابت دی الکتریکی زیادی دارد، ماده ای عایق نیست.

جدول ۱.۵ ثابتها و استقامتهای دی الکتریکی

ماده	ثابت دی الکتریکی	استقامت دی الکتریکی (10^6 V/m)
هوا	۱٫۰۰۰۵۹	۳
کاغذ	۳٫۷	۱۶
شیشه	۴-۶	۹
پارافین	۲٫۳	۱۱
لاستیک	۲-۳٫۵	۳۰
میکا	۶	۱۵۰
آب	۸۰	—

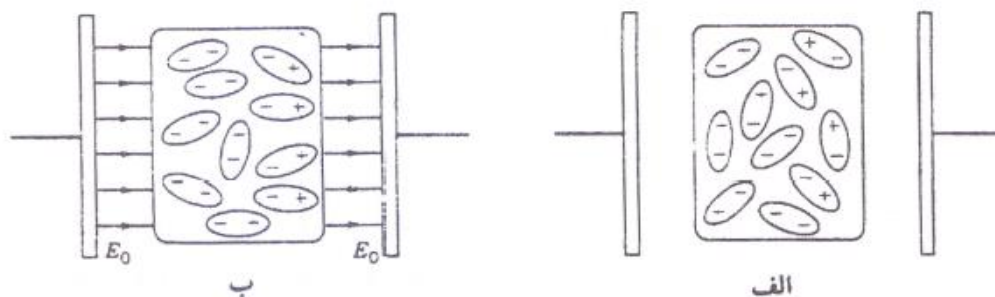
استفاده از دی الکتریک، علاوه بر افزایش ظرفیت خازن، مزایای دیگری هم دارد. برای نمونه، به کمک یک ورقه نازک پلاستیکی می توان صفحات یک خازن صفحه - موازی را، بدون نگرانی از به هم چسبیدنشان، خیلی به یکدیگر نزدیک کرد. چون $C \propto \frac{1}{d}$ است، برای یک ظرفیت معلوم می توان اندازه خازن را کاهش داد. یکی دیگر از مزایای کاربرد دی الکتریک را می توان استقامت دی الکتریکی آن دانست. استقامت دی الکتریکی یک ماده را به صورت حداکثر میدان الکتریکی تعریف می کنیم که بر اثر آن ماده خاصیت عایق بودن خود را از دست می دهد و به رسانا تبدیل می شود. وجود دی الکتریک در فاصله میان صفحات خازن، اختلاف پتانسیل بحرانی را که در آن جرقه زنی بین دو صفحه آغاز می شود افزایش می دهد.

۶-۵ دی الکتریکها از دید اتمی

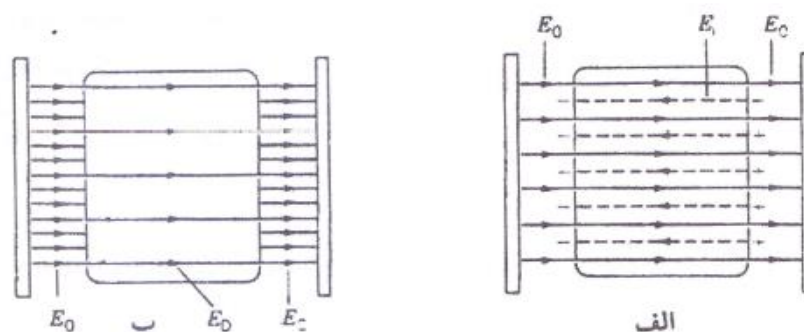
ثابت دی الکتریکی هر ماده‌ای، در واقع، پاسخ بارهای آن نسبت به میدان الکتریکی خارجی است. توزیع بارها را به دو روش می‌توان تغییر داد. در فصل ۲ گفتیم که هر اتمی در یک میدان الکتریکی خارجی دارای گشتاور دو قطبی القایی می‌شود. برای مواد غیرقطبی، این تنها واکنش الکتروستاتیکی است. در مولکولهای قطبی، مانند مولکول آب، مراکز بارهای مثبت و منفی بر هم منطبق نیستند. در نتیجه، چنین مولکولی دارای گشتاور دو قطبی الکتریکی همیشگی است. در غیاب میدان الکتریکی خارجی، این دو قطبی‌ها مطابق شکل ۱۴.۵-الف سمت‌گیریهایی تصادفی دارند. هنگامی که این مولکولها در میدان خارجی قرار می‌گیرند، گشتاور نیروی وارد بر این دو قطبی‌ها بر آن است که آنها را یا خطوط میدان هم جهت کند، هر چند که این نظم با وجود آشفتگیهای گرمایی به طور کامل مستقر نخواهد شد. به این ترتیب، در دو سطح انتهایی دی الکتریک تعداد بارهای با علامت مثبت (یا منفی) بیش از بارهای با علامت دیگر است. نتیجه‌ای که در عمل حاصل می‌شود این است که، مطابق شکل ۱۴.۵-ب، بارهای موجود در ماده تا حدودی از هم جدا می‌شوند. (این جداسدگی بارها، علاوه بر جداسدگی باری است که در همه مواد غیرقطبی دیده می‌شود.)

بدین‌سان، دی الکتریک چه از مولکولهای قطبی و چه از مولکولهای غیرقطبی تشکیل شده باشد، سطوح انتهایی‌اش با علامتهایی مخالف علامت صفحات خازنی که در مجاورشان قرار دارند باردار خواهند شد. این جداسدگی بارها را قطبیدگی می‌گویند. این بارهای القایی در داخل ماده دی الکتریک ایجاد یک میدان الکتریکی القایی E_i می‌کنند، مطابق شکل ۱۵.۵-الف، در خلاف جهت میدان خارجی E_0 است. به این ترتیب، میدان برآیند در داخل جسم دی الکتریک، مطابق شکل ۱۵.۵-ب، با ضریب K کاهش می‌یابد.

$$E_D = E_0 - E_i = \frac{E_0}{K} \quad (14.5)$$



شکل ۱۴.۵ (الف) در غیاب میدان خارجی، دو قطبی‌های مواد قطبی، سمتگیریهایی تصادفی دارند. (ب) هنگامی که میدان خارجی برقرار می‌شود، دو قطبی‌ها می‌خواهند با خطوط میدان هم جهت شوند. به این ترتیب، سطوح انتهایی دی الکتریک باردار می‌شود.



شکل ۱۵.۵ (الف) میدان الکتریکی القایی E_i که، بر اثر بارهای القا شده در سطوح انتهایی در دی الکتریک، در خلاف جهت میدان خارجی E_0 برقرار می‌شود. میدان برایند در داخل جسم دی الکتریک برابر $E_D = E_0 - E_i$ است.

ضریب K در گازها، که چگالی مولکولی پایینی دارند، خیلی زیاد نیست. اما آب که مولکولهای قطبی دارد، چون به صورت مایع است، سمتگیری مولکولهایش نسبتاً به آسانی می‌تواند تغییر کند. به همین دلیل، ثابت دی الکتریک K برای آب خیلی زیاد است.

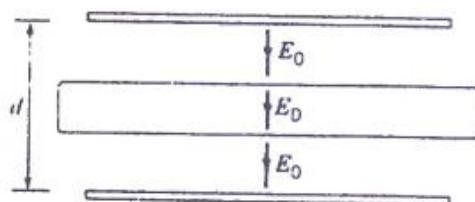
تمرین ۱: خازنی با دی الکتریک هوا را با یک باتری به اختلاف پتانسیل V متصل میکنیم و به اندازه V شارژ می‌شود. سپس از باتری جدا کرده و دی الکتریک k را وارد آن میکنیم عوامل زیر به چه نسبتی تغییر میکند

- ۱- ظرفیت خازن ۲- بار خازن ۳- اختلاف پتانسیل خازن ۴- انرژی ذخیره شده در خازن

تمرین ۱: خازنی با دی الکتریک هوا را با یک باتری به اختلاف پتانسیل V متصل میکنیم و سپس دی الکتریک k را وارد آن میکنیم عوامل زیر به چه نسبتی تغییر میکند

- ۱- ظرفیت خازن ۲- اختلاف پتانسیل خازن ۳- بار خازن ۴- انرژی ذخیره شده در خازن

مثال ۱۰.۵: تیغه‌ای از یک ماده دی‌الکتریک به ضخامت t و ثابت دی‌الکتریک K را، مطابق شکل ۱۶.۵، در فاصله میان صفحات خازنی که مساحت هر یک از صفحات آن A و فاصله بین



شکل ۱۶.۵ تیغه‌ای از دی‌الکتریک در فاصله میان دو صفحه موازی وارد شده است. برای تعیین ظرفیت، نخست باید اختلاف پتانسیل بین صفحات را پیدا کرد.

آنها برابر d است وارد کرده‌ایم. فرض کنید که پیش از ورود تیغه، باتری را از مدار خارج کرده‌ایم. ظرفیت این خازن را به دست آورید.

حل: نخست باید اختلاف پتانسیل بین صفحات را به دست آوریم. شدتهای میدان الکتریکی در هوا و در دی‌الکتریک، به ترتیب، عبارت‌اند از

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0} \quad E_D = \frac{E_0}{K}$$

کل اختلاف پتانسیل در قسمتی که محتوی هواست برابر $\Delta V_0 = E_0 (d-t)$ ، و در قسمتی که با دی‌الکتریک پر شده است برابر $\Delta V_D = E_D t = \frac{\sigma t}{K\epsilon_0}$ می‌شود. بنابراین، کل اختلاف پتانسیل بین صفحات عبارت است از

$$\Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left[(d-t) + \frac{t}{K} \right]$$

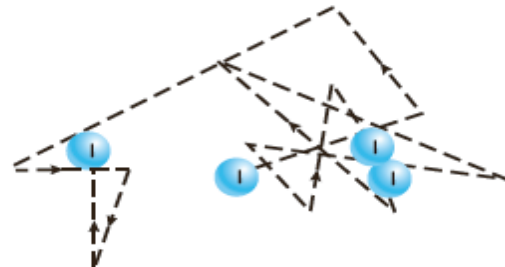
ظرفیت خازن را می‌توان از $C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma A}{\Delta V}$ به دست آورد، پس داریم

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d + t \left(\frac{1}{K} - 1 \right)}$$

توجه کنید وقتی $K = 1$ است، داریم $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$ که همان فرمول آشنای قبلی است.

فیزیک الکتریسیته و مغناطیس جلسه هشتم

الکترون آزاد: به الکترونهای لایه آخر هر عنصر الکترون آزاد گوید عناصری که تعداد الکترون لایه آخر آنها کمتر از ۴ باشد رسانا (هادی) گفته می شود. حرکت الکترونهای آزاد به صورت کاتوره ای است.



شکل ۲-۵ حرکت کاتوره ای الکترون های آزاد

شدت جریان الکتریکی: به مقدار بار الکتریکی که در واحد زمان از مقطع یک هادی عبور می کند شدت جریان الکتریکی گوئیم. و با حرف I نشان میدهیم. واحد آن آمپر (A) می باشد. عبور جریان از پتانسیل بالاتر به طرف پتانسیل پائین تر است

$$I: \text{جریان بر حسب (A)} \quad q: \text{بار بر حسب کولن (C)} \quad t: \text{زمان (s)} \quad I = \frac{q}{t}$$

مثال: از یک هادی شدت جریان $2A$ عبور می کند در مدت ۵ دقیقه چه تعداد بار الکتریکی از هادی عبور میکند

$$I = 2A, t = 5 \text{ min} = 5 \times 60 = 300s, e = 1/6 \times 10^{-19} C = 16 \times 10^{-20} C$$

$$I = \frac{q}{t} \Rightarrow q = I t = 2 \times 300 = 600 C$$

$$q = n e \Rightarrow n = \frac{q}{e} = \frac{600}{16 \times 10^{-20}} = 37.5 \times 10^{20} \quad \text{عد}$$

نکته: انتقال انرژی در رسانا با سرعت نور یعنی $3 \times 10^8 \frac{m}{s}$ صورت می گیرد ولی الکترونها با سرعت $10^{-5} \frac{m}{s}$ صورت

میگیرد

شدت جریان الکتریکی متوسط: به مقدار بار الکتریکی که در یک زمان معین از مقطع یک هادی عبور می کند شدت جریان الکتریکی متوسط گوئیم. و با حرف $\bar{I}$ نشان میدهیم. واحد آن آمپر (A) است

$$\Delta q: \text{تغییرات بار بر حسب کولن} \quad \Delta t: \text{زمان بر حسب ثانیه} \quad \bar{I} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

شدت جریان الکتریکی با **آمپر سنج** اندازه گیری میشود که به صورت **متوالی (سری)** در مدار قرار می گیرد.

مثال:

هنگامی که یک ماشین حساب جیبی روشن می‌شود از باتری آن جریان 15mA می‌گذرد. اگر این ماشین حساب 10 دقیقه روشن باشد، چه مقدار بار خالص از مدار ماشین حساب عبور می‌کند؟

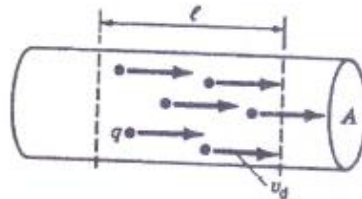
پاسخ:

$$\Delta t = 10 \times 60 = 600\text{ s}, \quad \bar{I} = 0.015\text{ A}, \quad \Delta q = ?$$

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \rightarrow \Delta q = I \Delta t \rightarrow \Delta q = 0.015 \times 10^{-3} \text{ A} \times 600\text{ s} = 9 \times 10^{-2} \text{ As} = 9 \times 10^{-2} \text{ C}$$

چگالی جریان:

چون حرکت تصادفی الکترونها رسانش دخالتهی در جریان الکتریکی ندارد، ما فقط تأثیر میدان الکتریکی را در حرکت الکترونها در نظر می‌گیریم. شکل ۵.۶، ذرات باردار q را نشان می‌دهد که با سرعت سوق v_d در امتداد سیم در حرکت‌اند. اگر تعداد ذرات موجود در واحد حجم را با n نشان دهیم، بار استوانه‌ای به طول l و مقطع A برابر $q (Al)$ می‌شود. زمان لازم برای عبور این بار از انتهای استوانه برابر $\Delta t = \frac{l}{v_d}$ است. جریان، با توجه به $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ ، برابر است با



شکل ۵.۶ در تعیین جریان الکتریکی، از حرکت کناره‌ای صرف‌نظر می‌کنیم و فقط سرعت سوق را که «گاز الکترونها آزاد» در مجموع به دست می‌آورد در نظر می‌گیریم.

$$I = n A q v_d \quad (2.6)$$

(متوسط) چگالی جریان را به صورت جریان گذرنده از واحد سطح تعریف می‌کنیم.

$$J = \frac{I}{A} \quad (3.6)$$

یکای چگالی جریان در دستگاه بین‌المللی (SI)، $\frac{\text{A}}{\text{m}^2}$ است. در حالی که جریان یک کمیت نرده‌ای است، چگالی جریان را به صورت برداری تعریف می‌کنیم که با سرعت سوق هم جهت است. با توجه به معادله ۲.۶، داریم

$$J = n q v_d \quad (4.6)$$

جهت $\vec{J}$ برای حاملهای بار منفی در خلاف جهت $\vec{v}_d$ است. شایان توجه است که جریان I کمیتی نرده‌ای است که به صورت بار گذرنده از یک سطح در مقیاس بزرگ اندازه‌گیری می‌شود. چگالی جریان $\vec{J}$ برداری است که بر حسب کمیت‌های خرد - مقیاس تعیین می‌شود، و ممکن است از نقطه‌ای به نقطه دیگر تغییر کند. هر گاه چگالی جریان یکنواخت نباشد، جریان گذرنده از سطح را می‌توان از $I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}$ به دست آورد. بزرگی سرعت سوق در مثال زیر برآورد شده است.

مثال ۱.۶: سیمی مسی به سطح مقطع 0.5 cm^2 را در نظر بگیرید که جریانی به شدت 10 A از آن می‌گذرد. سرعت سوق الکترون‌ها را در این سیم برآورد کنید.

حل: برای تعیین چگالی بار حامل، نخست باید چگالی اتمی را به دست آوریم. می‌دانیم که تعداد اتم‌ها یا مولکول‌های موجود در M گرم ماده به جرم اتمی یا مولکولی M برابر عدد آووگادرو ($N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$) است. تعداد اتم‌های موجود در m گرم را از رابطه زیر به دست می‌آوریم.

$$\frac{N}{N_A} = \frac{m}{M}$$

چگالی جرمی از رابطه $\rho = \frac{m}{V}$ به دست می‌آید که در آن V حجم جسم است. چگالی عددی اتمی عبارت است از $n = \frac{N}{V}$. با قرار دادن $N = \frac{m}{M} N_A$ و $V = \frac{m}{\rho}$ به دست می‌آوریم

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\rho N_A}{M}$$

برای مس، داریم $\rho = 8.9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 8.9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ و $M = 63.5 \times 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$. با استفاده از این اعداد، خواهیم داشت

$$n = \frac{(8.9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(6.02 \times 10^{23} \text{ اتم/mol})}{63.5 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}}$$

$$= 8.5 \times 10^{28} \text{ اتم/m}^3$$

چون از هر اتم مس یک الکترون وارد گاز الکترون‌های آزاد می‌شود، عددی که هم اکنون به دست آورده‌ایم چگالی الکترون‌های آزاد مس هم هست. با استفاده از معادله ۳.۶، چگالی جریان ($J = \frac{I}{A}$) عبارت است از

$$J = \frac{10 \text{ A}}{5 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 2 \times 10^6 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

سرعت سوق را به کمک ۴.۶ چنین به دست می‌آوریم

$$v_d = \frac{J}{ne} = 1.5 \times 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

مقاومت الکتریکی: عاملی که از عبور جریان الکتریکی جلوگیری میکند مقاومت الکتریکی گویند و با حرف R نشان میدهیم واحد اهم (Ω) است.

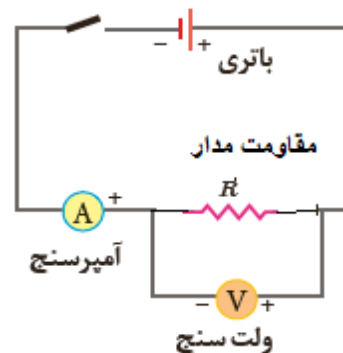
قانون اهم: در یک مدار مسدود نسبت اختلاف پتانسیل به شدت جریان مقداری است ثابت که برابر مقاومت مدار است.

$$R = \frac{V}{I}$$

R : مقاومت بر حسب اهم I : شدت جریان بر حسب آمپر V : اختلاف پتانسیل بر حسب ولت

جدول ۵-۱ نمادهای مربوط به مدار

نماد در مدار	قطعه
	باتری
	مقاومت
	آمپرسنج
	ولت سنچ
	کلید



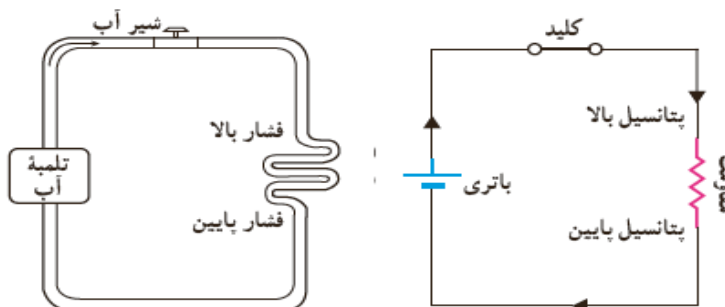
شکل ۵-۱۳ مدار ساده قانون اهم

مثال: اختلاف پتانسیل دو سر یک مقاومت که از آن جریان $0.5A$ عبور میکند 20 ولت است مقدار مقاومت را بدست آورید.

$$I = 0.5A, V = 20V$$

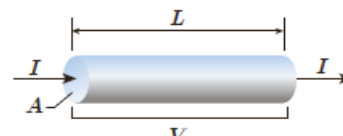
$$R = \frac{V}{I} = \frac{20}{0.5} = 40\Omega$$

تشابه مدار الکتریکی و سیستم آبرسانی با تلمبه



نکته: چون $j = \frac{1}{\rho} E = \sigma E$ ، $j = nqv_d$ ، $j \propto E$ که در آن ρ مقاومت ویژه ($\Omega.m$) و σ رسانندگی

جسم رسانا است و به صورت $\sigma = \frac{1}{\rho}$ تعریف میشود



$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{V}{l} \\ j &= \frac{I}{A} = \frac{1}{\rho} E \end{aligned} \right\} \Rightarrow I = j.A \xrightarrow{j = \frac{1}{\rho} E} I = \frac{1}{\rho} E.A \xrightarrow{E = \frac{V}{l}} I = \frac{1}{\rho} \frac{V}{l}.A \Rightarrow I = \frac{A}{\rho l} V$$

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow R = \frac{V}{\frac{A}{\rho l} V} \Rightarrow R = \rho \frac{l}{A}$$

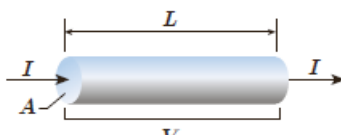
عوامل مؤثر بر مقاومت رسانا ها در دمای ثابت

مقدار مقاومت از رابطه $R = \rho \frac{L}{A}$ بدست می آید بنابراین عوامل مؤثر بر مقاومت R عبارتند از:

۱- ρ : مقاومت ویژه بر حسب اهم متر ($\Omega.m$) رابطه مستقیم

۲- L : طول سیم بر حسب متر m رابطه مستقیم

۳- A : سطح مقطع بر حسب متر رابطه معکوس

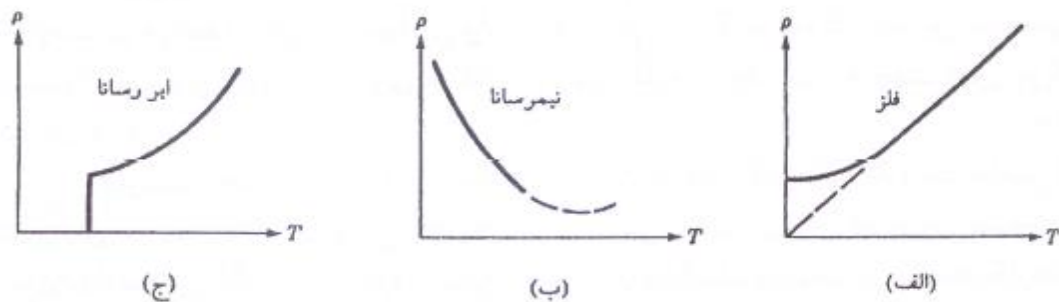


شکل ۵-۱۴ عوامل مؤثر بر مقاومت رسانا

جدول ۵-۲ مقاومت ویژه مواد مختلف در دمای $20^\circ C$

مقاومت ویژه $\rho (\Omega m)$	ماده (رسانای الکتریکی)
1.62×10^{-8}	نقره
1.69×10^{-8}	مس
2.35×10^{-8}	طلا
2.75×10^{-8}	آلومینیوم
5.60×10^{-8}	تنگستن
9.68×10^{-8}	آهن
10.6×10^{-8}	پلاتین
100×10^{-8}	نیکروم

چون مقاومت ویژه با دما طبق رابطه $\rho = \rho_0(1 + \alpha(T - T_0))$ تغییر میکند بنابر این مقاومت مطابق این رابطه تغییر میکند

$$R = R_0(1 + \alpha(T - T_0))$$


شکل ۷.۶ (الف) مقاومت ویژه فلز معمولی در گستره وسیعی از دماها به طور خطی تغییر می‌کند. مقاومت ویژه محدود، در دماهای پایین ناشی از ناخالصی و نقص بلورهاست. (ب) مقاومت ویژه جسم نیم رسانا با افزایش دما کاهش می‌یابد، زیرا در دماهای بالاتر حاملهای بار بیشتری آزاد می‌شوند. (ج) مقاومت ویژه یک جسم ابررسانا در دمای گذاری، که به جنس جسم بستگی دارد، سریعاً به صفر نزول می‌کند.

سیمی از جنس تنگستن با مقاومت ویژه تقریباً $5/6 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$ به طول $31/4 m$ و به قطر $0/4 mm$ را در نظر بگیرید. الف) مقاومت الکتریکی سیم چقدر است؟ ب) اگر اختلاف پتانسیل (ولتاژ) $224 V$ در دو سر سیم برقرار شود چه جریانی از سیم می‌گذرد؟

پاسخ:

$$\rho = 5/6 \times 10^{-8} \Omega \cdot m, \quad L = 31/4 m, \quad r = 0/2 mm, \quad V = 224 v, \quad R = ?, \quad I = ?$$

(الف)

$$A = \pi r^2 = 3/14 \times (0/2 \times 10^{-3})^2 = 12/56 \times 10^{-8} m^2$$

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{5/6 \times 10^{-8} \Omega m \times 31/4 m}{12/56 \times 10^{-8} m^2} = 14 \Omega$$

$$I = \frac{V}{R} = \frac{224 V}{14 \Omega} = 16 A$$

(ب)

مثال:

سیم کشی خانه‌ها معمولاً با سیم‌های مسی نمره ۱۴ بر اساس استاندارد SWG صورت می‌گیرد که قطری برابر با $2/032 \text{ mm}$ دارد. مقاومت 100 m از این سیم‌ها در دمای اتاق چقدر است؟

پاسخ: مساحت مقطع این سیم برابر است با

$$A = \pi r^2 = \pi D^2/4 = (3/14)(2/032 \times 10^{-3} \text{ m})^2/4 = 3/24 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

از طرفی مقاومت ویژه سیم مسی در دمای 20°C با استفاده از جدول ۲-۲، برابر $1/69 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ و طول سیم مسی 100 m است. بنابراین، با استفاده از رابطه $R = \rho L/A$ برای مقاومت سیم مسی خواهیم داشت:

$$R = \rho \frac{L}{A} = (1/69 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}) \frac{(100 \text{ m})}{(3/24 \times 10^{-6} \text{ m}^2)} = 0/522 \Omega$$

انواع مقاومت: ۱- مقاومت ثابت ۲- مقاومت متغیر

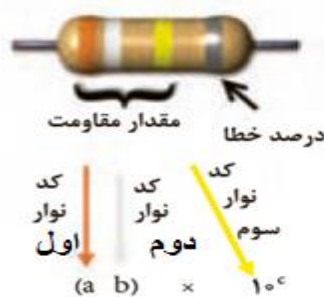
۱- مقاومت ثابت: این مقاومتها ثابت هستند و از ترکیب کربن و نوع چسب ساخته میشود که هر چه مقدار کربن بیشتر باشد مقاومت کمتر میشود.

مثال:

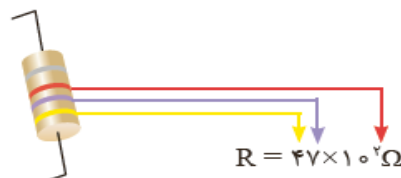
جدول ۴-۵ کدهای رنگی مقاومت‌ها

رنگ	کد رنگ	درصد خطا
سیاه	۰	-
قهوه‌ای	۱	۱ درصد
قرمز	۲	۲ درصد
نارنجی	۳	۳ درصد
زرد	۴	۴ درصد
سبز	۵	-
آبی	۶	-
بنفش	۷	-
خاکستری	۸	-
سفید	۹	-
طلایی	-	۵ درصد
نقره‌ای	-	۱۰ درصد

شکل ۱۵-۵ انواع مقاومت ثابت



شکل ۱۶-۵ نحوه خواندن مقاومت رنگی



با توجه به کد هر رنگ، مقاومت روبه‌رو چند اهم است؟

پاسخ:

توان الکتریکی: کار انجام شده در واحد زمان را توان گویند و با حرف P نشان میدهم واحد آن وات است

$$P: \text{توان بر حسب } W \quad W: \text{کار بر حسب } J \quad t: \text{زمان } s \quad p = \frac{W}{t}$$

اثبات روابط توان الکتریکی

$$\begin{aligned} v &= \frac{W}{q} \Rightarrow u = w = qv, I = \frac{q}{t} \Rightarrow q = It, R = \frac{V}{I} \\ p &= \frac{W}{t} \xrightarrow{w=qv} p = \frac{qv}{t} \xrightarrow{q=It} p = \frac{I t v}{t} \Rightarrow p = I v \\ p &= I v \xrightarrow{v=I.R} p = I . I . R \Rightarrow p = I^2 . R \\ p &= I v \xrightarrow{I=\frac{V}{R}} p = \frac{V}{R} v \Rightarrow p = \frac{V^2}{R} \end{aligned}$$

V: اختلاف پتانسیل **R: مقاومت** Ω **I: شدت جریان** **A** **P: توان** **w**

مثال: یک لامپ ۱۰۰w به اختلاف پتانسیل ۲۰۰v متصل شده است تعیین کنید.

۱- شدت جریان مدار ۲- مقاومت لامپ

$$p = 100w, v = 200v, I = ?, R = ?$$

$$1) p = I v \Rightarrow I = \frac{p}{v} = \frac{100}{200} = \frac{1}{2} A = 0.5A$$

$$2) R = \frac{v}{I} = \frac{200}{0.5} = 400\Omega$$

مثال: نسبت مقاومت دو لامپ ۱۰۰w و ۲۰۰w که هر دو به اختلاف پتانسیل برابر متصل شده اند را بدست آورید

$$p_1 = 100w, p_2 = 200w, v_1 = v_2 = v = 200v, \frac{R_2}{R_1} = ?$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\frac{v_1^2}{R_1}}{\frac{v_2^2}{R_2}} \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{v_1^2}{v_2^2} \times \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$$

مثال:

روی یک آسیاب برقی دو عدد 800 W و 200 V نوشته شده است. این آسیاب برقی را به اختلاف پتانسیل 200 V وصل می‌کنیم.

الف) شدت جریانی که از آن می‌گذرد چند آمپر است؟ ب) انرژی الکتریکی مصرفی ماهانه این دستگاه در صورتی که هفته‌ای دو بار و هر بار به مدت 20 دقیقه مورد استفاده قرار گیرد چند ژول و چند کیلو وات ساعت است؟

$$v=200\text{ V}, p=800\text{ W} \quad I=? \quad t=2 \times 20 \times 60 = 2400\text{ s}$$

پاسخ:

الف) $P = VI \rightarrow 800 = 200 \cdot I \rightarrow I = 4\text{ A}$

ب) $t = 2 \times 20 \times 60 = 2400\text{ s} = 2/3\text{ h}$

$$P = \frac{U}{t} \rightarrow 800\text{ W} = \frac{U}{2400} \rightarrow U = 1920\text{ J}$$

$$800\text{ W} = \frac{U}{2/3\text{ h}} \Rightarrow U = 480\text{ Wh} = 2/3\text{ kWh}$$

انرژی الکتریکی:

طبق قانون بقای انرژی انرژی از صورتی به صورت دیگر تبدیل میشود و انرژی الکتریکی مصرفی به صورت گرما ظاهر میشود

$$p = \frac{U}{t} \Rightarrow U = p t \xrightarrow{p=I^2 \cdot R} U = I^2 \cdot R t$$

بنابر این میتوان گفت: مقدار گرمایی که در یک رسانا تولید میشود به عوامل زیر بستگی دارد

۱- مجذور جریان عبوری رابطه مستقیم

۲- مقدار مقاومت رسانا رابطه مستقیم

۳- زمان عبور جریان رابطه مستقیم

قانون ژول: گرمای ایجاد شده در یک مقاومت با مجذور جریان عبوری و مقدار مقاومت رسانا و زمان عبور جریان رابطه مستقیم دارد یعنی $U = Q = I^2 \cdot R t$

مثال:

مقاومت قسمت گرماده یک سماور برقی 50Ω است. وقتی آن را به برق وصل می‌کنیم شدت جریان 4 A از آن می‌گذرد. انرژی الکتریکی مصرف شده در آن را در مدت 5 دقیقه حساب کنید.

پاسخ:

$$t=5 \times 60 = 300\text{ s}, \quad I=4\text{ A}, \quad R=50\Omega, \quad U=?$$

$$U = RI^2 t = (4)^2 \times 50 \times 300 = 240000\text{ J}$$

مثال:

یک کتری برقی به مقاومت ۵۰ اهم به اختلاف پتانسیل ۲۰۰ ولت متصل شده است پس از چه مدت دمای ۲ کیلوگرم آب ۲۰

درجه سلسیوس را به آب ۱۰۰ درجه سلسیوس میرساند. $c = 4200 \frac{J}{kg \cdot ^\circ C}$

$$R = 50 \Omega, V = 200V, m = 2kg, \theta_1 = 20^\circ, \theta_2 = 100^\circ$$

$$U = Q \Rightarrow I^2 \cdot R \cdot t = mc \Delta \theta$$

$$I = \frac{V}{R} = \frac{200}{50} = 4A$$

$$\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1 = 100 - 20 = 80^\circ$$

$$I^2 \cdot R \cdot t = mc \Delta \theta \Rightarrow t = \frac{mc \Delta \theta}{I^2 \cdot R} = \frac{2 \times 4200 \times 80}{4^2 \times 50} = 840s \div 60 = 14 \text{ min}$$

فیزیک الکتریسیته و مغناطیس جلسه ۹

مثال

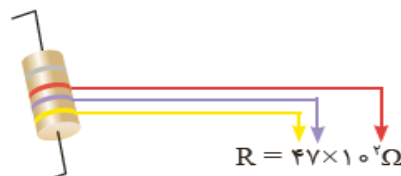


جدول ۴-۵ کدهای رنگی مقاومت‌ها

رنگ	کد رنگ	درصد خطا
سیاه	۰	-
قهوه‌ای	۱	۱ درصد
قرمز	۲	۲ درصد
نارنجی	۳	۳ درصد
زرد	۴	۴ درصد
سبز	۵	-
آبی	۶	-
بنفش	۷	-
خاکستری	۸	-
سفید	۹	-
طلایی	-	۵ درصد
نقره‌ای	-	۱۰ درصد

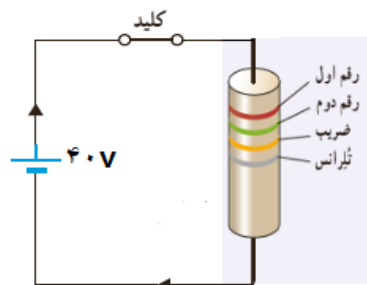
با توجه به کد هر رنگ، مقاومت روبه‌رو چند اهم است؟

پاسخ:



مثال: به دو سر مقاومت به شکل زیر اختلاف پتانسیل ۴۰ ولت متصل شده است تعیین کنید.

۱- مقدار مقاومت ۲- جریان مدار



$$R = 25 \times 10^3 \Omega = 25K \Omega$$

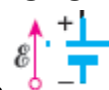
$$I = \frac{V}{R} = \frac{40}{25 \times 10^3} = 16 \times 10^{-4} A = 1/6 mA$$

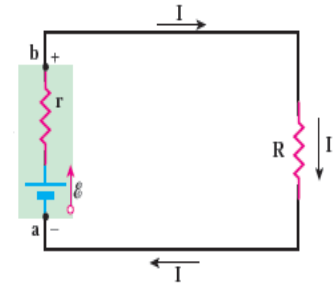
قوانین کیر شف:

قانون اول کیر شف: در هر دورزدن کامل حلقه‌ای از مدار، جمع جبری پتانسیل‌های اجزای

مدار باید برابر صفر باشد. $\sum v_i = 0$ به این قانون KVL گفته میشود

هنگام نوشتن این باید دقت شود یک جهت جریان دلخواه در مدار در نظر میگیریم اگر جهت جریان از منفی به طرف

مثبت باشد علامت نیرو محرکه $\mathcal{E}$ را مثبت در نظر میگیریم. در صورتیکه جهت جریان از مثبت به طرف منفیباشد. علامت نیرو محرکه $\mathcal{E}$ را منفی در نظر میگیریم.



$$\sum_i v_i = 0 \Rightarrow v_a + \varepsilon - Ir - v_b = 0 \Rightarrow v_b - v_a = \varepsilon - Ir$$

$$\left. \begin{array}{l} v = \varepsilon - Ir \\ v = IR \end{array} \right\} \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

مثال: در مدار شکل ۳-۱۹ فرض کنید $\varepsilon = 12V$ و $r = 2/0\Omega$ و $R = 4/0\Omega$ باشد.

الف) جریان عبوری از مدار چقدر است؟

ب) اختلاف پتانسیل دوسر باتری را محاسبه کنید.

پاسخ: براساس آنچه که در متن درس آمده است، در حل مسئله‌های مدار تک حلقه‌ای همواره دو دستورالعمل زیر را به کار

می‌پندیم:

۱- هرگاه در مدار در جهت جریان از مقاومت R یا r بگذریم، پتانسیل به اندازه IR یا Ir کاهش می‌یابد و اگر در خلاف جهت جریان حرکت کنیم پتانسیل به همان اندازه‌ها افزایش می‌یابد.

۲- جهت نیروی محرکه الکتریکی باتری‌ها همواره از پایانه منفی به طرف پایانه مثبت است، بنابراین هرگاه از پایانه منفی به طرف پایانه مثبت حرکت کنیم پتانسیل به اندازه نیروی محرکه الکتریکی باتری افزایش می‌یابد و اگر در خلاف این جهت (یعنی از پایانه مثبت به منفی) حرکت کنیم پتانسیل به اندازه نیروی محرکه باتری کاهش می‌یابد.

الف) اگر مدار را در جهت جریان نشان داده شده بپیماییم براساس آنچه گفته شد، در یک حلقه کامل با استفاده از قاعده

حلقه داریم:

$$\varepsilon - Ir - IR = 0$$

و در نتیجه:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} = \frac{12V}{4/0\Omega + 2/0\Omega} = 2/0A$$

ب) اختلاف پتانسیل دوسر باتری برابر است با:

$$V_b - V_a = \varepsilon - Ir = 12V - (2/0A)(2/0\Omega) = 8V$$

مثال

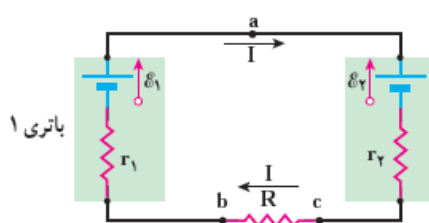
مدار شکل روبه‌رو را در نظر بگیرید. مقادیر نیروهای محرکه الکتریکی

و مقاومت‌های مدار عبارت‌اند از:

$$\varepsilon_1 = 8/0V, \varepsilon_2 = 2/0V, r_1 = 2/0\Omega, r_2 = 1/5\Omega, R = 8/5\Omega$$

الف) جریان عبوری از مدار چقدر است؟

ب) اختلاف پتانسیل دوسر باتری‌های ۱ و ۲ را محاسبه کنید.



پاسخ: الف) با استفاده از دستورالعمل‌های حل مدارهای تک حلقه‌ای مسئله را حل می‌کنیم. گرچه لازم نیست که جهت جریان I را بدانیم، ولی می‌توانیم آن را با مقایسه نیروهای محرکه الکتریکی دو باتری تعیین کنیم؛ چون $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$ است جهت جریان را باتری ۱ تعیین می‌کند. بنابراین، جهت جریان مطابق شکل، ساعتگرد است. در نتیجه با حرکت پاد ساعتگرد از نقطه a داریم:

$$V_a - \mathcal{E}_1 + Ir_1 + IR + Ir_2 + \mathcal{E}_2 = V_a$$

و از آنجا

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{r_1 + R + r_2} = \frac{8/0V - 2/0V}{2/0\Omega + 8/5\Omega + 1/5\Omega} = 0/50A$$

ب) اختلاف پتانسیل بین دوسر باتری ۱ را با حرکت از نقطه b به سمت نقطه a به دست می‌آوریم:

$$V_b - Ir_1 + \mathcal{E}_1 = V_a$$

در نتیجه

$$V_a - V_b = \mathcal{E}_1 - Ir_1 = 8/0V - (0/50A)(2/0\Omega) = 7/0V$$

و برای محاسبه اختلاف پتانسیل دوسر باتری ۲ از نقطه c به سمت نقطه a حرکت می‌کنیم:

$$V_c + Ir_2 + \mathcal{E}_2 = V_a$$

در نتیجه

$$V_a - V_c = \mathcal{E}_2 + Ir_2 = 2/0V + (0/50A)(1/5\Omega) = 2/8V$$

یک مثال عملی از چنین مسئله‌ای شارژ شدن باتری خودرو (باتری ۲) توسط یک مولد خارجی (باتری ۱) است.

توان باتری‌ها بازده آنها

توان مصرفی	توان باتری
$P_2 = VI$	$P_1 = \mathcal{E}I$
$P_2 = \frac{V^2}{R}$	$P_1 = \frac{\mathcal{E}^2}{R + r}$
$P_2 = I^2 R$	$P_1 = I^2 (R + r)$

بازده: نسبت توان خروجی به توان ورودی

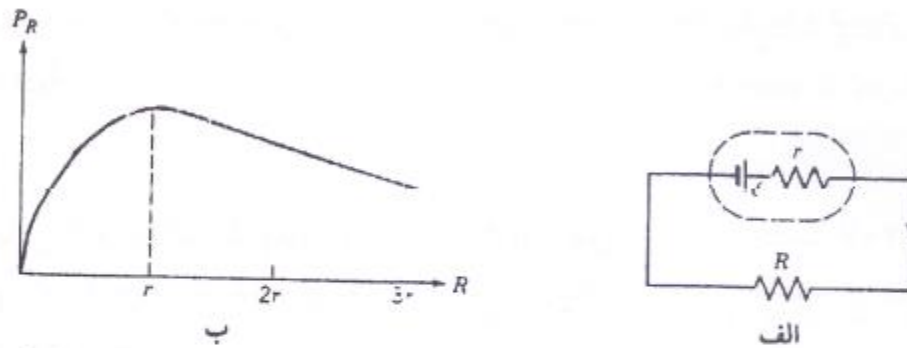
$$R_a = \frac{P_2}{P_1} \begin{cases} R_a = \frac{V}{\mathcal{E}} \\ R_a = \frac{R}{R + r} \end{cases}$$

تلفات توان باتری: اختلاف توان ورودی و خروجی باطری که به صورت گرما ظاهر میشود

$$\Delta p = p_1 - p_2$$

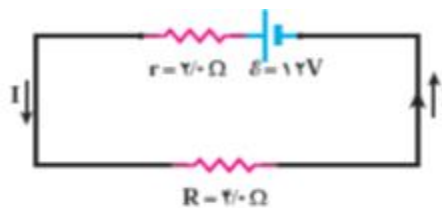
$$\Delta p = I^2 r$$

نکته: اگر مقاومت بار و مقاومت درونی باتری برابر باشند ($R = r$) راندمان باتری ماکزیمم میشود



شکل ۹.۷ (الف) چشمه مولد $\mathcal{E}$ با مقاومت داخلی r را به مقاومت مصرف کننده R وصل کرده ایم. (ب) نمودار تغییرات توان مصرف شده در R به صورت تابعی از مقدار R . انتقال توان هنگامی به بیشینه می‌رسد که $R = r$ باشد.

مثال:



برای مدار نشان داده شده در شکل، توان خروجی باتری و توان مصرفی در مقاومت را محاسبه کنید. و بازده باتری را تعیین کنید
پاسخ: نخست، جریان را با استفاده از قاعده حلقه به دست می‌آوریم:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{12V}{4.0\Omega + 2.0\Omega} = 2.0A$$

$$P_1 = \mathcal{E}I = 12 \times 2 = 24W$$

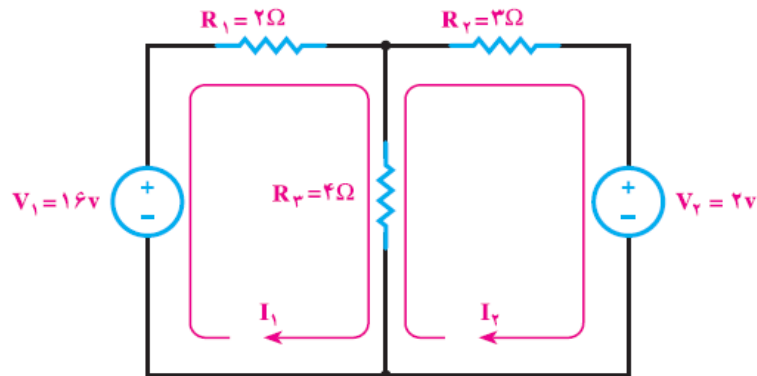
$$P_2 = I^2 R = 2^2 \times 4 = 16W$$

$$R_a = \frac{P_2}{P_1} = \frac{16}{24} = 0.667 = 66.7\%$$

قانون دوم کیر شف (انشعابها): مجموع جریان‌هایی که به هر نقطه انشعاب (گره) مدار وارد می‌شود برابر با مجموع جریان‌هایی است که از آن نقطه انشعاب (گره) خارج می‌شود.

یعنی $\sum_i I_i = 0$ به این قانون KCL گفته میشود.

مثال: در مدار شکل، زیر توان هر یک از مقاومت‌های مدار را حساب کنید.



راه حل:

الف: برای هر حلقه جریانی را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت منظور می‌کنیم و از یک نقطه در هر حلقه حرکت می‌کنیم و معادلات K.V.L. را می‌نویسیم.

$$\text{KVL حلقه ۱} \rightarrow R_1 I_1 + R_3 (I_1 - I_2) - V_1 = 0$$

$$\rightarrow 2I_1 + 4(I_1 - I_2) - 16 = 0$$

$$\text{KVL حلقه ۲} \rightarrow R_2 I_2 + V_2 + R_3 (I_2 - I_1) = 0$$

$$\rightarrow 3I_2 + 2 + 4(I_2 - I_1) = 0$$

ب: معادله‌ها را مرتب کرده و حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} 2 \begin{cases} 6I_1 - 4I_2 = 16 \\ -4I_1 + 7I_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12I_1 - 8I_2 = 32 \\ -12I_1 + 14I_2 = -6 \end{cases} \Rightarrow \\ 13I_2 = 26 \quad I_2 = 2A \end{cases}$$

$$6I_1 - 4 \times 2 = 16 \Rightarrow 6I_1 = 24 \Rightarrow I_1 = 4A$$

پ: برای محاسبه توان هر یک از مقاومت‌ها باید ابتدا جریان‌های هر مقاومت را محاسبه و سپس توان‌ها را به صورت زیر به دست آورد.

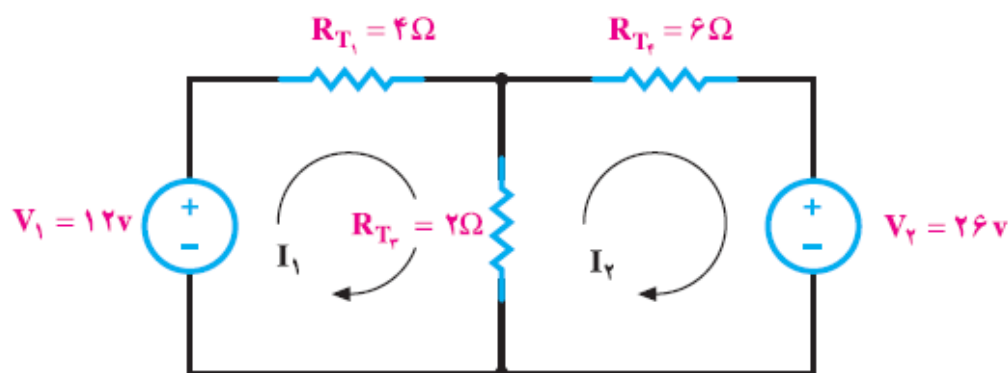
$$\begin{aligned} I_{R_1} &= I_1 = 4A \\ I_{R_3} &= I_1 - I_2 = 4 - 2 = 2A \\ I_{R_2} &= I_2 = 2A \end{aligned}$$

$$P_{R_1} = R_1 \cdot I_1^2 = 2 \times (4)^2 = 32 \text{ W}$$

$$P_{R_2} = R_2 \cdot I_2^2 = 3 \times (2)^2 = 12 \text{ W}$$

$$P_{R_3} = R_3 \cdot I_3^2 = 4 \times (2)^2 = 16 \text{ W}$$

در مدار شکل زیر تعیین کنید جریان هر مقاومت و توان باتری ها



$$\begin{cases} \text{معادله ی حلقه ی ۱} & R_{T_1} \cdot I_1 + R_{T_3} (I_1 - I_2) - V_1 = 0 \\ \text{معادله ی حلقه ی ۲} & R_{T_2} I_2 + V_2 + R_{T_3} (I_2 - I_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4I_1 + 2(I_1 - I_2) - 12 = 0 \\ 6I_2 + 26 + 2(I_2 - I_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6I_1 - 2I_2 = 12 \\ -2I_1 + 8I_2 = -26 \end{cases}$$

پس از مرتب سازی معادلات و حل دستگاه داریم:

$$I_1 = 1\text{A} \text{ و } I_2 = -3\text{A}$$

علامت منفی جریان I_2 نشان دهنده آن است که جهت انتخابی برای حلقه خلاف جهت واقعی

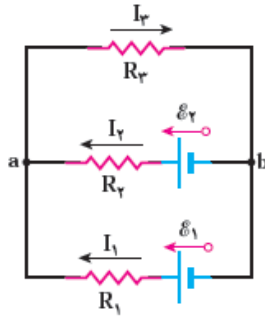
فرض شده است.

برای محاسبه‌ی توان هر منبع باید به جهت جریان توجه داشت. چرا که براساس آن می‌توان مقدار و نوع توان را تعیین نمود. هرگاه جهت جریان به قطب مثبت منبع وارد شود علامت ولتاژ در رابطه $P = V.I$ را مثبت و در صورتی که به قطب منفی وارد شود علامت آن را منفی منظور می‌کنیم. چنانچه حاصل توان منفی باشد یعنی، مولد به شبکه توان می‌دهد و اگر توان مثبت شد، یعنی، مولد، خود مصرف‌کننده شده است.

$$P_{V_1} = V_1 \cdot I_1 = (-12) \times 1 = -12 \text{ W}$$

$$P_{V_2} = V_2 \cdot I_2 = 26 \times (-3) = -78 \text{ W}$$

پس معلوم می‌شود که منبع ۱۲ ولت، ۱۲ وات و منبع ۲۶ ولت، ۷۸ وات توان به مدار می‌دهد در نتیجه، مشخص است که مقاومت‌های موجود در مدار در مجموع ۹۰ وات توان مصرف می‌کنند.



مثال: در مدار شکل روبه‌رو مقاومت‌ها عبارت‌اند از:

$$R_1 = 1\Omega, R_r = 2\Omega \text{ و } R_r = 1\Omega$$

و نیروی محرکه الکتریکی باتری‌ها (که آرمانی فرض شده‌اند) عبارت‌اند از:

$$\mathcal{E}_1 = 4V \text{ و } \mathcal{E}_2 = 7V$$

اگر جهت جریان‌ها را مطابق شکل فرض کنیم، مقدار جریان‌ها را به‌دست آورید.

پاسخ: نخست قاعده اختلاف پتانسیل‌ها را برای حلقه‌های بالایی و پایینی به‌کار می‌گیریم. اگر حلقه بالایی را به‌طور ساعتگرد از نقطه a بپییم، خواهیم داشت:

$$-I_r R_r + \mathcal{E}_2 - I_r R_r = 0$$

یا

$$-I_r(1\Omega) + 7V - I_r(2\Omega) = 0$$

در نتیجه

$$I_r(2\Omega) + I_r(1\Omega) = 7V \quad (1)$$

و اگر حلقه پایینی را به‌طور ساعتگرد از نقطه a بپییم، خواهیم داشت:

$$+I_r R_r - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1 - I_1 R_1 = 0$$

یا

$$+I_r(2\Omega) - 7V + 4V - I_1(1\Omega) = 0$$

در نتیجه

$$-I_1(1\Omega) + I_r(2\Omega) = 3V \quad (2)$$

از طرفی، از قاعده جریان‌ها در انشعاب (گره) a داریم:

$$I_1 + I_r = I_3 \quad (3)$$

I_r را در معادله (۱) با استفاده از معادله (۳) با $I_1 + I_r$ جایگزین می‌کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$2I_r + (I_1 + I_r) = I_1 + 3I_r = 7 \quad (4)$$

با حل دستگاه دو معادله‌ای شامل معادله‌های (۲) و (۴)

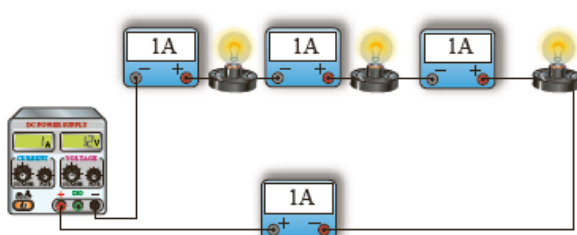
$$\begin{cases} -I_1 + 2I_r = 3 \\ I_1 + 3I_r = 7 \end{cases}$$

از آنجا $I_r = 2A$ و $I_1 = 1A$ می‌شود. اکنون با استفاده از معادله (۳) جریان I_r را به‌دست می‌آوریم:

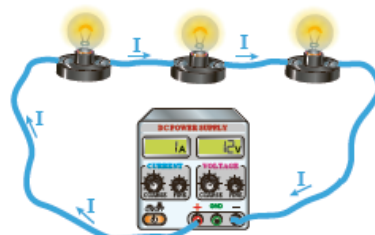
$$I_3 = I_1 + I_r = 1A + 2A = 3A$$

اتصال متوالی (سری) مقاومتها:

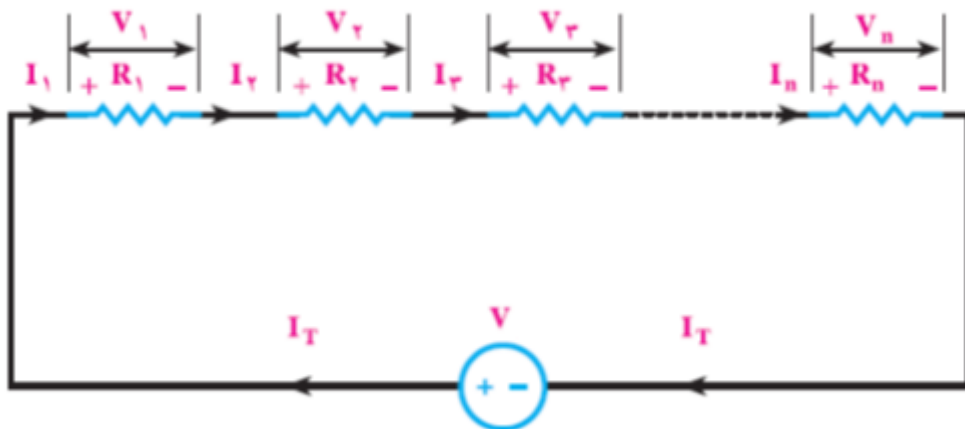
در این اتصال شدت جریان در مقاومتها یکسان است ولی اختلاف پتانسیل به نسبت مقاومتها تقسیم میشود یعنی هر مقاومتی که بیشتر است اختلاف پتانسیل دوسر آن لامپ بیشتر است به همین دلیل دو لامپ با توان مختلف با یکدیگر متوالی بسته شوند آنکه توان کمتری دارد مقاومت بیشتری دارد در نتیجه نور آن بیشتر است



شکل ۵-۲۱ قرار دادن آمپرسنج در مدار



شکل ۵-۲۰ لامپ‌هایی که به طور متوالی به هم بسته شده‌اند

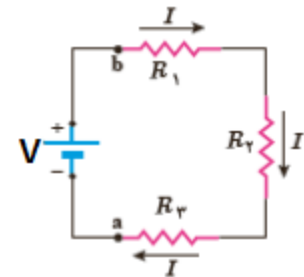


مقاومت معادل:

مقاومتی که به جای دو یا چند مقاومت در مدار قرار میگیرد به طوری که تحت اختلاف پتانسیل ثابت شدت جریان مدار تغییر نکند و با R_{eq} یا R_t نشان میدهیم.

محاسبه مقاومت معادل در اتصال متوالی (سری) مقاومتها:

همانگونه که قبلا اشاره شد در این اتصال شدت جریان در مقاومتها یکسان است ولی اختلاف پتانسیل به نسبت مقاومتها تقسیم میشود.



$$I_1 = I_2 = I_3 = I = I_{eq}$$

$$V = I_{eq} R_{eq}, V_1 = I_1 R_1, V_2 = I_2 R_2, V_3 = I_3 R_3$$

$$V = I R_{eq}, V_1 = I R_1, V_2 = I R_2, V_3 = I R_3$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

$$I R_{eq} = I R_1 + I R_2 + I R_3 \Rightarrow I R_{eq} = I (R_1 + R_2 + R_3)$$

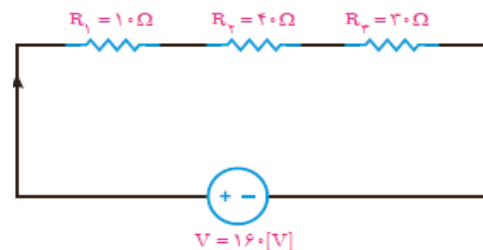
$$R_t = R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

$$R_{eq} = \sum R_i$$

بنابراین مقاومت معادل در مدار سری از مجموع مقاومتها بدست می آید و مقامت معادل از بزرگترین مقاومت بزرگتر است.

مثال: در مدار شکل زیر تعیین کنید

(۱) مقاومت معادل (۲) شدت جریان مدار (۳) اختلاف پتانسیل دو سر هر مقاومت



$$1) R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 = 10 + 40 + 30 = 80 \Omega$$

$$2) I = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{160}{80} = 2 A$$

$$3) V_1 = I R_1 = 2 \times 10 = 20 V$$

$$V_2 = I R_2 = 2 \times 40 = 80 V$$

$$V_3 = I R_3 = 2 \times 30 = 60 V$$

مثال: در مدار شکل زیر تعیین کنید

(۱) مقاومت معادل (۲) شدت جریان مدار (۳) اختلاف پتانسیل دو سر هر مقاومت

(۴) توان مصرفی (۵) گرمای تولید شده در مدار پس از ۱۰ s

$$1) R_t = R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 = 3 + 2 + 1 = 6\Omega$$

$$2) I = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{12}{6} = 2A$$

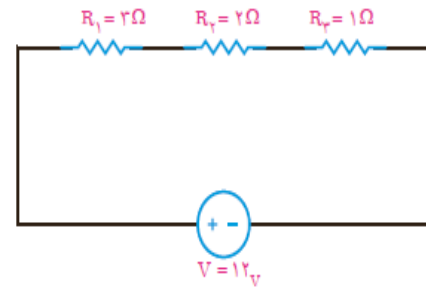
$$3) V_1 = IR_1 = 2 \times 3 = 6V$$

$$V_2 = IR_2 = 2 \times 2 = 4V$$

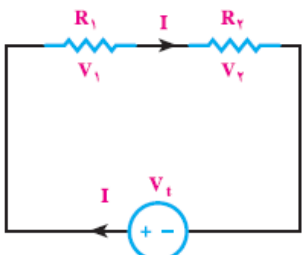
$$V_3 = IR_3 = 2 \times 1 = 2V$$

$$4) p_t = I^2 \cdot R_t = 2^2 \times 6 = 24W$$

$$5) Q = U = I^2 \cdot R_t \cdot t = 2^2 \times 6 \times 10 = 240J$$

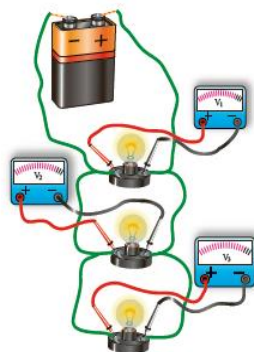
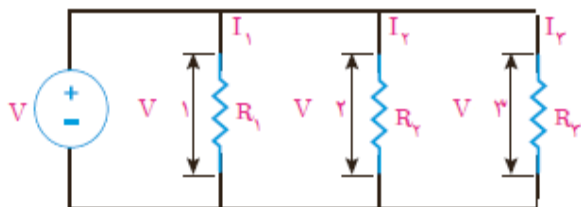


ویژگی‌های مدارهای سری مقاومتی

جریان	جریان عبوری از همه مقاومت‌های سری مساوی است. $I_T = I_1 = I_2 = I_3 = I_n$
ولتاژ	در مدارهای سری ولتاژ به نسبت مقدار مقاومت‌ها در دو سر مقاومت‌های مدار تقسیم می‌شود. طبق قانون اهم $\begin{cases} V_1 = R_1 \cdot I_1 \\ V_2 = R_2 \cdot I_2 \\ V_3 = R_3 \cdot I_3 \\ V_n = R_n \cdot I_n \end{cases}$ $V_T = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$
مقاومت معادل	$R_t = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$
توان و انرژی	توان هر یک از مقاومت‌ها $\begin{cases} P_1 = V_1 I_1 = R_1 I_1^2 = \frac{V_1^2}{R_1} \\ P_2 = V_2 I_2 = R_2 I_2^2 = \frac{V_2^2}{R_2} \\ P_3 = V_3 I_3 = R_3 I_3^2 = \frac{V_3^2}{R_3} \\ P_n = V_n I_n = R_n I_n^2 = \frac{V_n^2}{R_n} \end{cases}$ $P = \frac{W}{t}$ $P_T = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$ $W_T = W_1 + W_2 + W_3 + \dots + W_n$
حالت خاص	هرگاه n مقاومت مساوی به صورت سری بسته شوند مقاومت معادل از رابطه زیر محاسبه می‌شود. $R_T = n \cdot R = (\text{تعداد مقاومت‌ها}) \times (\text{مقدار اهم یک مقاومت})$ هرگاه دو مقاومت به صورت سری بسته شوند تقسیم ولتاژ در دو مقاومت از روابط زیر به دست می‌آید. $V_{R_1} = V_t \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ $V_{R_2} = V_t \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ 

اتصال موازی مقاومتها

در این اتصال دو سر مصرف کننده‌ها به یکدیگر وصل میشود بنابراین اختلاف پتانسیل مقاومتها با یکدیگر برابر است. ولی شدت جریان به نسبت عکس مقاومتها تقسیم میشود



شکل ۲۳-۵ ولتاژ در لامپ‌های موازی



شکل ۲۲-۵ لامپ‌هایی که به طور موازی به هم بسته شده‌اند

$$V_1 = V_2 = V_3$$

جریان هر یک از مقاومت‌ها با استفاده از قانون اهم به دست می‌آیند.



$$\text{ولتاژ} = \frac{\text{جریان}}{\text{مقاومت}}$$

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{V_2}{R_2}$$

$$I_3 = \frac{V_3}{R_3}$$

محاسبه مقاومت معادل در مدار موازی

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_{eq}$$

$$I_t = I_1 + I_2 + I_3$$

$$\frac{V}{R_{eq}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3} \Rightarrow \frac{V}{R_{eq}} = V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}}$$

توجه: بنابراین در اتصال موازی مقاومتها مقاومت معادل از کوچکترین مقاومت کمتر و اگر یکی از مصرف کننده ها قطع شود باقیمانده مصرف کننده ها بکار خود ادامه میدهند به همین دلیل در منازل مصرف کننده ها موازی بسته میشوند

مثال: در مدار شکل تعیین کنید.

- ۱- مقاومت معادل ۲- جریان هر شاخه ۳- جریان کل ۴- توان مصرفی کل و گرمای تولید شده پس از ۱۰s

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_{eq} = 12$$

$$1) \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} \Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{9}{12} \Rightarrow R_{eq} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \Omega$$

$$2) I_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{12}{3} = 4A$$

$$I_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{12}{4} = 3A$$

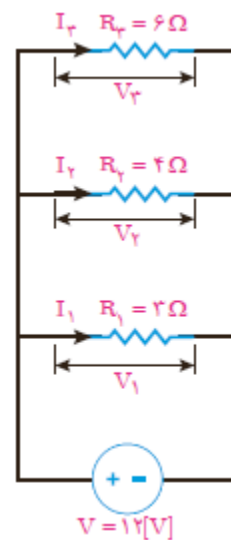
$$I_3 = \frac{V}{R_3} = \frac{12}{6} = 2A$$

$$3) I_t = I_1 + I_2 + I_3 = 4 + 3 + 2 = 9A$$

$$I_t = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{12}{\frac{4}{3}} = \frac{36}{4} = 9A$$

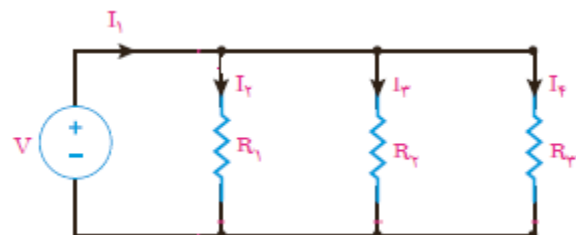
$$4) P = V \cdot I = 12 \times 9 = 108W$$

$$Q = U = I^2 \cdot R \cdot t = 9^2 \times \frac{4}{3} \times 10 = 1080W$$

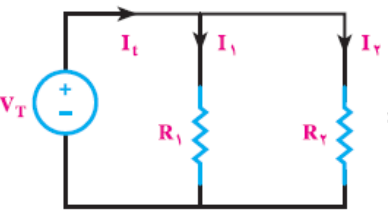


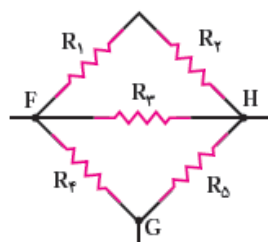
سوال: در مدار شکل تعیین کنید. $R_1 = 2\Omega, R_2 = 3\Omega, R_3 = 6\Omega, V = 12V$

- ۱- مقاومت معادل ۲- جریان هر شاخه ۳- جریان کل ۴- توان مصرفی کل و گرمای تولید شده پس از ۱۰s



ویژگی‌های مدارهای موازی مقاومتی

بر اساس قانون اهم $\begin{cases} I_1 = \frac{V_1}{R_1} \\ I_2 = \frac{V_2}{R_2} \\ I_3 = \frac{V_3}{R_3} \\ \vdots \\ I_n = \frac{V_n}{R_n} \end{cases}$ در مدارهای موازی جریان به نسبت عکس مقاومت‌ها و متناسب با مقدار مقاومت‌ها در بین آن‌ها تقسیم می‌شود. $I_T = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n$	جریان
$V_T = V_1 = V_2 = V_3 = \dots = V_n$ ولتاژ دو سر هر یک از مقاومت‌ها با هم برابر است.	ولتاژ
$R_t = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}}$	مقاومت معادل
توان هر یک از مقاومت‌ها $\begin{cases} P_1 = V_1 \cdot I_1 = R_1 I_1^2 = \frac{(V_1)^2}{R_1} \\ P_2 = V_2 \cdot I_2 = R_2 I_2^2 = \frac{(V_2)^2}{R_2} \\ P_3 = V_3 \cdot I_3 = R_3 I_3^2 = \frac{(V_3)^2}{R_3} \\ \vdots \\ P_n = V_n \cdot I_n = R_n I_n^2 = \frac{(V_n)^2}{R_n} \end{cases}$ توان و انرژی $P = \frac{W}{t}$ $P_T = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$ $W_T = W_1 + W_2 + W_3 + \dots + W_n$	توان و انرژی
هرگاه n مقاومت مساوی موازی باشند مقاومت معادل از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود. $R_t = \frac{R}{n}$ (مقدار اهم یک مقاومت) / (تعداد مقاومت‌ها) هرگاه دو مقاومت نامساوی به صورت موازی وصل شوند مقاومت معادل و تقسیم جریان در دو مقاومت از روابط مقابل به دست می‌آید. $R_t = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2}$ $I_1 = I_t \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ $I_2 = I_t \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ 	حالت خاص



مثال: شکل روبه‌رو پنج مقاومت $5/0^\circ$ اهمی را نشان می‌دهد. مقاومت معادل بین نقطه‌های (الف) F و H و (ب) F و G را بیابید.

پاسخ: الف) مقاومت‌های R_1 و R_2 متوالی‌اند و مقاومت معادل آنها با مقاومت موازی R_3 موازی است. همین‌طور مقاومت‌های R_4 و R_5 متوالی‌اند و مقاومت معادل آنها با مقاومت موازی سه مقاومت بالا موازی است. بنابراین، برای مقاومت معادل کل مدار بین نقطه‌های F و H داریم:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_{45}} = \frac{1}{5/0^\circ\Omega + 5/0^\circ\Omega} + \frac{1}{5/0^\circ\Omega} + \frac{1}{5/0^\circ\Omega + 5/0^\circ\Omega}$$

$$= \frac{2}{5/0^\circ\Omega} = 0/40^\circ\Omega^{-1}$$

در نتیجه

$$R_{eq} = \frac{1}{0/40^\circ\Omega^{-1}} = 2/5^\circ\Omega$$

ب) اکنون همچون قسمت الف، R_1 و R_2 متوالی‌اند و مقاومت معادل آنها نیز با R_3 موازی است؛ ولی در اینجا مقاومت معادل این سه مقاومت با مقاومت R_5 متوالی و مقاومت معادل کل آنها با مقاومت موازی R_4 موازی است. بنابراین برای مقاومت معادل کل داریم:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_{1235}} \quad (1)$$

که در آن R_{1235} خود برابر است با

$$R_{1235} = R_{123} + R_5 \quad (2)$$

و R_{123} خود از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1}{R_{123}} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{5/0^\circ\Omega + 5/0^\circ\Omega} + \frac{1}{5/0^\circ\Omega} = \frac{3}{10/0^\circ\Omega}$$

در نتیجه

$$R_{123} = \frac{10/0^\circ}{3} \Omega = 3/33\Omega$$

اکنون با استفاده از رابطه (۲) داریم:

$$R_{1235} = 3/33\Omega + 5/0^\circ\Omega = 8/33\Omega$$

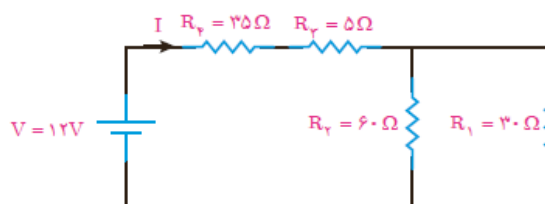
که با قرار دادن در رابطه (۱)، R_{eq} را چنین به دست می‌دهد:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{5/0^\circ\Omega} + \frac{1}{8/33\Omega} = 0/32^\circ\Omega^{-1}$$

و در نتیجه

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{0/32^\circ\Omega^{-1}} = 3/12\Omega$$

مثال: مقاومت معادل مدار (شکل ۴۶) زیر را به دست آورید و سپس جریان مدار را محاسبه کنید.

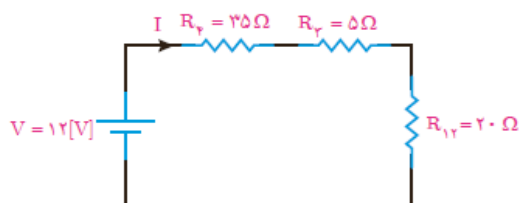


شکل ۴۶

حل: مقاومت های R_1 و R_r با هم موازی هستند و معادل آنها R_{1r} به دست می آید.

$$R_{1r} = \frac{R_1 \times R_r}{R_1 + R_r} = \frac{30 \times 60}{30 + 60} = 20 \Omega$$

با جایگزینی R_{1r} به جای R_1 و R_r شکل ۴۷ به دست می آید.



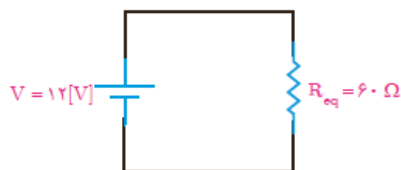
شکل ۴۷

مقاومت R_{1r} ، R_r و R_f با هم سری هستند و معادل آنها R_{eq} به دست می آید.

$$R_{eq} = R_f + R_r + R_{1r}$$

$$R_{eq} = 35 + 5 + 20 = 60 \Omega$$

با جایگزینی R_{eq} به جای R_r ، R_f و R_{1r} (شکل ۴۸) به دست می آید.



شکل ۴۸

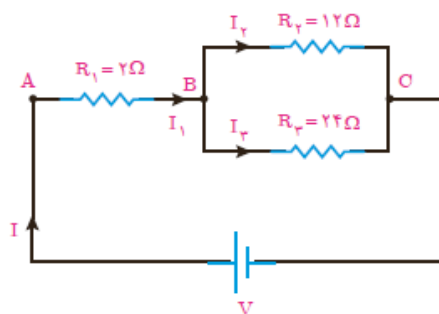
با قانون اهم جریان مدار به دست می آید.

$$\text{ولتاژ} = \frac{\text{ولتاژ}}{\text{مقاومت}}$$

$$I = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{12}{60} = 0.2 [A]$$



مثال: در مدار (شکل ۴۹) اگر $V_{BC} = 48V$ باشد جریان منبع را به دست آورید.



شکل ۴۹

حل: V_{BC} ولتاژ دو سر مقاومت های R_2 و R_3 می باشد. R_2 و R_3 با هم موازی هستند و با قانون اهم جریان شاخه های آنها به دست می آید.

$$\text{ولتاژ} \\ \text{جریان} = \frac{\text{مقاومت}}$$

$$I_2 = \frac{V_{BC}}{R_2} = \frac{48}{12} = 4[A]$$

$$I_3 = \frac{V_{BC}}{R_3} = \frac{48}{24} = 2[A]$$



با نوشتن KCL برای گره B جریان I_1 به دست می آید.

$$KCL) + I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$+ I_1 - 4 - 2 = 0$$

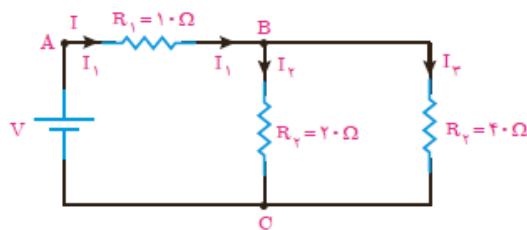
$$I_1 = 6[A]$$

با توجه به (شکل ۴۹) جریان منبع I با جریان عبوری از مقاومت سری R_1 برابر است لذا:

$$I = I_1$$

$$I = 6[A]$$

مثال: در مدار (شکل ۵۰)، $V_{AB} = 30V$ می باشد. ولتاژ منبع چند ولت است؟



شکل ۵۰

حل: از قانون اهم جریان مقاومت R_1 به دست می آید.

$$\text{ولتاژ} = \frac{\text{جریان}}{\text{مقاومت}}$$

$$I_1 = \frac{V_{AB}}{R_1} = \frac{30}{10} = 3[A]$$



از رابطه تقسیم جریان بین دو مقاومت موازی I_2 و I_3 به دست می آید.

$$I_2 = I_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 3 \times \frac{40}{20 + 40} = \frac{120}{60} = 2[A]$$

$$I_3 = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 3 \times \frac{20}{20 + 40} = \frac{60}{60} = 1[A]$$

از قانون اهم ولتاژ دو سر مقاومت R_2 که V_{BC} نشان داده می شود به دست می آید.

$$\text{ولتاژ} = \text{جریان} \times \text{مقاومت}$$

$$V_{BC} = R_2 I_2 = 20 \times 2 = 40[V]$$



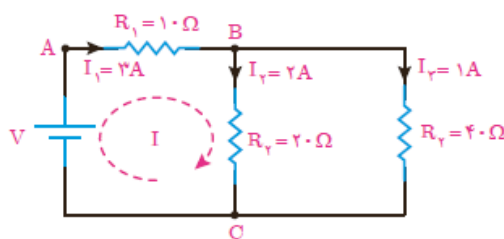
از قانون ولتاژهای کیرشهف KVL ولتاژ منبع به دست می آید (شکل ۵۱).

$$\text{KVL}) - V + R_1 I_1 + R_2 I_2 = 0$$

$$\text{KVL}) - V + 10(3) + 20(2) = 0$$

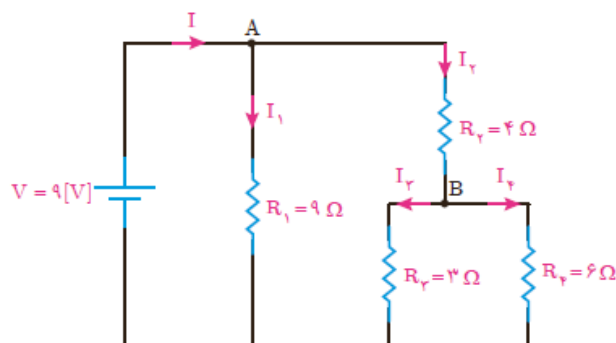
$$\text{KVL}) - V + 30 + 40 = 0$$

$$V = 70[V]$$



شکل ۵۱

مثال: جریان هر یک از شاخه های مدار (شکل ۵۲) را به دست آورید.

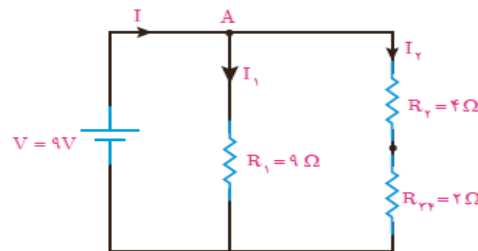


شکل ۵۲

حل: مقاومت‌های R_3 و R_4 با هم موازی هستند. مقاومت معادل آنها R_{34} به دست می‌آید.

$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{3 \times 6}{3 + 6} = \frac{18}{9} = 2 [\Omega]$$

با جایگزینی R_{34} به جای R_3 و R_4 (شکل ۵۳) به دست می‌آید.

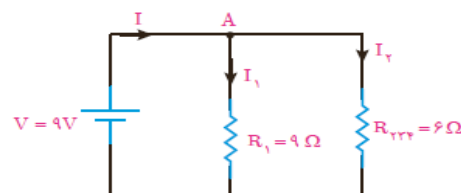


شکل ۵۳

مقاومت‌های R_2 و R_{34} با هم سری هستند مقاومت معادل آنها R_{234} به دست می‌آید.

$$R_{234} = R_2 + R_{34} = 4 + 2 = 6 [\Omega]$$

با جایگزینی R_{234} به جای R_2 و R_{34} (شکل ۵۴) به دست می‌آید.



شکل ۵۴

از قانون اهم جریان‌های I_1 و I_2 به دست می‌آید.

$$\text{ولتاژ} \\ \text{مقاومت} = \text{جریان}$$

$$I_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{9}{9} = 1 [A]$$

$$I_2 = \frac{V}{R_{234}} = \frac{9}{6} = 1.5 [A]$$



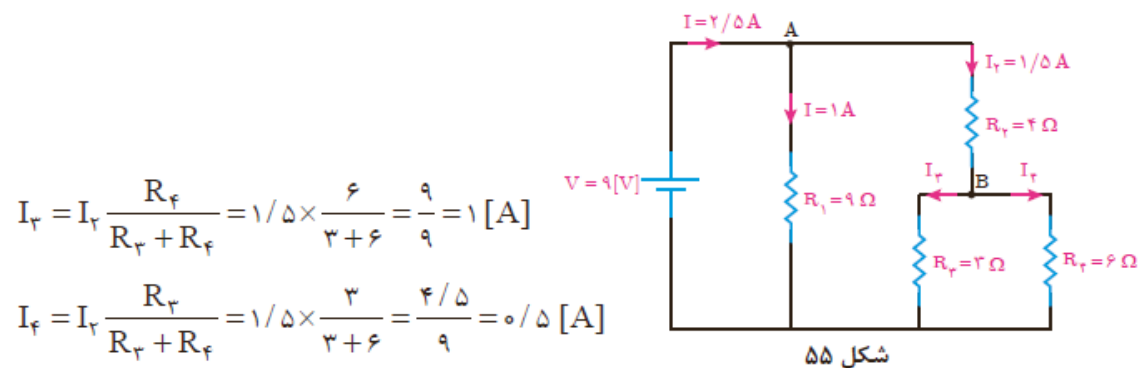
بانوشتن KCL برای گره A جریان منبع I به دست می‌آید.

$$KCL(A) + I - I_1 - I_2 = 0$$

$$+ I - 1 - 1.5 = 0$$

$$I = 2.5 [A]$$

اکنون با به دست آمدن I و I_1 و I_2 و با توجه به (شکل ۵۵) و استفاده از روابط تقسیم جریان بین دو مقاومت موازی R_3 و R_4 جریان I_3 و I_4 به دست می آید.

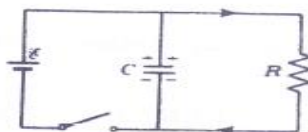


۴-۷ مدارهای RC

جریانهایی که تاکنون در اینجا بررسی شده‌اند جریانهای یکنواخت بوده‌اند. هنگامی که خازنی را در یک مدار قرار می‌دهیم، در دوره‌ای که خازن در حال بارگیری یا باردهی (تخلیه) است، جریان به صورت تابعی از زمان تغییر می‌کند. چنانچه خازنی را مستقیماً به دو سر یک باتری آرمانی (بدون مقاومت داخلی) ببندیم، خازن فوراً باردار می‌شود. همین‌طور اگر دو سر خازن باردار را با سیم به هم ببندیم، بار آن بلافاصله تخلیه می‌شود. اکنون می‌خواهیم ببینیم، هنگامی که مدار شامل مقاومت باشد، تغییرات جریان و بار خازن برحسب زمان به چه صورتی است.

۱- باردهی یا تخلیه خازن

در شکل ۱۴.۷ یک خازن و یک مقاومت خارجی را به طور موازی به دو سر یک باتری آرمانی (بدون مقاومت داخلی) $\mathcal{E}$ وصل کرده‌ایم. هنگامی که کلید را می‌بندیم، اختلاف پتانسیل دو سر R و C برابر $\mathcal{E}$ می‌شود. در این حالت، بار روی خازن برابر $Q_0 = C\mathcal{E}$ است. هنگامی که در $t=0$



شکل ۱۴.۷ مداری برای نشان دادن تخلیه خازن در مقاومت.

کلید باز می‌شود، خالی شدن بار خازن و مصرف انرژی در مقاومت آغاز می‌شود. با توجه به قاعده حلقه داریم

$$\frac{Q}{C} - IR = 0$$

که در آن Q مقدار لحظه‌ای بار موجود در صفحه مثبت خازن و I جریان گذرنده از سیم است. در این حال، جریان I با آهنگ کاهش بار Q برابر می‌شود؛ یعنی $I = -\frac{dQ}{dt}$. با استفاده از قاعده حلقه، به دست می‌آید

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC}$$

که با بازنویسی و انتگرال‌گیری زیر

$$\int \frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC} \int dt$$

خواهیم داشت

$$\ln Q = -\frac{t}{RC} + k$$

که در آن k ثابت انتگرال‌گیری است. می‌دانیم که در $t=0$ بار خازن $Q = Q_0$ است، پس داریم $k = \ln Q_0$ که با استفاده از آن نتیجه به صورت زیر درمی‌آید

$$Q = Q_0 e^{-t/RC} \quad (7.7)$$

منحنی نمایش این تابع کاهش نمایی را در شکل ۱۵.۷ رسم کرده ایم. بار خازن پس از گذشت زمانی معادل

$$\tau = RC \quad (۸.۷)$$

که به ثابت زمانی معروف است، به مقدار $Q = Q_0 e^{-1} = 0.37 Q_0$ یا ۳۷٪ مقدار اولیه اش کاهش می یابد. زمان لازم برای کاهش بار خازن به ۵۰٪ مقدار اولیه اش را نیمه عمر، $T_{1/2}$ ، می گویند. در این صورت

$$\frac{1}{2} Q_0 = Q_0 e^{-T_{1/2}/RC}$$

که از آن حاصل می شود

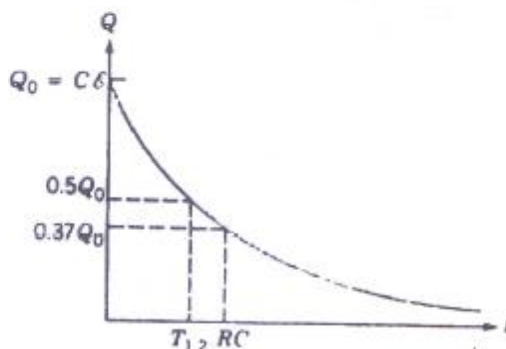
$$T_{1/2} = RC \ln 2 = 0.693 \tau \quad (۹.۷)$$

تابع جریان را می توان با استفاده از $I = -\frac{dQ}{dt}$ و معادله ۷.۷ به دست آورد

$$I = I_0 e^{-t/RC} \quad (۱۰.۷)$$

که در آن $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$ جریان در لحظه $t = 0$ است. بستگی زمانی جریان همانند بستگی زمانی بار خازن است.

خودآزمایی ۶: نشان دهید که ثابت زمانی، نه فقط طول مدت لازم برای کاهش بار و افت آن به



شکل ۱۵.۷ کاهش نمایی بار خازن. $T_{1/2}$ نیمه عمر و τ ثابت زمانی است.

میزان $\frac{1}{e}$ یا ۳۷٪ مقدار اولیه Q_0 در لحظه $t = 0$ ، بلکه مدت زمان لازم برای افت بار به میزان $\frac{1}{e}$ هر مقدار باری را نشان می‌دهد. (به همین ترتیب، مدت زمان لازم برای افت بار به میزان ۵۰٪ هر مقدار اولیه‌ای برابر یک نیمه عمر، $T_{1/2}$ ، است.)

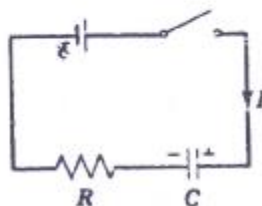
خودآزمایی ۷: چند نیمه عمر طول می‌کشد تا بار خازن به ۱۲٫۵٪ مقدار اولیه‌اش برسد؟

۲- بارگیری یا پر شدن خازن

اکنون چگونگی افزایش بار خازن را در مداری مانند شکل ۱۶٫۷ بررسی می‌کنیم. فرض می‌کنیم در لحظه $t = 0$ که کلید مدار بسته می‌شود، هیچ باری روی خازن C وجود ندارد که در این صورت اختلاف پتانسیل دو سر آن برابر صفر است. اختلاف پتانسیل دو سر R برابر $\mathcal{E}$ است، بنابراین جریان اولیه (بیشینه) گذرنده از مدار برابر $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$ می‌شود. با استفاده از قاعده حلقه در این مدار (در جهت حرکت عقربه ساعت)، به دست می‌آید

$$\mathcal{E} - IR - \frac{Q}{C} = 0.$$

جمع اختلاف پتانسیل‌های دو سر خازن و مقاومت همواره مقداری است ثابت $\mathcal{E} = V_C + V_R$. اختلاف پتانسیل دو سر خازن با ورود بار به آن افزایش می‌یابد، و این بدان معنی است که در این حال اختلاف پتانسیل دو سر R و جریان گذرنده از مدار باید کاهش پیدا کند. در این مدار همان جریان I است که سبب افزایش بار خازن می‌شود، پس $I = + \frac{dQ}{dt}$. هنگامی که جریان کاهش می‌یابد، آهنگ بارگیری (یا پر شدن) خازن نیز کاهش پیدا می‌کند. در زمانی که اختلاف پتانسیل دو سر C به $\mathcal{E}$ می‌رسد، اختلاف پتانسیل دو سر R برابر صفر می‌شود. در این حال، عبور جریان متوقف می‌شود، و بار روی خازن به مقدار بیشینه $Q_0 = C\mathcal{E}$ می‌رسد. هنگامی که $I = + \frac{dQ}{dt}$ را در قاعده حلقه قرار می‌دهیم، به دست می‌آوریم



شکل ۱۶٫۷ مدار بارگیری یا پر شدن خازن.

$$C\mathcal{E} - Q = \frac{dQ}{dt} RC$$

پس از بازآرایی این معادله به انتگرال‌گیری زیر می‌رسیم

$$\int \frac{dQ}{C\mathcal{E} - Q} = \frac{1}{RC} \int dt$$

که نتیجه آن عبارت است از

$$- \ln (C\mathcal{E} - Q) = \frac{t}{RC} + k$$

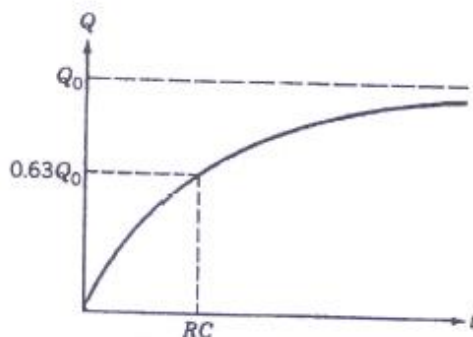
که در آن k ثابت انتگرال‌گیری است. در لحظه $t = 0$ داریم $Q = 0$ ، در نتیجه $k = -\ln(C\mathcal{E})$. بنابراین، معادله بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\ln \left(\frac{C\mathcal{E} - Q}{C\mathcal{E}} \right) = - \frac{t}{RC}$$

و سرانجام، با توجه به $Q_0 = C\mathcal{E}$ ، خواهیم داشت

$$Q = Q_0 (1 - e^{-t/RC}) \quad (11.7)$$

منحنی نمایش این تابع را در شکل ۱۷.۷ نشان داده‌ایم. در این حالت، ثابت زمانی $\tau = RC$ زمان لازم برای افزایش بار خازن به میزان $0.63Q_0$ یا 63% مقدار نهایی‌اش، را نشان می‌دهد. جریان گذرنده از مدار، با توجه به $I = + \frac{dQ}{dt}$ ، عبارت است از



شکل ۱۷.۷ افزایش بار خازن به صورت تابعی از زمان.

$$I = I_0 e^{-t/RC} \quad (۱۲.۷)$$

که در آن $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$ است. توجه داشته باشید که شکل معادله ۱۲.۷ همانند معادله تخلیه خازن است.

در مدار تخلیه شکل ۱۴.۷، اختلاف پتانسیل دو سر R و C با هم برابر است $V_C = V_R = \mathcal{E}$. در مدار بارگیری شکل ۱۶.۷، این اختلاف پتانسیلها با هم برابر نیستند. در واقع، در حالی که اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت $V_R = IR$ کاهش می یابد، اختلاف پتانسیل دوسر خازن $V_C = \frac{Q}{C}$ افزایش می یابد؛ به طوری حاصل جمع آنها $V_R + V_C = \mathcal{E}$ ثابت می ماند.

مثال ۷.۷: در مدار بارگیری شکل ۱۶.۷ فرض کنید $\mathcal{E} = 20.0V$ ، $R = 2 \times 10^5 \Omega$ ، و $C = 5.0 \mu F$. (الف) زمان لازم را برای اینکه بار خازن به ۹۰٪ مقدار نهایی اش برسد پیدا کنید؛ (ب) انرژی ذخیره شدن در خازن را در زمان $t = RC$ به دست آورید؛ (ج) اتلاف توان را در R در $t = RC$ تعیین کنید؛ (د) کار کل انجام شده به توسط باتری را هنگامی که خازن پر شده باشد ($t = \infty$) به دست آورید؛ (ه) انرژی نهایی ذخیره شده در خازن را پیدا کنید؛ (و) کل اتلاف انرژی را در مقاومت حساب کنید.

حل: (الف) زمانی را به دست می آوریم که در آن $Q = 0.9Q_0$ باشد، به طوری که $Q_0 = C\mathcal{E} = 0.1C$ است. ثابت زمانی برابر $\tau = RC = 10s$ است. با استفاده از معادله ۱۱.۷، داریم

$$0.9Q_0 = Q_0 (1 - e^{-t/10})$$

که از آن حاصل می شود $t = 23s$.

(ب) پس از گذشت یک ثابت زمانی، داریم $Q = Q_0 (1 - \frac{1}{e}) = 0.632Q_0$. انرژی ذخیره شده در خازن برابر است با

$$U_C = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(0.632 \times 0.1C)^2}{2 \times 10^{-4} F} = 0.4J$$

(ج) اتلاف توان در R عبارت است از $P_R = I^2 R$. پس از گذشت یک ثابت زمانی، داریم $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R} = 10^{-3} A$ که در آن $I = 0.37I_0$ پس

$$P_R = I^2 R = (0.37 \times 10^{-3} \text{ A})^2 (2 \times 10^5 \Omega) = 2.7 \times 10^{-2} \text{ W}$$

(د) باتری، بار Q_0 را از یک صفحه خازن به صفحه دیگر آن انتقال می دهد و در این حال آن را از اختلاف پتانسیل $\mathcal{E}$ می گذرانند. بنابراین، کل کاری که باتری انجام می دهد برابر $Q_0 \mathcal{E} = C \mathcal{E}^2 = 2 \text{ J}$ می شود.

(ه) انرژی نهایی ذخیره شده در خازن عبارت است از

$$U_C = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2 = 1 \text{ J}$$

(و) آهنگ اتلاف انرژی در R برابر است با $P_R = \frac{dU_R}{dt} = I^2 R$. پس داریم $dU_R = I^2 R dt$ که در آن I از معادله ۱۲.۷ به دست می آید. در این صورت، کل اتلاف انرژی عبارت است از

$$U_R = \int_0^\infty P_R dt = \int_0^\infty I_0^2 R e^{-2t/RC} dt = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2$$

که نتیجه ای شگفتی انگیز است: انرژی ذخیره شده در خازن دقیقاً با انرژی تلف شده در مقاومت برابر می شود. البته، حاصل جمع آنها $(U_C + U_R)$ با انرژی که از چشمه مولد emf خارج می شود مساوی است.