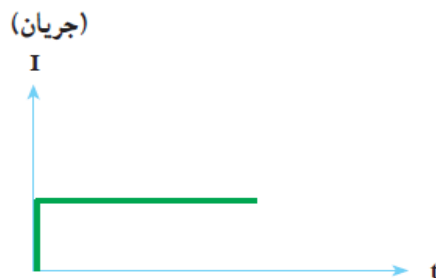


مدار الکتریکی جلسه ۱

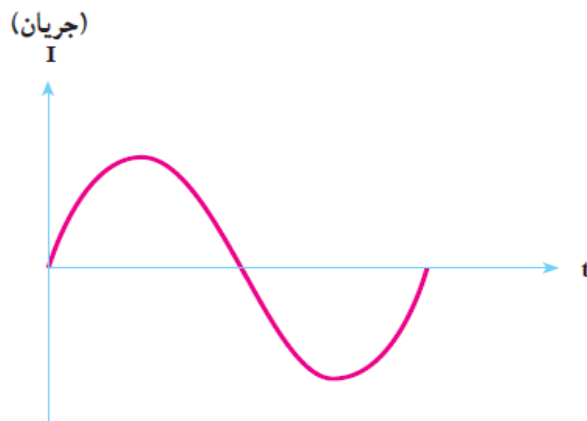
منابع	مؤلف	ناشر
مدارهای الکتریکی	دکتر پرویز جبه دار	امیر کبیر
تحلیل مدار الکتریکی	ویلیام هیت	نشر روایت - نشر قائم
مدارهای الکتریکی ۱	دکتر شیبانی - دکتر هوشمند	پیام نور
مدارهای الکتریکی ۱	دکتر علایی	دانشگاه آزاد
مدارهای الکتریکی	علی عراقی	شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران

یادآوری



جریان مستقیم (DC)

جریانی است که جهت و مقدار آن نسبت به زمان تغییر نمی کند. باتری را به عنوان یک مولد جریان مستقیم می توان در نظر گرفت که شکل موج آن به صورت مقابل است.



جریان متناوب (AC)

جریانی است که جهت و دامنه آن نسبت به زمان تغییر می کند. از جمله جریان های متناوب، می توان به برق شهر اشاره کرد که یک جریان متناوب سینوسی است. و شکل موج آن به صورت مقابل است.

تعریف جریان الکتریکی

به حرکت الکترون های آزاد در یک هادی که در طی مدت زمانی مشخص از آن عبور می نماید جریان الکتریکی گفته می شود و می توان آن را از رابطه زیر برحسب آمپر محاسبه کرد.

$$I = \frac{q}{t} \quad \begin{matrix} \text{(بار الکتریکی بر حسب کولن - C)} \\ \text{(مدت زمان عبوری بر حسب ثانیه - S)} \end{matrix} \quad \text{(جریان الکتریکی بر حسب آمپر - A)}$$

تعریف ولتاژ

مقدار کار انجام شده بر ذره باردار را ولتاژ می‌گویند و از رابطه $V = \frac{W}{q}$ برحسب ولت به دست می‌آید. معمولاً ولتاژ دو سر هر عنصری در مدار از مقایسه اختلاف ولتاژ دو سر آن به دست می‌آید به همین دلیل این عامل را اختلاف پتانسیل می‌نامند.



$$V_{AB} = V_A - V_B$$

تعریف توان الکتریکی

به مقدار کار انجام شده بر واحد زمان توان می‌گویند و مقدار آن را می‌توان از رابطه $P = \frac{W}{t}$ برحسب وات به دست آورد. مقدار توان الکتریکی مدارها را در شکل کلی از روابط زیر می‌توان حساب کرد.

$$P = (جریان) \times (ولتاژ) = VI$$

$$P = (جریان)^2 \times (مقاومت) = RI^2$$

$$P = (ولتاژ)^2 / (مقاومت) = V^2 / R$$

تعریف مقاومت الکتریکی

هر قطعه‌ای که در مقابل عبور جریان الکتریکی (حرکت الکترون‌ها) از خود ایستادگی (مخالفت) نشان دهد «مقاومت الکتریکی» نامیده می‌شود. خاصیت مقاومت الکتریکی در مدارها به سه صورت دیده می‌شود.

الف - مقاومت اهمی R (رزیستانس)

ب - مقاومت سلفی X_L (راکتانس سلفی)

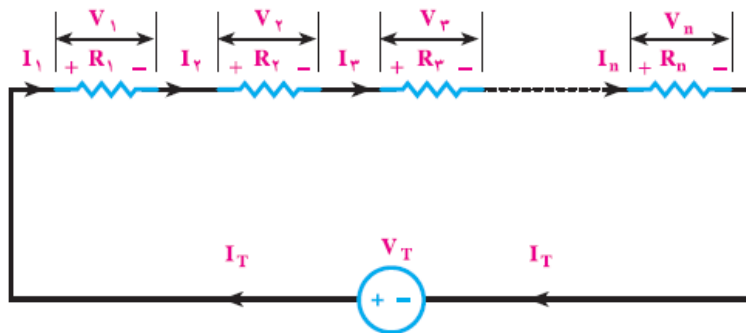
ج - مقاومت خازنی X_C (راکتانس خازنی)

تذکر: مقاومت‌های سلفی (X_L) و خازنی (X_C) فقط در زمان استفاده از سلف و خازن در جریان متناوب وجود دارند. بر همین اساس می‌توان راکتانس‌ها، را به صورت زیر تعریف کرد:

به خاصیت مقاومتی سلف و خازن در جریان متناوب راکتانس سلفی یا خازنی گویند.

بررسی مدارهای اهمی (R)

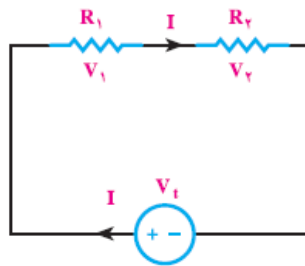
اثر مقاومتی عناصر اهمی (R) در مدارهای جریان مستقیم و متناوب یکسان است این عناصر را به دو صورت سری و موازی اتصال می‌دهند که هر یک دارای ویژگی‌هایی به شرح صفحه‌ی بعد است:



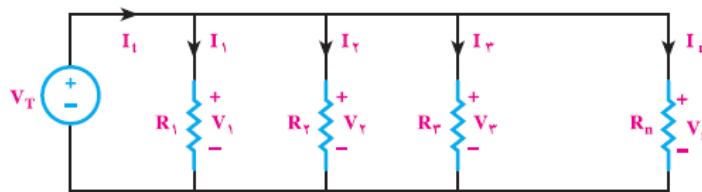
اتصال سری مقاومت‌ها
هرگاه دو یا چند مقاومت
مطابق شکل مقابل به یکدیگر
اتصال داده شوند. اتصال مدار
را سری گویند.

ویژگی‌های مدارهای سری مقاومتی

جریان	جریان عبوری از همه مقاومت‌های سری مساوی است. $I_T = I_1 = I_2 = I_3 = I_n$
ولتاژ	در مدارهای سری ولتاژ به نسبت مقدار مقاومت‌ها در دو سر مقاومت‌های مدار تقسیم می‌شود. $V_T = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$
مقاومت معادل	$R_t = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$
توان و انرژی	توان هر یک از مقاومت‌ها $P_1 = V_1 I_1 = R_1 I_1^2 = \frac{V_1^2}{R_1}$ $P_2 = V_2 I_2 = R_2 I_2^2 = \frac{V_2^2}{R_2}$ $P_3 = V_3 I_3 = R_3 I_3^2 = \frac{V_3^2}{R_3}$ $P_n = V_n I_n = R_n I_n^2 = \frac{V_n^2}{R_n}$ $P = \frac{W}{t}$ $P_T = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$ $W_T = W_1 + W_2 + W_3 + \dots + W_n$
حالت خاص	هرگاه n مقاومت مساوی به صورت سری بسته شوند مقاومت معادل از رابطه زیر محاسبه می‌شود. (مقدار اهم یک مقاومت) $\times$ (تعداد مقاومت‌ها) $R_T = n \cdot R$ هرگاه دو مقاومت به صورت سری بسته شوند تقسیم ولتاژ در دو مقاومت از روابط زیر به دست می‌آید. $V_{R_1} = V_t \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ $V_{R_2} = V_t \frac{R_2}{R_1 + R_2}$



اتصال موازی مقاومت‌ها



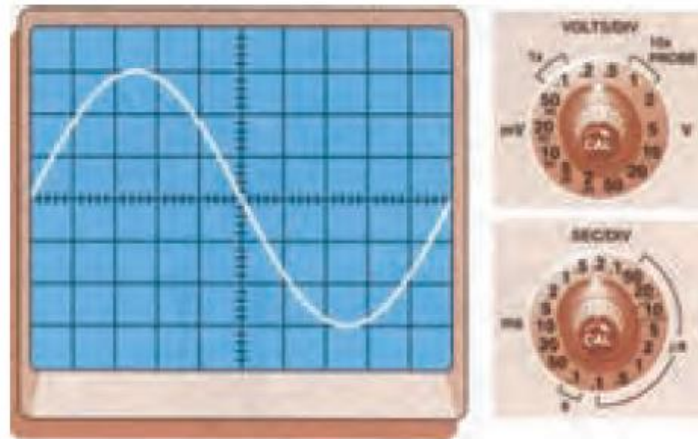
هرگاه دو یا چند مقاومت مطابق شکل روبه‌رو به یکدیگر اتصال داده شوند اتصال مدار را موازی گویند.

ویژگی‌های مدارهای موازی مقاومتی

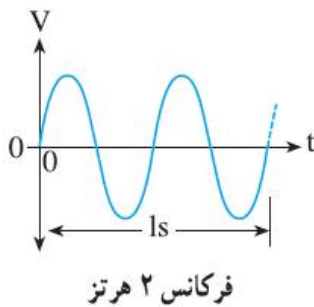
بر اساس قانون اهم $\begin{cases} I_1 = \frac{V_1}{R_1} \\ I_2 = \frac{V_2}{R_2} \\ I_3 = \frac{V_3}{R_3} \\ I_n = \frac{V_n}{R_n} \end{cases}$	در مدارهای موازی جریان به نسبت عکس مقاومت‌ها و متناسب با مقدار مقاومت‌ها در بین آن‌ها تقسیم می‌شود. $I_T = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n$	جریان
$V_T = V_1 = V_2 = V_3 = V_n$	ولتاژ دو سر هر یک از مقاومت‌ها با هم برابر است.	ولتاژ
$R_t = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}}$		مقاومت معادل
توان هر یک از مقاومت‌ها $\begin{cases} P_1 = V_1 \cdot I_1 = R_1 I_1^2 = \frac{(V_1)^2}{R_1} \\ P_2 = V_2 \cdot I_2 = R_2 I_2^2 = \frac{(V_2)^2}{R_2} \\ P_3 = V_3 \cdot I_3 = R_3 I_3^2 = \frac{(V_3)^2}{R_3} \\ P_n = V_n \cdot I_n = R_n I_n^2 = \frac{(V_n)^2}{R_n} \end{cases}$	$P = \frac{W}{t}$ $P_T = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$ $W_T = W_1 + W_2 + W_3 + \dots + W_n$	توان و انرژی
هرگاه n مقاومت مساوی موازی باشند مقاومت معادل از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود. $R_t = \frac{R}{n}$ (مقدار اهم یک مقاومت) (تعداد مقاومت‌ها)	هرگاه دو مقاومت نامساوی به صورت موازی وصل شوند مقاومت معادل و تقسیم جریان در دو مقاومت از روابط مقابل به دست می‌آید. $R_t = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2}$$I_1 = I_t \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$I_2 = I_t \frac{R_1}{R_1 + R_2}$	حالت خاص

مشخصات جریان متناوب

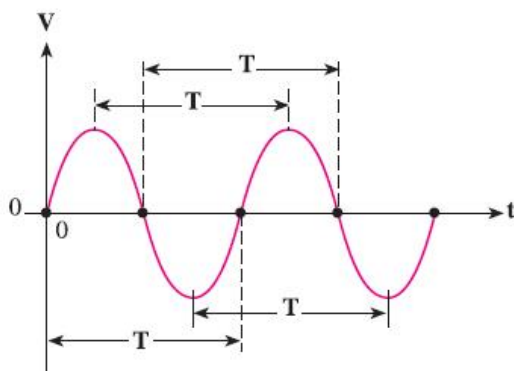
۱- سیکل: شکل موجی که در اثر گردش یک سیم پیچ در داخل میدان مغناطیسی به وجود می آید را یک «سیکل» می گویند. هر سیکل از دو نیم سیکل مثبت و منفی تشکیل می شود.



تصویر یک سیکل روی صفحه اسیلوسکوپ



۲- فرکانس (f): به تعداد سیکل‌ها (نوسانات) در مدت زمان یک ثانیه «فرکانس» می گویند. واحد فرکانس $\frac{1}{(s)}$ یا هرتز (Hz) است. فرکانس برق ایران ۵۰ هرتز است.

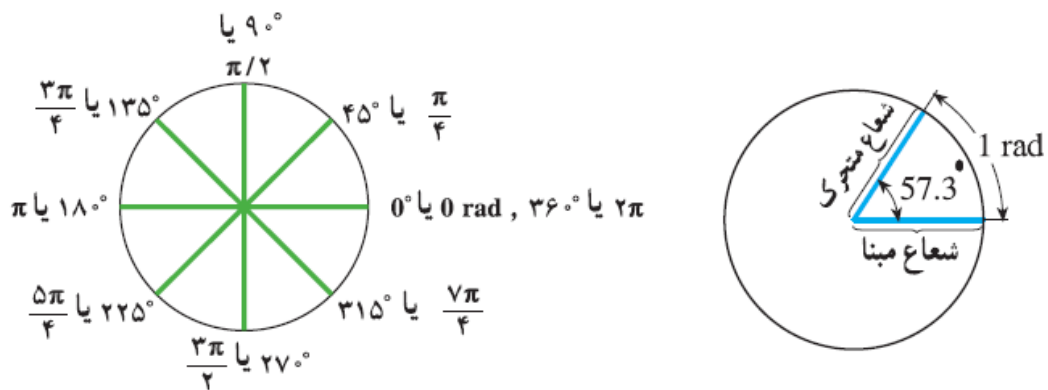


۳- مدت زمان تناوب (T): مدت زمانی را که طول می کشد تا یک سیکل کامل طی شود «زمان تناوب» یا «پریود» می گویند. واحد زمان تناوب $\left(\frac{1}{Hz}\right)$ یا ثانیه (s) است. پریود و فرکانس عکس یکدیگرند.

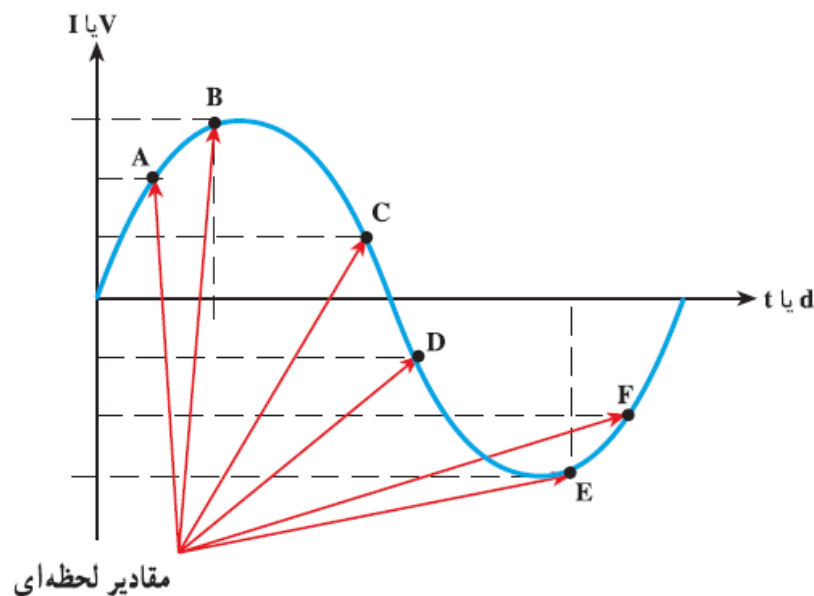
$$T = \frac{1}{f} \quad \text{یا} \quad f = \frac{1}{T}$$

۴- سرعت زاویه‌ای (ω امگا): سرعت زاویه‌ای عبارت است از زاویه‌ای که شعاع مربوط به متحرک نسبت به شعاع مبنا در مدت یک ثانیه طی می‌کند. واحد سرعت زاویه‌ای رادیان بر ثانیه است. چون یک دور چرخش داخل دایره برابر 2π رادیان است لذا اگر متحرکی در هر ثانیه f دور بزند خواهیم داشت:

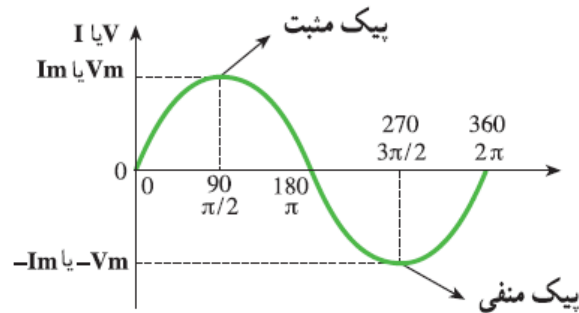
$$\omega = 2\pi f \quad \text{یا} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$



۵- دامنه: مقدار موج در هر لحظه از زمان را اصطلاحاً دامنه یا «مقدار لحظه‌ای» می‌گویند. در شکل زیر دامنه لحظه‌ای در نقاط A, B, C, D, E, F نشان داده شده است.



۶- مقدار پیک یا ماکزیمم (max-peak): حداکثر مقداری که ولتاژ یا جریان سینوسی در هر نیم سیکل دارد را مقدار ماکزیمم می گویند. در شکل زیر نقاط پیک مثبت و منفی نشان داده شده است.

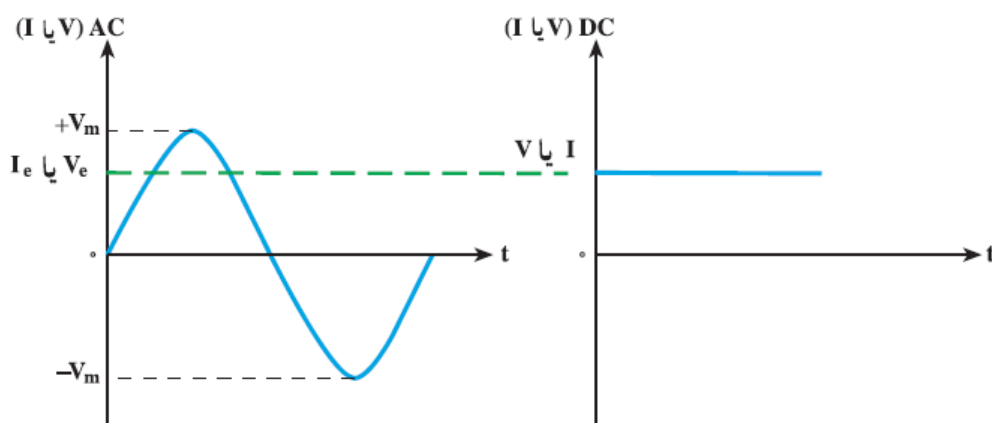


۷- مقدار مؤثر^۱: مقدار مؤثر یک جریان یا ولتاژ AC عبارت است از مقدار جریان یا ولتاژی که در یک مدار اهمی خالص (مانند اتوی برقی) همان مقدار گرمایی را تولید می کند که یک جریان یا ولتاژ DC با همان مقدار دامنه تولید می کند.
مقدار مؤثر یک موج سینوسی از روابط زیر قابل محاسبه است.

$$V_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \times V_m = 0.707 \times V_m$$

$$I_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \times I_m = 0.707 \times I_m$$

به مقدار مؤثر rms نیز می گویند.



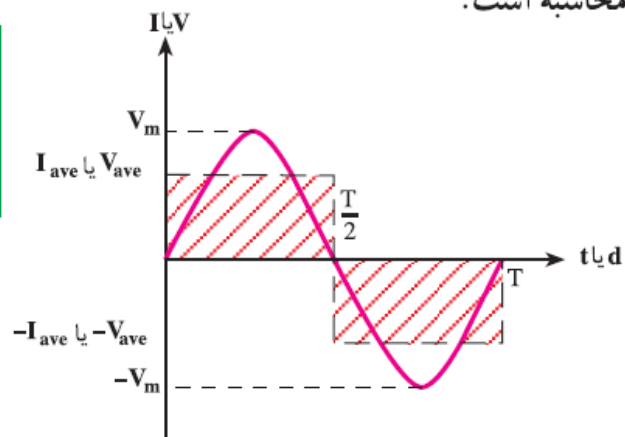
۱- Effective Values-(e)

۲- Root Mean Square-rms (جذر مربعات مقادیر لحظه ای)

۸- مقدار متوسط^۱: به میانگین مقادیر لحظه‌ای موج سینوسی در یک نیم سیکل اصطلاحاً متوسط موج می‌گویند. شکل زیر چون در هر نیم سیکل موج سینوسی از صفر شروع شده به مقدار حداکثر (ماکزیمم) می‌رسد و مجدداً به صفر بر می‌گردد لذا مقدار میانگین یک نیم سیکل نیز چیزی بین صفر و مقدار ماکزیمم می‌باشد. مقدار متوسط برای نیم سیکل موج سینوسی از روابط زیر قابل محاسبه است.

$$V_{ave} = \frac{2}{\pi} \times V_m = 0.637 \times V_m$$

$$I_{ave} = \frac{2}{\pi} \times I_m = 0.637 \times I_m$$



توجه: مقدار متوسط یک موج متناوب متقارن (موج سینوسی) در یک دوره تناوب برابر صفر است، زیرا:

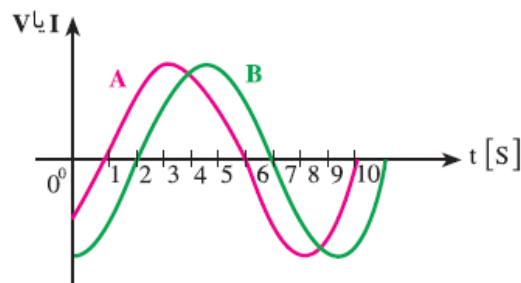
(نیم سیکل منفی) + (نیم سیکل مثبت) = (مقدار متوسط موج)

$$V_{ave_t} = V_{ave^+} + V_{ave^-}$$

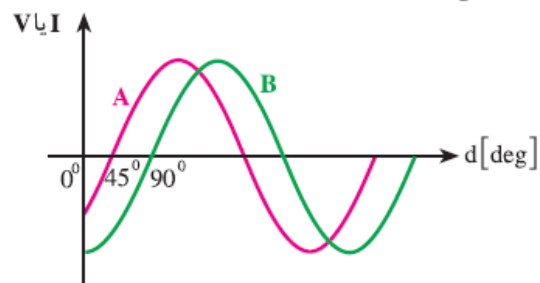
$$V_{ave_t} = (0.637) \times (V_m) + (0.637) \times (-V_m)$$

$$V_{ave_t} = 0$$

۹- فاز^۲: کلمه یا اصطلاحی است که ارتباط زمانی یا مکانی بین دو یا چند موج هم فرکانس را بیان می‌کند.



(b) موج A با B به اندازه ۱ ثانیه فاصله دارد.

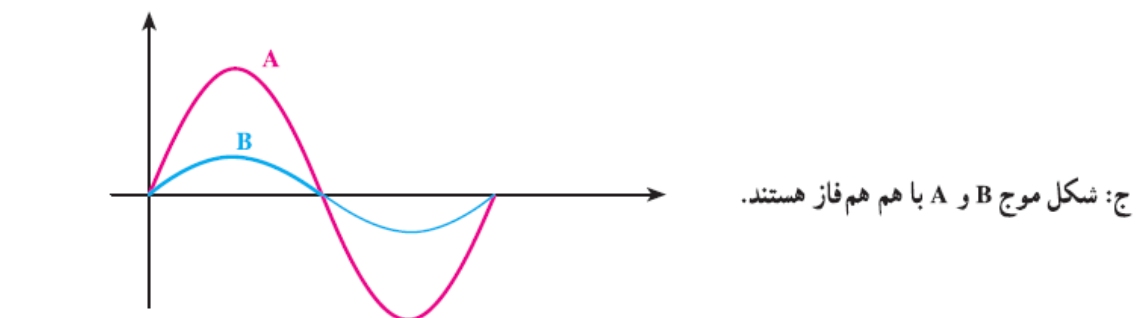
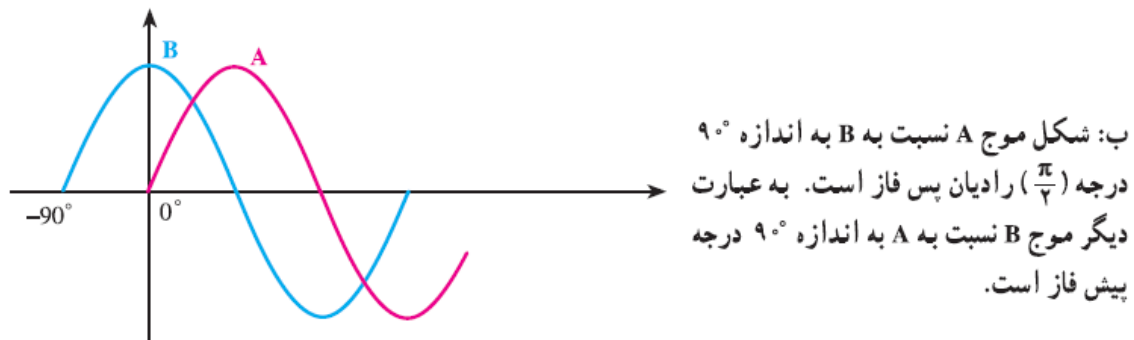
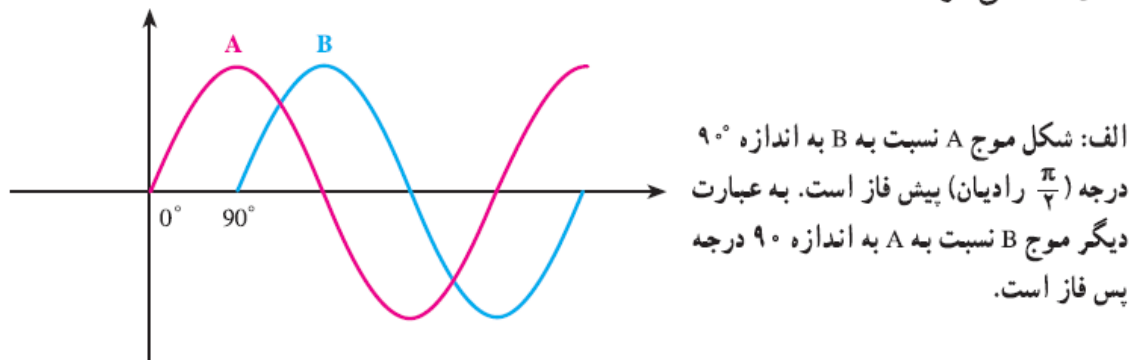


(a) موج A با B به اندازه ۴۵ درجه فاصله دارد.

۱- Average-(ave)

۲- Phase

۱- اختلاف فاز: برای تعیین میزان اختلاف فاز بین دو شکل موج هم فرکانس ابتدا دو نقطه مشابه (نقطه صفر - نقطه ماکزیمم یا نقطه مینیمم) از شکل موج‌ها را بر حسب کمیت محور افقی با یکدیگر مقایسه می‌کنیم و سپس مقدار آن را با ذکر کلمه پسوند «فاز» می‌نویسیم. مثلاً در صورتی که شکل موجی از موج دیگر جلوتر (زودتر) شروع شده باشد اصطلاح «پیش فاز»^۱ و در صورتی که عقب‌تر (دیرتر) شروع شده باشد کلمه «پس فاز»^۲ و چنانچه دو شکل کاملاً مشابه باشند کلمه «هم فاز» را به کار می‌بریم (شکل زیر). در برخی موارد میزان اختلاف فاز بر حسب درجه یا ضریبی از عدد π نشان داده می‌شود.

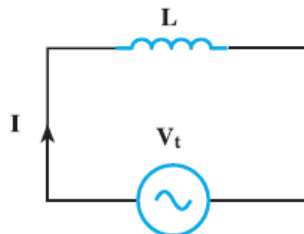


۱- Leads

۲- Lags

بررسی مدارهای سلفی (L)

به خاصیت خودالقایی که در اثر عبور جریان در یک سیم پیچ پدید می آید ضریب خودالقایی یا اندوکتانس (L) می گویند. هرگاه یک سلف ایده آل (بدون خاصیت اهمی) مطابق شکل مقابل اتصال یابد:

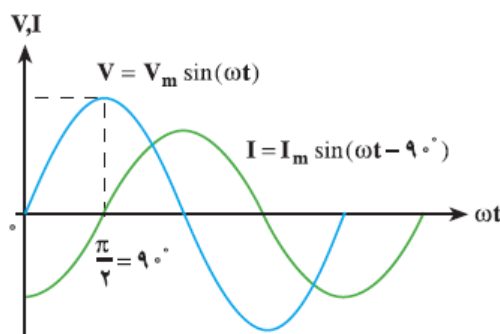


$$V_t = V_m \sin(\omega t)$$

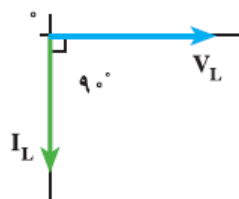
$$I_t = I_m \sin(\omega t - 90^\circ)$$

$$X_L = L\omega = 2\pi fL = \frac{V_m}{I_m} = \frac{V_e}{I_e}$$

الف: معادلات ولتاژ و جریان و راکتانس سلفی



ب: شکل موج های ولتاژ و جریان سلف



ج: دیاگرام برداری V و I در یک سلف ایده آل

جریان در سلف ۹۰ درجه از ولتاژ عقب تر است.

– سلف ها در جریان متناوب راکتانس القایی نشان می دهند که به ضریب خودالقایی (L) و فرکانس جریان (f) بستگی دارد و با X_L نشان می دهند.

– یک سلف حقیقی در جریان dc مقاومت اهمی و در جریان متناوب علاوه بر مقاومت اهمی مقاومت القایی نیز نشان می دهد.

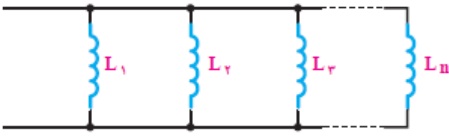
– جریان سلف های حقیقی در مدارهای dc پس از ۵ ثابت زمانی به حالت پایدار در می آید.

– در هر ثابت زمانی سلفی جریان سلف به اندازه ۶۳/۲٪ مقدار ماکزیمم خود افزایش یا کاهش می یابد، مدت زمان هر ثابت زمانی سلفی از رابطه $\tau = \frac{L}{R}$ محاسبه می شود.

– عبور جریان از داخل سلف سبب می شود در سلف به اندازه $W_L = \frac{1}{2} LI^2$ ژول انرژی به صورت میدان مغناطیسی ذخیره شود.

ویژگی های مدارهای سلفی

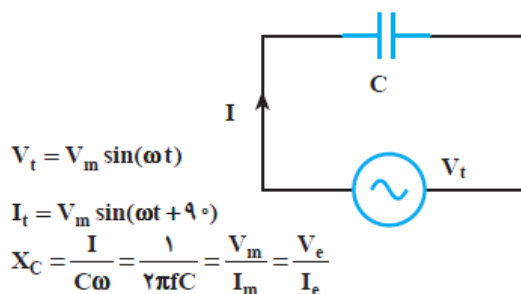
تمامی خصوصیات ولتاژی و جریانی مدارهای سلفی سری و موازی در جریان متناوب مشابه مدارهای سری و موازی مقاومتی است فقط دو عامل ضریب خودالقایی و راکتانس وجود دارند که در محاسبه آنها به نکات زیر باید توجه کرد.

موازی	سری	
		
$L_T = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_n}}$	$L_T = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n$	اندوکتانس معادل L_T
$X_{L_T} = \frac{1}{\frac{1}{X_{L_1}} + \frac{1}{X_{L_2}} + \frac{1}{X_{L_3}} + \dots + \frac{1}{X_{L_n}}}$ $X_{L_T} = L_T \cdot \omega$	$X_{L_T} = X_{L_1} + X_{L_2} + X_{L_3} + \dots + X_{L_n}$ $X_{L_T} = L_T \cdot \omega$	راکتانس معادل X_{L_T}

بررسی مدارهای خازنی (C)

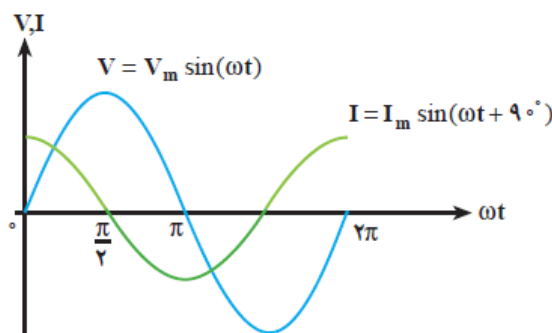
– نسبت بار ذخیره شده به اختلاف ولتاژ
دو صفحه خازن را ظرفیت خازن یا کاپاسیتانس (C) گویند.

هر گاه یک خازن ایده آل (بدون خاصیت اهمی) مطابق شکل مقابل اتصال یابد:

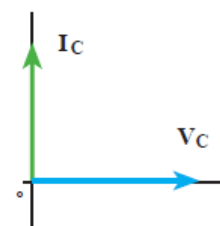


الف: معادلات ولتاژ و جریان و راکتانس خازنی

جریان در خازن 90° درجه از ولتاژ جلوتر است.



ب: شکل موج های ولتاژ و جریان خازن

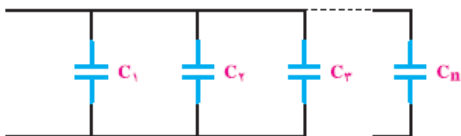


ج: دیاگرام برداری V و I در یک خازن ایده آل

- خازن‌ها در جریان متناوب راکتانس خازنی نشان می‌دهند که به ظرفیت خازن (C) و فرکانس جریان (f) بستگی دارد و با X_C نشان می‌دهند.
- یک خازن حقیقی در جریان dc مقاومت اهمی و در جریان متناوب علاوه بر مقاومت اهمی مقاومت خازنی نیز نشان می‌دهد.
- ولتاژ خازن‌های حقیقی در مدارهای dc پس از ۵ ثابت زمانی به حالت پایدار درمی‌آید.
- در هر ثابت زمانی خازنی ولتاژ خازن به اندازه ۶۳/۲٪ مقدار ماکزیمم خود افزایش یا کاهش می‌یابد، مدت زمان هر ثابت زمانی خازنی از رابطه $\tau = R.C$ محاسبه می‌شود.
- اعمال ولتاژ به یک خازن سبب می‌شود در خازن به اندازه $W_C = \frac{1}{2}CV^2$ ژول انرژی به صورت میدان الکترواستاتیکی ذخیره شود.

ویژگی‌های مدارهای خازنی

تمامی خصوصیات ولتاژی و جریانی مدارهای خازنی سری و موازی در جریان متناوب مشابه مدارهای سری و موازی مقاومتی است. فقط از نظر محاسبه دو عامل ظرفیت خازنی و راکتانس با یکدیگر تفاوت دارند که در محاسبه آن‌ها به نکات زیر باید توجه کرد:

موازی	سری	
		
$C_T = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n$	$C_T = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}}$	ظرفیت معادل C_T
$X_{C_T} = \frac{1}{\frac{1}{X_{C_1}} + \frac{1}{X_{C_2}} + \frac{1}{X_{C_3}} + \dots + \frac{1}{X_{C_n}}}$ $X_{C_T} = \frac{1}{C_T \omega}$	$X_{C_T} = X_{C_1} + X_{C_2} + X_{C_3} + \dots + X_{C_n}$ $X_{C_T} = \frac{1}{C_T \omega}$	راکتانس معادل X_{C_T}

مدارهای الکتریکی جلسه ۲

- ۱- مفهوم تحلیل مدارهای الکتریکی را بیان کند.
- ۲- عناصر فعال و غیرفعال مدار را تعریف کند و مشخصات آن‌ها را شرح دهد.
- ۳- مدارهای جریان مستقیم را به روش جریان حلقه حل کند.
- ۴- مدارهای جریان مستقیم را به روش پتانسیل گره حل کند.
- ۵- مدارهای جریان مستقیم را به روش اصل جمع آثار تحلیل کند.
- ۶- منابع ولتاژ و جریان را به یک‌دیگر تبدیل کند.
- ۷- معادل تونن و نورتن مدارهای جریان مستقیم را به دست آورد.
- ۸- شرایط انتقال ماکزیمم توان را به بار شرح دهد و ماکزیمم توان انتقالی را محاسبه کند.
- ۹- رفتار سلف و خازن را در جریان dc در حالت ماندگار بیان کند.

۲-۱- عناصر مدار

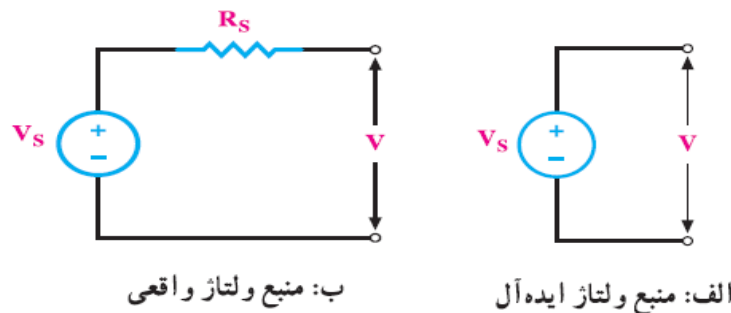
به طور کلی عناصر مدار را می‌توان به دو گروه عناصر فعال و عناصر غیرفعال تقسیم کرد.

عناصر غیرفعال: عناصری هستند که انرژی الکتریکی را مصرف (به عبارت دیگر تبدیل) می‌کنند یا آن را در خود ذخیره می‌سازند. این عناصر عبارت‌اند از: مقاومت‌های اهمی، سلف‌ها و خازن‌ها.

مقاومت اهمی: عنصری است که جریان آن با ولتاژ دوسر آن متناسب است.
سلف: عنصری است که ولتاژ دوسر آن با تغییرات جریان نسبت به زمان در آن متناسب است.
خازن: عنصری است که جریان آن با تغییرات ولتاژ دوسرش نسبت به زمان متناسب است.
 البته با توجه به این که سلف در جریان مستقیم اتصال کوتاه و خازن در جریان مستقیم به صورت یک مدار باز عمل می‌کند، مدارهایی که در این فصل مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند بیش‌تر دارای مقاومت‌های اهمی هستند.

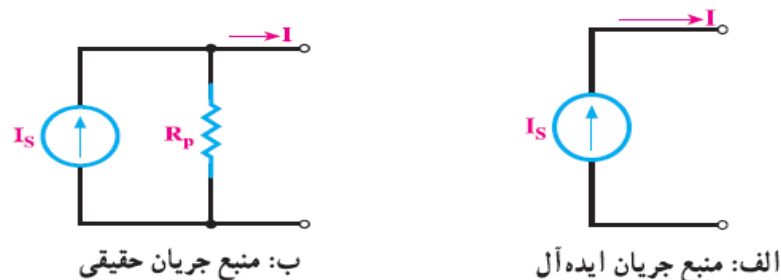
عناصر فعال: به عناصری گفته می‌شود که انرژی مدار را تأمین می‌کنند. این عناصر عبارت‌اند از: منابع ولتاژ و منابع جریان. هریک از این عناصر فعال به دو گروه ایده‌آل و حقیقی تقسیم می‌شوند.

منبع ولتاژ ایده‌آل: منبعی است که در بارهای مختلف ولتاژ ثابتی به مدار می‌دهد.
منبع ولتاژ حقیقی: منبعی است که با افزایش جریان بار (کاهش مقاومت مدار)، ولتاژ خروجی آن کاهش می‌یابد. منبع ولتاژ حقیقی را می‌توان منبع ولتاژ ایده‌آلی دانست که یک مقاومت اهمی کوچک با آن سری شده است. منابع تغذیه در صنعت منابع ولتاژ حقیقی هستند و منابع ایده‌آل وجود خارجی ندارند ولی با تقریب می‌توان منابع ولتاژ با انرژی بسیار بزرگ را ایده‌آل فرض کرد (شکل ۱-۱).

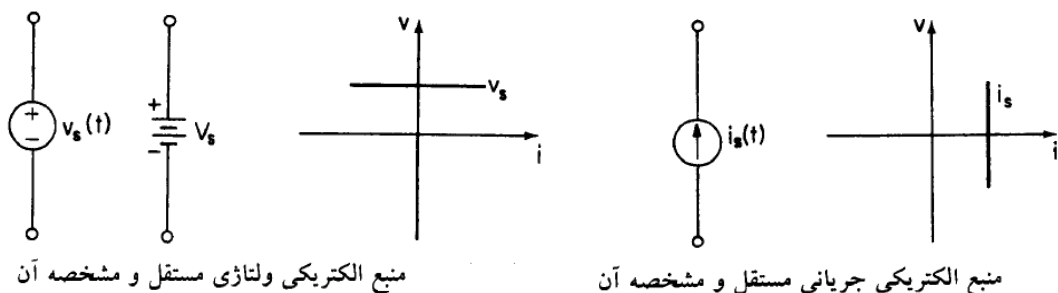


شکل ۱-۱

منابع جریان ایده‌آل: منابعی هستند که در بارهای مختلف جریان ثابتی به مدار می‌دهند. به عبارت دیگر، اگر مقاومت بار تغییر کند ولتاژ آن تغییر می‌کند ولی جریان آن ثابت می‌ماند. منابع جریان بیش‌تر در مدارهای الکترونیکی دیده می‌شوند و به صورت ایده‌آل وجود ندارند.
منابع جریان واقعی: منابع جریان ایده‌آلی هستند که با یک مقاومت بزرگ اهمی به صورت موازی قرار گرفته‌اند. در نتیجه، در صورت تغییر بار با توجه به ثابت بودن جریان منبع، جریان در مصرف‌کننده قدری تغییر می‌کند (شکل ۱-۲).



شکل ۱-۲



توجه: مقاومت موازی با منبع ولتاژ و مقاومت سری با منبع جریان تاثیری در خروجی ندارد

$$G = \frac{1}{R}$$

توجه:

به مقدار R ، مقاومت الکتریکی و به G رسانایی می گویند.

۳-۱- تحلیل مدار به روش جریان حلقه

برای تحلیل مدار به روش جریان حلقه، از قانون ولتاژهای کیرشهف^۱ (K.V.L) استفاده می شود. بدین منظور، مراحل زیر را طی می کنیم.

مرحله ۱ در صورت نیاز و به طوری که پارامترهای مجهول مدار از بین نروند ابتدا مدار را تا حد ممکن ساده می کنیم.

مرحله ۲ برای هر حلقه، یک جریان در جهت دلخواه منظور می کنیم. برای سادگی کار و کم تر شدن اشتباهات، بهتر است جریان همه ی حلقه ها را در یک جهت فرض کنیم. ما در این قسمت، جریان حلقه ها را در جهت حرکت عقربه های ساعت فرض می کنیم.

مرحله ۳ با حرکت در جهت جریان انتخابی در هر حلقه، با استفاده از قانون ولتاژهای کیرشهف (K.V.L) معادله ی ولتاژها را برای هر حلقه می نویسیم. (نقطه شروع حرکت مهم نیست)

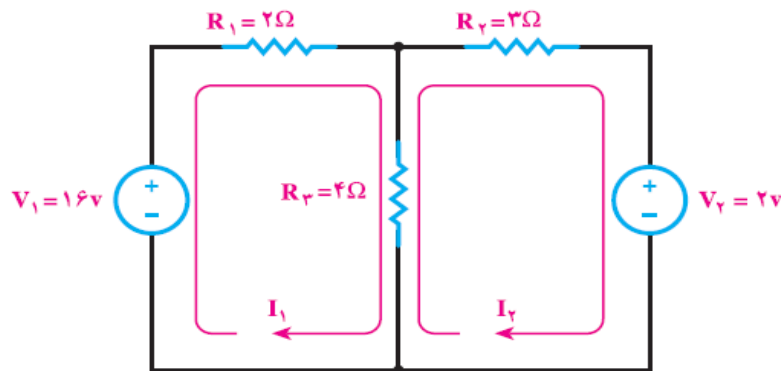
مرحله ۴ در هنگام حرکت در یک حلقه اگر به عنصری رسیدیم که با حلقه ی دیگری مشترک است، جریان آن عنصر از جمع جبری جریان دو حلقه ی طرفین آن به دست می آید.

مرحله ۵ با توجه به این که در مصرف کننده ها جریان به پلاریته ی مثبت وارد می شود و ما در هنگام نوشتن معادلات در جهت جریان حرکت می کنیم، پس ولتاژ همه ی مصرف کننده ها مثبت است. طبیعی است که ولتاژ منابع تغذیه با توجه به پلاریته ی آن ها در معادلات نوشته می شود؛ یعنی، اگر در جهت حرکت به مثبت منبع برسیم، ولتاژ آن را با علامت مثبت و اگر به منفی منبع برسیم، ولتاژ آن را با علامت منفی در معادله منظور می کنیم.

مرحله ۶ در این روش به تعداد حلقه های انتخاب شده در مدار، معادله تشکیل می دهیم. پس n معادله با n مجهول به دست می آید. مجهولات؛ جریان های حلقه ها هستند و با حل معادله ها جریان ها به دست می آیند در نتیجه، ولتاژها و توان های تمامی عناصر مدار محاسبه خواهد شد.

^۱ — Kirchhoff Voltage Law

مثال ۱: در مدار شکل ۱-۳ توان هر یک از مقاومت‌های مدار را حساب کنید.



شکل ۱-۳

راه حل:

الف: برای هر حلقه جریانی را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت منظور می‌کنیم و از یک نقطه در هر حلقه حرکت می‌کنیم و معادلات K.V.L. را می‌نویسیم.

حلقه ۱ KVL $R_1 I_1 + R_3 (I_1 - I_2) - V_1 = 0$

$$\rightarrow 2I_1 + 4(I_1 - I_2) - 16 = 0$$

حلقه ۲ KVL $R_2 I_2 + V_2 + R_3 (I_2 - I_1) = 0$

$$\rightarrow 3I_2 + 2 + 4(I_2 - I_1) = 0$$

ب: معادله‌ها را مرتب کرده و حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} 6I_1 - 4I_2 = 16 \\ 3[-4I_1 + 7I_2] = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12I_1 - 8I_2 = 32 \\ -12I_1 + 21I_2 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 13I_2 = 26 & I_2 = 2A \end{matrix}$$

$$6I_1 - 4 \times 2 = 16 \Rightarrow 6I_1 = 24 \Rightarrow I_1 = 4A$$

پ: برای محاسبه توان هر یک از مقاومت‌ها باید ابتدا جریان‌های هر مقاومت را محاسبه و سپس توان‌ها را به صورت زیر به دست آورد.

$$I_{R_1} = I_1 = 4A$$

$$\Rightarrow I_{R_3} = I_3 = I_1 - I_2 = 4 - 2 = 2A$$

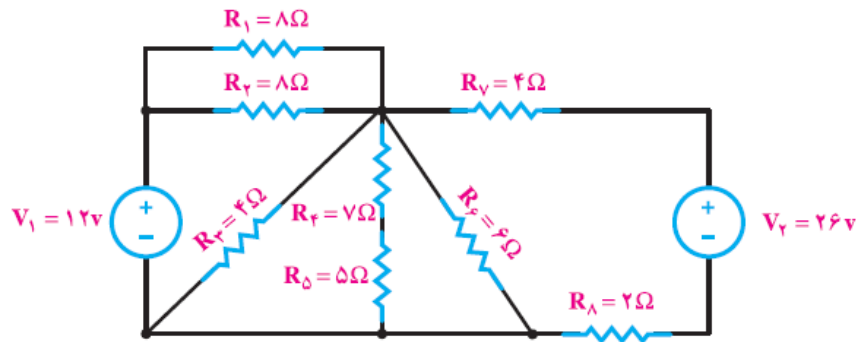
$$I_{R_2} = I_2 = 2A$$

$$P_{R_1} = R_1 \cdot I_1^2 = 2 \times (4)^2 = 32 \text{ W}$$

$$P_{R_2} = R_2 \cdot I_2^2 = 3 \times (2)^2 = 12 \text{ W}$$

$$P_{R_3} = R_3 \cdot I_3^2 = 4 \times (2)^2 = 16 \text{ W}$$

مثال ۲: در مدار شکل ۱-۴ توانی را که هر منبع به مدار می‌دهد حساب کنید.



شکل ۱-۴

حل: در این مدار چون تعداد مقاومت‌ها زیاد است و امکان ساده‌سازی را نیز دارد به همین دلیل ابتدا مدار را بر پایه‌ی قواعد سری و موازی تا حد امکان ساده می‌کنیم.

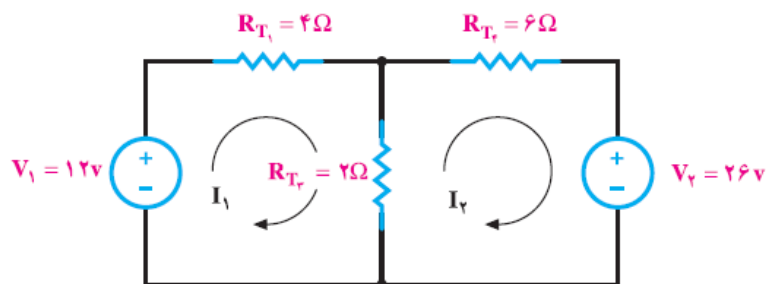
$$R_{T1} = R_1 \parallel R_2 = \frac{8 \times 8}{8 + 8} = \frac{64}{16} = 4\Omega$$

$$R_{T2} = R_3 + R_5 = 7 + 5 = 12\Omega$$

$$R_{T3} = R_4 \parallel R_{T2} \parallel R_6 = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6}} = \frac{1}{\frac{3+1+2}{12}} = \frac{12}{6} = 2\Omega$$

$$R_{T4} = R_7 + R_8 = 4 + 2 = 6\Omega$$

شکل مدار پس از ساده‌سازی به صورت شکل زیر است.



با کمی دقت مشاهده می‌شود شکل مدار به دست آمده مشابه شکل ۱-۳ شده به همین خاطر

بقیه‌ی مراحل را مطابق مثال قبل عمل می‌کنیم.

$$\begin{cases} \text{معادله‌ی حلقه‌ی ۱} & \begin{cases} R_{T1} \cdot I_1 + R_{T3} (I_1 - I_2) - V_1 = 0 \\ R_{T4} I_2 + V_2 + R_{T3} (I_2 - I_1) = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4I_1 + 2(I_1 - I_2) - 12 = 0 \\ 6I_2 + 26 + 2(I_2 - I_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6I_1 - 2I_2 = 12 \\ -2I_1 + 8I_2 = -26 \end{cases}$$

پس از مرتب‌سازی معادلات و حل دستگاه داریم:

$$I_1 = 1A \text{ و } I_2 = -3A$$

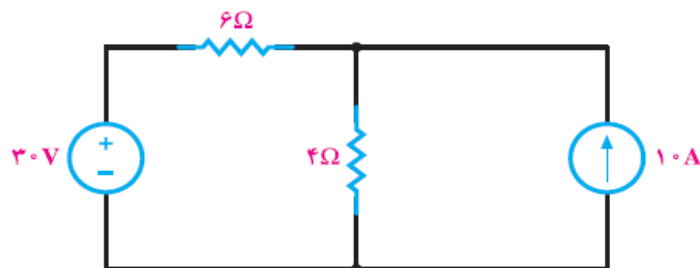
علامت منفی جریان I_2 نشان دهنده آن است که جهت انتخابی برای حلقه خلاف جهت واقعی فرض شده است.

برای محاسبه‌ی توان هر منبع باید به جهت جریان توجه داشت. چرا که براساس آن می‌توان مقدار و نوع توان را تعیین نمود. هرگاه جهت جریان به قطب مثبت منبع وارد شود علامت ولتاژ در رابطه $P = V.I$ را مثبت و در صورتی که به قطب منفی وارد شود علامت آن را منفی منظور می‌کنیم. چنانچه حاصل توان منفی باشد یعنی، مولد به شبکه توان می‌دهد و اگر توان مثبت شد، یعنی، مولد، خود مصرف‌کننده شده است.

$$P_{V_1} = V_1 \cdot I_1 = (-12) \times 1 = -12 \text{ W}$$

$$P_{V_2} = V_2 \cdot I_2 = 26 \times (-3) = -78 \text{ W}$$

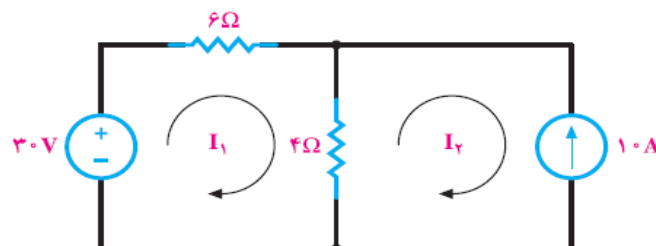
پس معلوم می‌شود که منبع ۱۲ ولت، ۱۲ وات و منبع ۲۶ ولت، ۷۸ وات توان به مدار می‌دهد در نتیجه، مشخص است که مقاومت‌های موجود در مدار در مجموع ۹۰ وات توان مصرف می‌کنند. **مثال ۳:** توان مصرفی در مقاومت ۴ اهم را در شکل ۱-۵ به روش جریان حلقه محاسبه کنید.



شکل ۱-۵

راه حل:

الف: ابتدا جریان حلقه‌ها را تعیین می‌کنیم (شکل ۱-۶).



شکل ۱-۶

ب: سپس معادلات حلقه‌ها را می‌نویسیم. در حلقه‌ی دوم چون منبع جریان قرار دارد پس می‌توان به راحتی و بدون نوشتن معادله‌ی KVL جریان شاخه‌ی سمت راست مدار یعنی جریان حلقه‌ی دوم را برابر 10 A آمپر در نظر گرفت. اما چون جهت جریان فرض شده برای حلقه‌ی دوم با جهت منبع جریان مخالف است باید I_2 را به صورت $I_2 = -10\text{ A}$ در نظر گرفت. پس کافی است معادله‌ی K.V.L. را برای حلقه‌ی اول بنویسیم و آن را حل کنیم تا جریان I_1 را به دست آوریم.

$$\text{KVL در حلقه‌ی ۱} \quad 6I_1 + 4(I_1 - I_2) - 30 = 0 \quad I_2 = -10\text{ A}$$

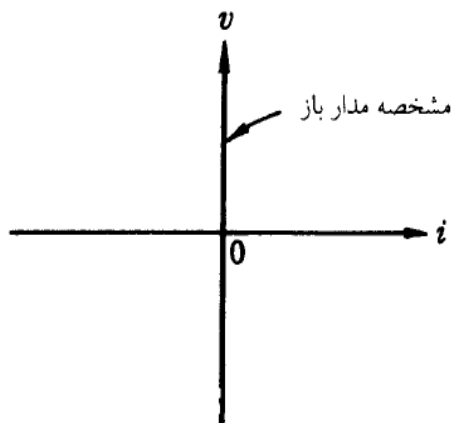
$$6I_1 + 4(I_1 + 10) - 30 = 0 \rightarrow 10I_1 = -10 \rightarrow I_1 = -1\text{ A}$$

پ: جریان مقاومت 4Ω برابر است با:

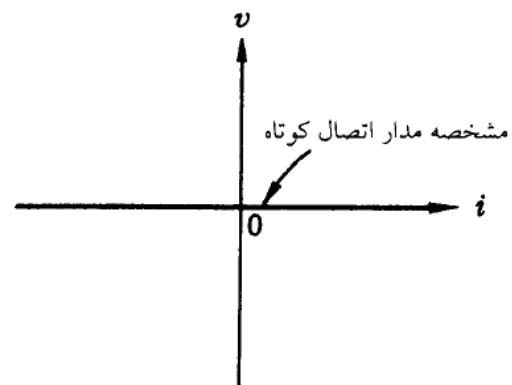
$$I_{4\Omega} = I_1 - I_2 = -1 - (-10) = 9\text{ A}$$

ت: توان در مقاومت 4Ω نیز برابر است با:

$$P_{4\Omega} = 4 \times (9)^2 = 324\text{ W}$$



مشخصه $v-i$ یک عنصر مدار باز



مشخصه $v-i$ یک عنصر مدار اتصال کوتاه

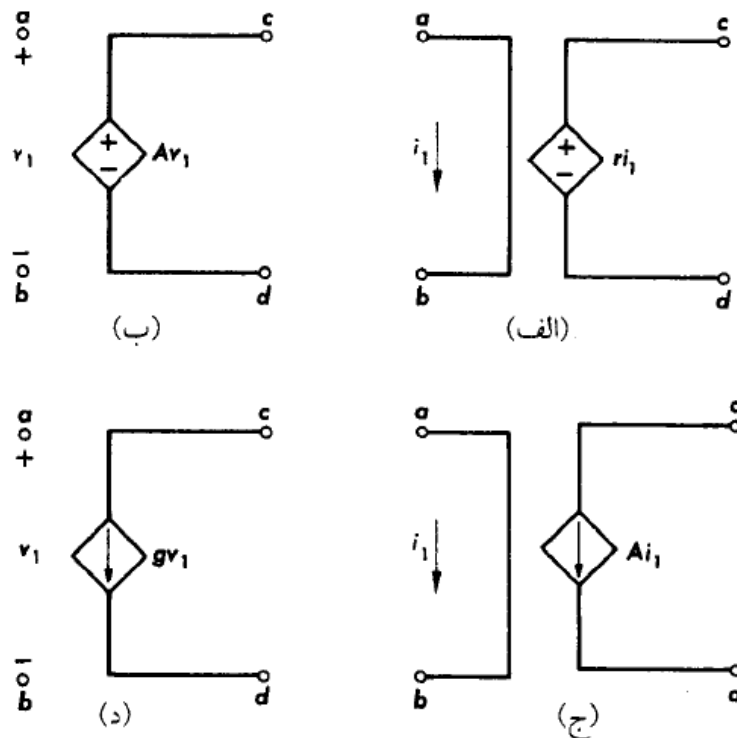
توجه: در مدار باز جریان صفر است و در مدار اتصال کوتاه ولتاژ صفر است

¹- Open Circuit

²- Short Circuit

۲-۳-۲- منابع الکتریکی وابسته

دسته دیگری از منابع الکتریکی که در مدارها به طور گسترده‌ای استفاده می‌شوند، منابع الکتریکی وابسته می‌باشند. خصوصیات اصلی این منابع آن است که ولتاژ یا جریان تولیدی آنان به جریان یا ولتاژ عنصر دیگری از مدار، وابسته می‌باشند. به همین خاطر، نام دیگر این منابع وابسته را منابع کنترل‌شونده نیز می‌گویند. شکل (۲-۸) چهار نوع این منابع را نشان می‌دهد. عناصر قرار گرفته در سرهای a و b ، بیانگر متغیر کنترل‌کننده می‌باشند و عناصر قرار گرفته در سرهای c و d ، نشان‌دهنده متغیر کنترل‌شونده (که ولتاژ یا جریان خروجی



چهار نوع منبع الکتریکی وابسته

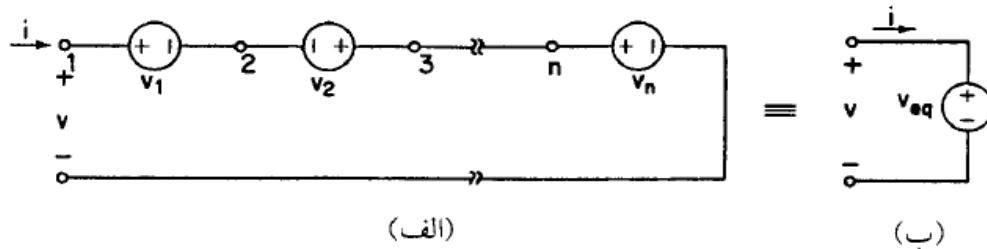
منبع است) می‌باشد. بر این اساس، شکل‌های (الف و ب) بترتیب منبع ولتاژی وابسته به جریان و منبع ولتاژی وابسته به ولتاژ را نشان می‌دهد. همچنین در شکل‌های (ج و د) بترتیب منبع جریانی وابسته به جریان و منبع جریانی وابسته به ولتاژ مشخص شده است. لازم به ذکر است که این نوع منابع، به صورت منابع وابسته ایده‌آل می‌باشند.

برای مشخص شدن نحوه عملکرد این نوع منابع، یکی از آنها را بررسی می‌کنیم. به عنوان نمونه در شکل (۲-۸-الف) اگر جریان عنصر موردنظر (که همان $i_1(t)$ است) تغییر کند، آنگاه ولتاژ منبع وابسته به مقدار r برابر جریان $i_1(t)$ (یعنی $r \cdot i_1(t)$) تغییر می‌کند. این موضوع را می‌توان برای شکل‌های (ب) تا (د) نیز به شکل مناسب بیان نمود.

مفاهیم سری و موازی منابع الکتریکی

در این بخش می‌خواهیم نحوه معادل‌سازی سری و موازی منابع ولتاژ و جریان را بیان نماییم. مشابه شکل (۱۶-۲) فرض کنید که n منبع ولتاژی با مقادیر v_1 تا v_n با هم سری شده باشند؛ به این معنی که جریان عبوری از تمام منابع، یکسان است. حال با استفاده از قانون KVL به این نتیجه می‌رسیم که برای معادل‌سازی این n منبع با یک منبع معادل با ولتاژ $v_{eq}(t)$ خواهیم داشت:

$$v_{eq}(t) = \sum_{i=1}^n v_i(t) = v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_n(t)$$

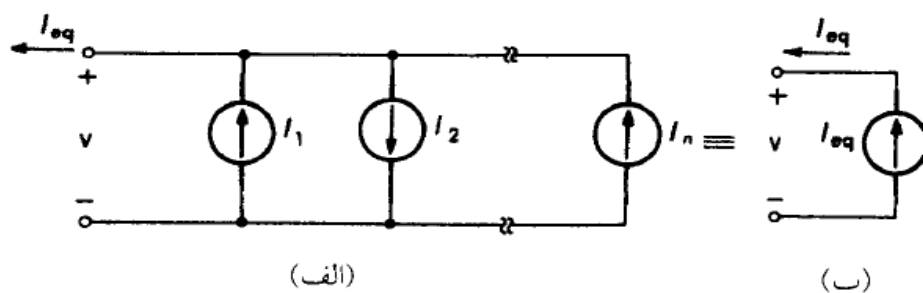


شکل (۱۶-۲): الف) اتصال سری n منبع ولتاژ؛ ب) منبع ولتاژ معادل

لازم به ذکر است که اپراتور $\sum$ به معنای جمع جبری است و در صورتی که در یک نقطه از اتصال منابع، پلاریته‌های (قطب‌های) همنام به هم وصل شوند، باید ولتاژ دو منبع متوالی موردنظر از هم کم شوند. این موضوع را می‌توان برای موازی بودن n منبع جریان نیز ارائه نمود. بدین منظور شکل (۱۷-۲) را در نظر بگیرید که با استفاده از قانون KCL و به منظور معادل‌سازی این n منبع با یک منبع جریان $I_{eq}(t)$ خواهیم داشت:

$$I_{eq}(t) = \sum_{i=1}^n I_i(t) = I_1(t) + I_2(t) + \dots + I_n(t) \quad (۱۷-۲)$$

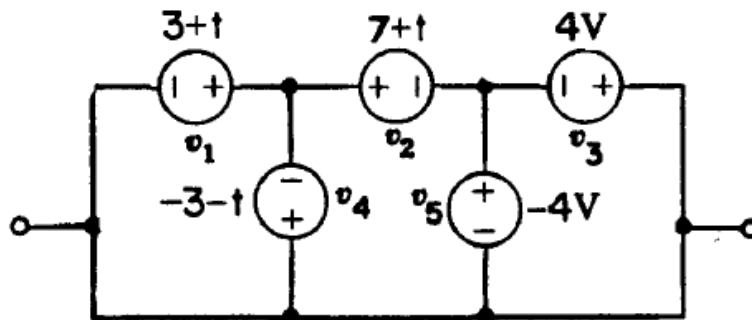
لازم به ذکر است در صورتی که n منبع ایده‌آل ولتاژی به طور موازی با هم قرار گیرند حتماً باید ولتاژ آنان با هم مساوی باشند و در نتیجه، منبع ولتاژ معادل این n منبع، یک منبع ولتاژ با مقدار مساوی و مشابه n منبع خواهد بود. در غیر این صورت، اتصال موازی n منبع ایده‌آل ولتاژی با مقادیر مختلف ولتاژی و اتصال سری n منبع ایده‌آل جریانی با جریان‌های متفاوت تعریف نشده است.



شکل (۱۷-۲): الف) اتصال موازی n منبع جریان؛ ب) منبع جریان معادل

مثال (۲-۳): در شکل (۲-۱۸) اتصال پنج منبع ولتاژی را با هم نشان می‌دهد. منبع ولتاژ معادل را بیابید.

حل: برای یافتن منبع معادل ولتاژی، باید قانون KVL را برای یک مسیر دلخواه بین نقاط ابتدا و انتهای مدار بنویسیم. بدین منظور اگر قانون KVL را از طریق منابع ۱، ۲ و ۳ بنویسیم خواهیم داشت:



شکل (۲-۱۸): اتصال سری و موازی منابع ولتاژی

$$v_{eq}(t) = -(3+t) + (7+t) - (4) = 0V$$

حال اگر مسیر حلقه را از طریق منابع ۱، ۲ و ۵ بنویسیم داریم:

$$v_{eq}(t) = -(3+t) + (7+t) + (-4) = 0V$$

همچنین اگر مسیر حلقه را از طریق منابع ۱، ۴، ۵ و ۳ بنویسیم، نتیجه می‌گیریم که:

$$v_{eq}(t) = -(3+t) - (-3-t) - (-4) - (4) = 0V$$

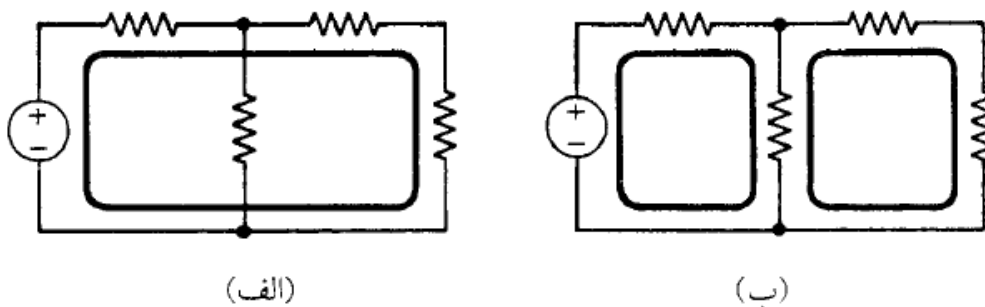
بنابراین، منبع معادل بین دو سر ابتدایی و انتهایی، برابر صفر است.

۲-۳- روش تحلیل مش

در این بخش برآنیم تا اصول تحلیل مدارهای الکتریکی را بر اساس روش مش بیان نماییم. برای درک این روش، ابتدا تحلیل یک مدار با دو مش را آغاز کرده و سپس روش ارائه شده را به مدارهای جامع‌تر و با مش‌های بیشتری گسترش خواهیم داد.

۳-۲-۱- معادلات مش برای مدارهای ساده

در فصل اول، برای پیاده‌سازی قانون KVL مفهوم حلقه را بیان نمودیم که هر حلقه از عناصری تشکیل شده‌اند که در نهایت، یک مسیر بسته را ایجاد می‌کردند. حال در اینجا با مفهوم خاصی به نام مش آشنا می‌شویم. یک مش، حلقه‌ای خواهد بود که آن حلقه، هیچ شاخه‌ای را محصور نکرده باشد. به عنوان مثال، در شکل (۳-۱-الف) حلقه در نظر گرفته شده، مش نمی‌باشد؛ زیرا حلقه مورد نظر، شاخه وسطی را محصور کرده است. اما در شکل (۳-۱-ب) دو حلقه در نظر گرفته شده، دو مش می‌باشد، زیرا هر دو حلقه، هیچ شاخه‌ای را محصور نکرده است. به این حلقه‌ها، حلقه‌های اساسی مدار می‌گویند.



شکل (۳-۱): مثالی ساده برای مفهوم حلقه و مش؛ (الف) حلقه؛ (ب) مش

برای بیان اصول کلی روش مش، مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۳-۲-الف) را در نظر بگیرید که در این شکل، برای هر عنصر مقاومت، جریان و ولتاژی در نظر گرفته می‌شود که بر اساس مشخصه $v-i$ برای این سه مقاومت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} v_{R1}(t) &= R_1 \cdot i_{R1}(t) \\ v_{R2}(t) &= R_2 \cdot i_{R2}(t) \end{aligned} \quad (1-3)$$

$$v_{R3}(t) = R_3 \cdot i_{R3}(t)$$

حال برای این مدار بر اساس شکل (۳-۲-ب) دو مش در نظر می‌گیریم. سپس برای هر مش، معادله KVL را بر اساس متغیرهای شکل (۳-۲-الف) می‌نویسیم. لذا،

$$v_{s1}(t) = v_{R1}(t) + v_{R3}(t) \quad (2-3)$$

$$-v_{s2}(t) = v_{R2}(t) - v_{R3}(t) \quad (3-3)$$

با کاربرد روابط (۱-۳) در معادلات (۲-۳) و (۳-۳) می‌توان نوشت:

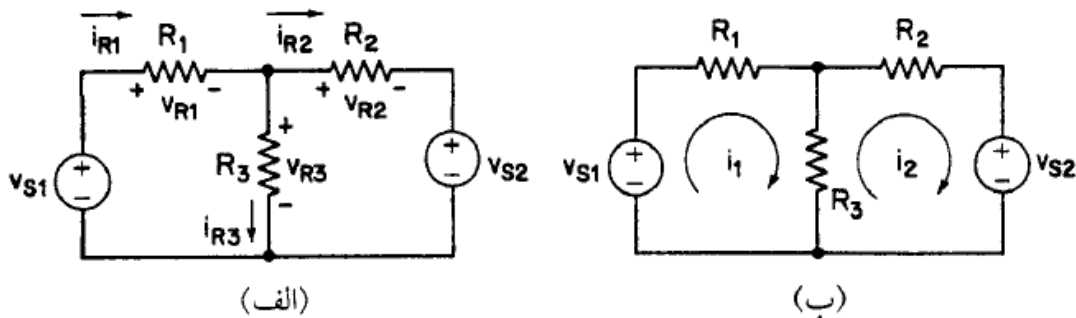
$$v_{s1}(t) = R_1 \cdot i_{R1}(t) + R_3 \cdot i_{R3}(t) \quad (4-3)$$

$$-v_{s2}(t) = R_2 \cdot i_{R2}(t) - R_3 \cdot i_{R3}(t) \quad (5-3)$$

در مرحله بعدی روش تحلیل مش، برای هر مش، یک جریان در جهت عقربه‌های ساعت در نظر می‌گیریم که در شکل (۳-۲-ب) با دو جریان مش i_1 و i_2 می‌باشد. با مقایسه این

دو جریان مش در شکل (۲-۳-ب) با جریان‌های ارائه شده در شکل (۲-۳-الف) نتیجه می‌گیریم که،

$$\begin{aligned} i_{R1}(t) &= i_1(t) \\ i_{R2}(t) &= i_2(t) \\ i_{R3}(t) &= i_1(t) - i_2(t) \end{aligned} \quad (۶-۳)$$



شکل (۲-۳): یک مدار الکتریکی با دو حلقه؛ (الف) بر اساس جریان شاخه‌ها؛
(ب) بر اساس جریان مش‌ها

با استفاده از مجموعه روابط (۶-۳) در دو معادله (۴-۳) و (۵-۳) خواهیم داشت:

$$v_{s1}(t) = (R_1 + R_3) \cdot i_1(t) - R_3 \cdot i_2(t) \quad (۷-۳)$$

$$-v_{s2}(t) = -R_3 \cdot i_1(t) + (R_2 + R_3) \cdot i_2(t) \quad (۸-۳)$$

دو معادله اخیر، به دو معادله اساسی روش تحلیل مش معروف است. با کمی دقت در این دو معادله به نکات جامعی دسترسی پیدا می‌کنیم که با استفاده از آنها می‌توان به راحتی معادلات مش را بیان نمود. این نکات عبارتند از:

۱- منابع ولتاژی که جریان تولیدی آنان در جهت جریان حلقه باشند، با علامت مثبت در سمت چپ معادله آورده می‌شود. مثلاً در حلقه دوم، منبع $v_{s2}(t)$ ، جریانی در جهت خلاف جهت جریان حلقه $i_2(t)$ ارسال می‌کند. لذا به صورت علامت منفی در معادله دوم آورده شده است.

۲- در معادله اول، جمله $(R_1 + R_3) \cdot i_1(t)$ بیانگر افت ولتاژ کل مقاومت‌های مسیر حلقه موردنظر می‌باشد. در حلقه دوم نیز دو مقاومت R_2 و R_3 وجود دارد. پس یک جمله $(R_2 + R_3) \cdot i_2(t)$ در سمت راست معادله دوم وارد می‌شود.

۳- در مقاومت‌هایی که جریان عبوری از آنان فقط جریان همان مش نباشد و جریان مش‌های دیگر نیز از آن مقاومت عبور می‌کند، باید افت ولتاژ روی آن مقاومت ناشی از جریان مش دیگر را وارد آن معادله کرد. اگر جهت جریان مش دیگر، هم جهت با جریان مش موردنظر باشد، ولتاژ با علامت مثبت وارد شده و در غیر این صورت با علامت منفی

می‌آید. مثلاً در معادله (۷-۳) که در ارتباط با معادله مش در حلقه اول است، جمله $R_3 \cdot i_2(t)$ با علامت منفی وارد می‌شود؛ چون مقاومت R_3 علاوه بر جریان مش اول (یعنی $i_1(t)$) جریان مش دوم (یعنی $i_2(t)$) در خلاف جهت $i_1(t)$ از آن عبور می‌کند. لذا جمله $-R_3 \cdot i_2(t)$ در سمت راست معادله آورده می‌شود. همین موضوع را می‌توان برای جمله $-R_3 \cdot i_1(t)$ برای معادله مش در حلقه دوم نیز بیان نمود. برای سادگی در نمایش معادلات مش، دو معادله (۷-۳) و (۸-۳) را می‌توان به شکل نمایش ماتریسی نیز بیان نمود:

$$\begin{bmatrix} v_{s1}(t) \\ -v_{s2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} \quad (9-3)$$

$$\mathbf{V}_s(t) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{i}(t)$$

برای تعیین جریان‌های i_1 و i_2 مربوط به دو مش، روش‌های مختلفی وجود دارد که در ضمیمه (الف) اشاره شده است. یکی از مناسب‌ترین این روش‌ها، روش کرامر است. بر اساس این روش، برای تعیین جریان i_1 کافی است که با جایگذاری بردار $\mathbf{V}_s(t)$ از معادله (۹-۳) در ستون اول ماتریس ضرایب $\mathbf{R}$ و تعیین دترمینان آن و تقسیم دترمینان حاصل شده بر دترمینان ماتریس ضرایب $\mathbf{R}$ ، جریان i_1 به دست می‌آید. یعنی،

$$i_1(t) = \frac{\begin{vmatrix} v_{s1}(t) & -R_3 \\ -v_{s2}(t) & R_2 + R_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}}$$

این موضوع را برای جریان i_2 نیز می‌توان بیان نمود. در نهایت پس از محاسبه جریان مش‌ها و با استفاده از روابط (۶-۳) قادر هستیم تا جریان تمام شاخه‌ها و عناصر مدار را به دست آورده و سپس ولتاژ دو سر تمام عناصر و دیگر پارامترهای هر عنصر را بیابیم.

توجه: چون باتری‌ها به طرف دیگر معادله برده شده اند علامت آنها قرینه می‌شود

یادآوری حل دستگاه به روش کرامر

$$a_1x + b_1y + c_1z = k_1$$

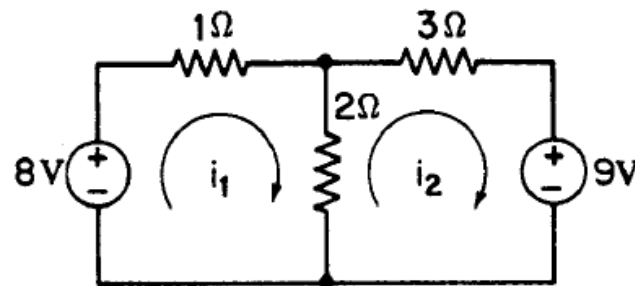
$$a_2x + b_2y + c_2z = k_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = k_3$$

جوابها به صورت زیر محاسبه میشود

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

مثال (۱-۳): در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۳-۳)، جریان دو مش را بیابید. سپس جریان شاخه مقاومت 2Ω را بیابید.



شکل (۳-۳): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۱-۳)

حل: در ابتدا دو مش با جریان‌های i_1 و i_2 در نظر می‌گیریم. بر اساس قواعد ارائه‌شده در این بخش، دو معادله از قانون KVL را به صورت ماتریسی زیر می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} 8 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & -2 \\ -2 & 3+2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

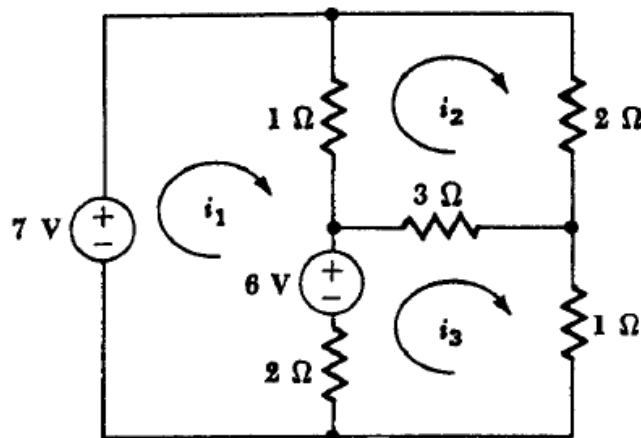
در صورتی که از روش معکوس‌گیری ماتریس ضرایب استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

پس از تعیین جریان مش‌ها، جریان شاخه با مقاومت 2Ω از تفاضل جریان‌های i_1 و i_2 به دست می‌آید:

$$I_{eq} = i_1 - i_2 = 2 - (-1) = 3A$$

مثال (۲-۳): شکل (۳-۴) مدار الکتریکی را نشان می‌دهد. با استفاده از روش تحلیل مش، جریان سه مش را بیابید.



شکل (۳-۴): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۲-۳)

حل: با استفاده از قانون KVL برای سه حلقه خواهیم داشت:

$$7 - 6 = (1 + 2) \cdot i_1 - 1 \times i_2 - 2 \times i_3$$

$$0 = (1 + 2 + 3) \cdot i_2 - 1 \times i_1 - 3 \times i_3$$

$$6 = (3 + 1 + 2) \cdot i_3 - 3 \times i_2 - 2 \times i_1$$

این سه معادله را به شکل ماتریسی زیر مرتب می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

با استفاده از روش کرامر جریان i_3 به صورت زیر محاسبه می‌شود:

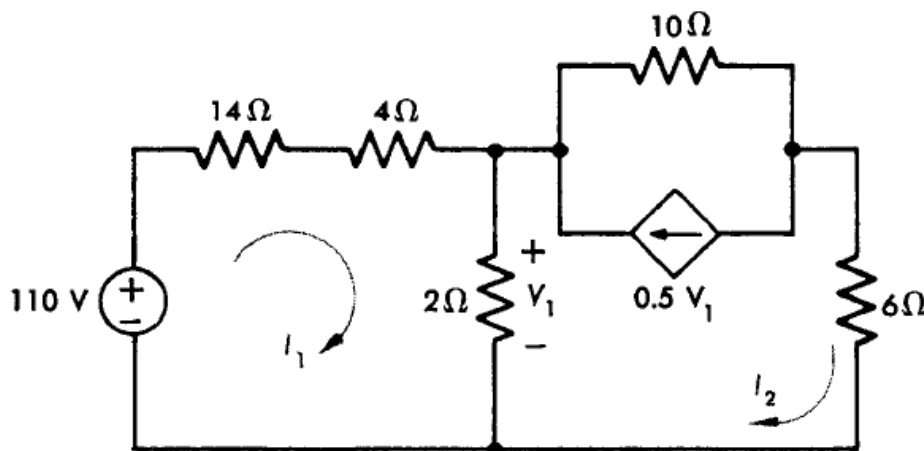
$$i_3(t) = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 0 \\ -2 & -3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{117}{39} = 3A$$

و جریان مش‌های اول و دوم برابر $i_1 = 3A$ و $i_2 = 2A$ می‌شود.

۳-۲-۲- معادلات مش در مدارهای با منابع وابسته

در بسیاری از مدارهای الکتریکی، منابع وابسته در کنار دیگر عناصر مدارها مورد استفاده قرار می‌گیرند. اولین خاصیت منابع وابسته آن است که مثل منابع مستقل، می‌توان تبدیل منابع ولتاژی به معادل جریانی و بالعکس را انجام داد و قوانین KVL و KCL را به‌کار برد. دومین خاصیت این منابع آن است که ولتاژ یا جریان تولیدی آنان، وابسته به ولتاژ یا جریان عنصر دیگری از مدار می‌باشد. لذا در روش تحلیل مش، پس از آنکه معادلات مربوط به قانون KVL را برای تمام مش‌ها بیان نمودیم، باید وابستگی موجود در منابع وابسته را به‌عنوان معادلات مکمل، در کنار دیگر معادلات مش در نظر گرفت. در نهایت با حل این معادلات، جریان مش‌ها و دیگر مشخصات مدار به‌دست می‌آید. در مثال زیر این روند تشریح می‌گردد.

مثال (۳-۳): در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۳-۷)، جریان‌های i_1 و i_2 در دو مش مدار را بیابید.



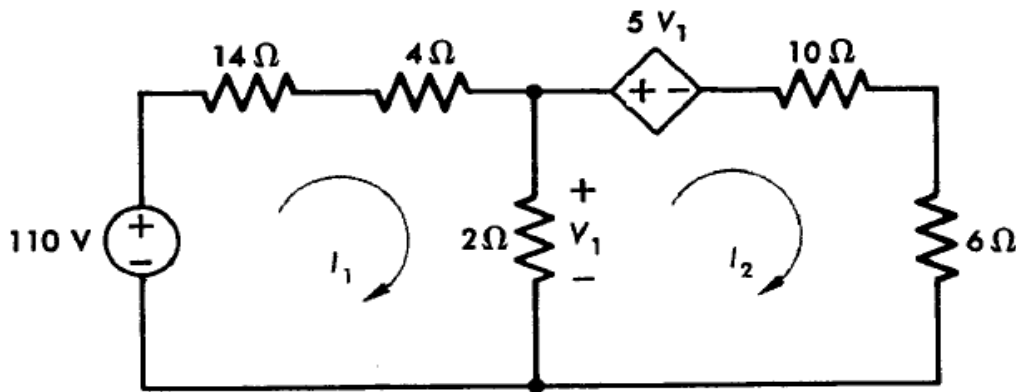
شکل (۳-۷): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۳-۳)

حل: در این مدار، یک منبع جریان وابسته به ولتاژ به‌کار رفته است. در ابتدا برای ساده‌سازی مدار، با توجه به آنکه منبع جریان وابسته با یک مقاومت 10Ω موازی شده است، لذا ابتدا منبع معادل ولتاژی آن را بر اساس مطالب ارائه شده در بخش (۲-۴) به‌دست می‌آوریم. بدین منظور منبع ولتاژ به مقدار $0.5V_1 \times 10 = 5V_1$ خواهد بود که با

مقاومت 10Ω سری می‌شود. این وضعیت در شکل (۸-۳) نشان داده شده است. حال معادلات مربوط به قانون KVL را برای دو مش مدار شکل (۸-۳) می‌نویسیم:

$$110 = (14 + 4 + 2) \cdot I_1 - 2 \times I_2$$

$$-5V_1 = -2 \times I_1 + (2 + 10 + 6) \cdot I_2$$



شکل (۸-۳): اصلاح مدار الکتریکی شکل (۷-۳)

اما این دو معادله مش با سه متغیر خواهد بود و برای حل آن، نیاز به یک معادله دیگر خواهد بود. معادله سوم بر اساس رابطه مقید شده توسط منبع وابسته ایجاد می‌شود. ولتاژ V_1 که دو سر مقاومت 2Ω می‌باشد بر اساس جریان‌های دو مش به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$V_1 = (I_1 - I_2) \times 2$$

حال از سه معادله اخیر، سه متغیر I_1 و I_2 و V_1 به دست می‌آید:

$$I_1 = 5A$$

$$I_2 = -5A$$

$$V_1 = 20V$$

پس با استفاده از این مثال، روال کلی روش تحلیل مش با وجود منابع وابسته را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

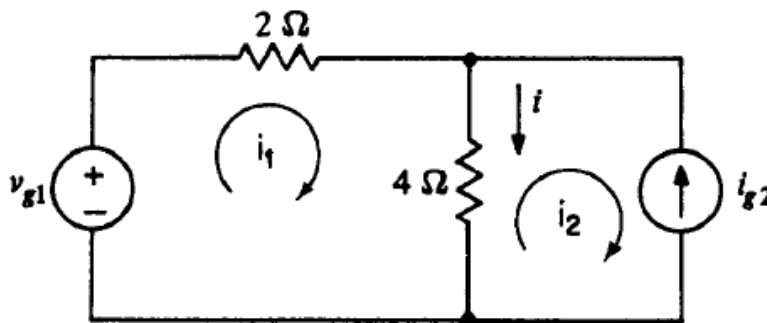
۱- ابتدا معادلات مش را برای تمام مش‌های مدار و با وجود منابع وابسته (و مشابه با منابع مستقل) می‌نویسیم. در این قسمت، سعی می‌گردد که منابع جریانی به منابع معادل ولتاژی تبدیل گردند.

۲- در این مرحله با مشخص کردن منابع وابسته، معادله‌های مقیدساز این منابع را به دسته معادلات اول اضافه می‌کنیم.

۳- مجموعه معادلات مراحل اول و دوم را در کنار هم قرار داده و مجهولات این دسته معادلات را حل می‌کنیم.

موضوع دیگری که در روش تحلیل مش در مدارهای الکتریکی وجود دارد آن است که در صورتی که در یک مش، منبع جریانی به طور سری با دیگر عناصر مدار وجود داشته باشد، دیگر برای این مش نیازی نیست که معادله مربوط به قانون KVL را برای آن بنویسیم؛ زیرا هدف از نوشتن معادله KVL در روش تحلیل مش آن است که جریان مش را تعیین کنیم و چون در این مش، یک منبع جریان وجود دارد، لذا جریان این مش همیشه و تحت هر شرایطی برابر مقدار جریان تولیدی توسط منبع جریان است. این موضوع را در مثال بعدی مشاهده خواهیم کرد و روش حل مدار را بیان می‌کنیم.

مثال (۳-۴): در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۳-۴)، اگر مقادیر $V_{g1} = 18V$ و $i_{g2} = 3A$ را داشته باشیم، با استفاده از روش تحلیل مش، جریان عبوری از مقاومت 4Ω (یعنی جریان i) را بیابید.



شکل (۳-۴): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۳-۴)

حل: در این مدار، دو مش وجود دارد که با جریان‌های i_1 و i_2 مشخص می‌شوند. با توجه به آنکه در مش دوم، منبع جریانی با مقدار $3A$ وجود دارد پس نتیجه می‌گیریم که $i_2 = -3A$ است؛ زیرا جریان مش در خلاف جهت جریان منبع است. حال قانون KVL را برای مش اول می‌نویسیم:

$$18 = (2 + 4) \cdot i_1 - 4 \times i_2$$

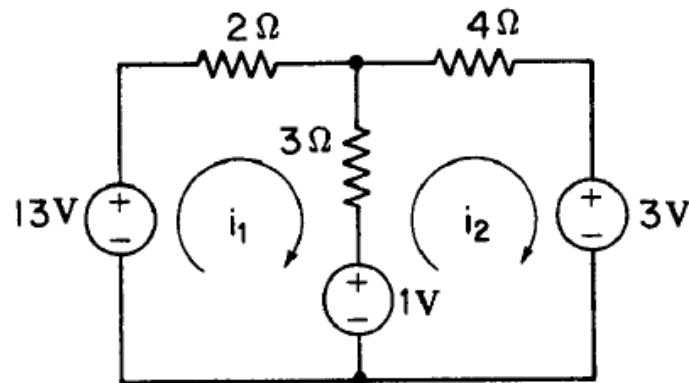
با توجه به آنکه $i_2 = -3A$ است لذا i_1 به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$i_1 = \frac{18 + 4 \times (-3)}{6} = \frac{6}{6} = 1A$$

در نتیجه جریان i برابر خواهد بود با:

$$i = i_1 - i_2 = 1 + 3 = 4A$$

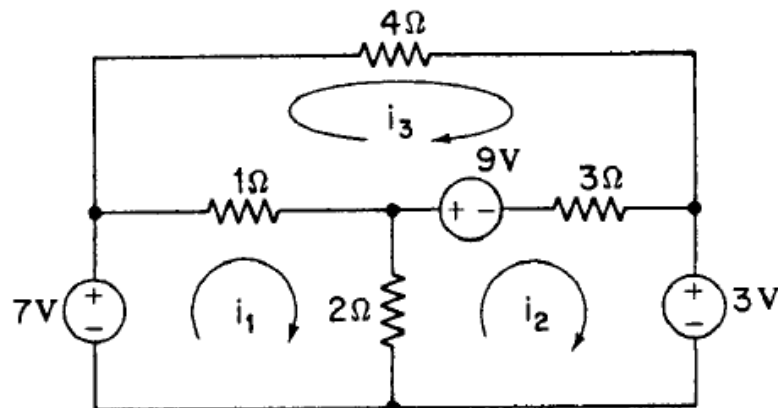
تمرین (۳-۱): در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۳-۵) جریان مش‌ها را بیابید و سپس جریان مقاومت 3Ω را بیابید.



شکل (۳-۵): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۳-۱)

جواب: $i_1 = 3A$ ، $i_2 = 1A$ ، $i_3 = 2A$

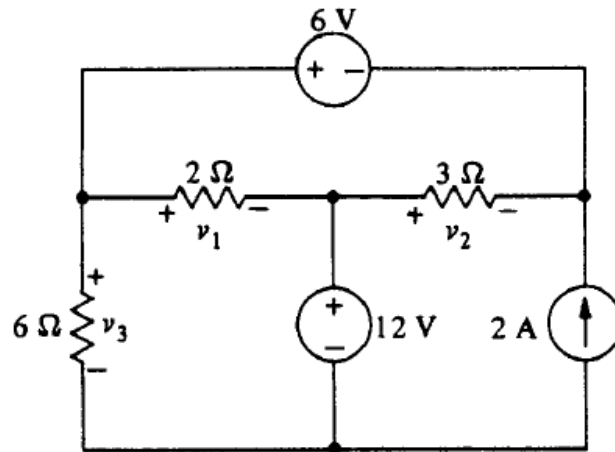
تمرین (۳-۲): شکل (۳-۶) یک مدار الکتریکی را نشان می‌دهد. با استفاده از روش تحلیل مش، سه جریان مش‌ها را بیابید. سپس جریان مقاومت‌های 4Ω و 3Ω را بیابید.



شکل (۳-۶): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۳-۲)

جواب: $i_1 = 2A$ ، $i_2 = -1A$ ، $i_3 = 1A$ ، $i_4 = 2A$ ، $i_{3\Omega} = 2A$ ، $i_{4\Omega} = 1A$

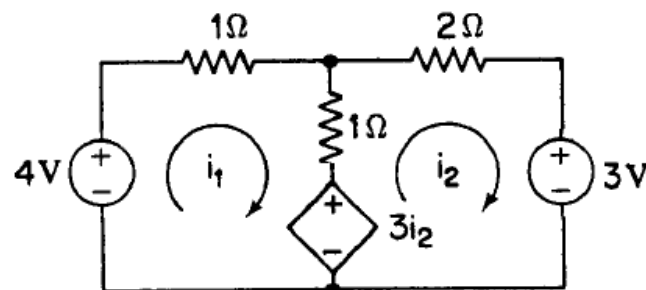
تمرین (۳-۳): با استفاده از روش تحلیل مش، مجهولات v_1 ، v_2 و v_3 را در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۳-۱۰) بیابید.



شکل (۳-۱۰): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۳-۳)

جواب: $v_1 = 2V$ ، $v_2 = 4V$ ، $v_3 = 14V$

تمرین (۳-۴): در مدار الکتریکی شکل (۳-۱۱)، جریان‌های i_1 و i_2 در دو مش را بیابید.



شکل (۳-۱۱): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۳-۴)

جواب: $i_1 = 3A$ و $i_2 = -1A$

۴-۱- تحلیل مدار به روش پتانسیل گره

برای حل مدار به روش پتانسیل گره از قانون جریان‌های کیرشهف^۱ (K.C.L.) استفاده می‌شود. بدین منظور، مراحل زیر را طی می‌کنیم.

مرحله ۱ ← مدار را تا حد ممکن ساده می‌کنیم؛ مثلاً مقاومت‌های موازی یا سری را به صورت معادل آن‌ها قرار می‌دهیم یا گره‌های گسترده () را یک جا رسم () می‌کنیم.

مرحله ۲ ← گره‌های مدار را مشخص می‌کنیم و به هر کدام یک پتانسیل نسبت می‌دهیم؛ مانند $V_1, V_2, \dots, V_n$.

مرحله ۳ ← یکی از نقاط گره را — که بهتر است پراشعاب‌ترین آن‌ها باشد — به عنوان گره مبنا انتخاب می‌کنیم. فرض بر این است که پتانسیل گره مبنا صفر است.

مرحله ۴ ← برای هر گره، معادله‌ی جریان‌های کیرشهف (K.C.L.) را می‌نویسیم. برای نوشتن معادله در هر گره به جز منابع جریان (که جهت جریان مشخصی دارند) جریان بقیه‌ی شاخه‌ها را خروجی در نظر می‌گیریم و با علامت مثبت منظور می‌کنیم. علامت جریان‌های ورودی به گره منفی خواهد بود^۱.

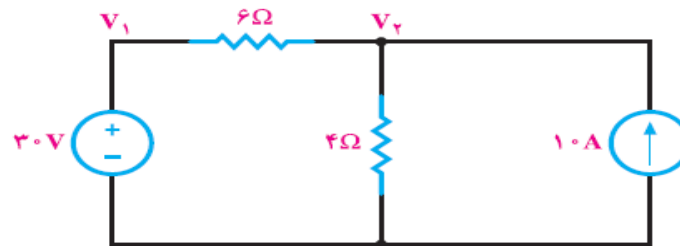
مرحله ۵ ← برای مداری با n گره، $n-1$ معادله نوشته می‌شود که شامل معادله‌ی گره‌ها به جز گره مبناست. تعداد معادله‌ها با تعداد مجهولات — که پتانسیل‌های گره‌ها هستند — برابر است.

مرحله ۶ ← با حل دستگاه معادلات چندمجهولی، پتانسیل گره‌ها را به دست می‌آوریم.

مرحله ۷ ← با معلوم بودن پتانسیل گره‌ها، جریان هر شاخه به راحتی به کمک قانون اهم محاسبه می‌شود.

^۱ — Kirishhof Current Low

مثال ۴: توان مصرفی مقاومت ۴ اهم را در شکل ۷-۱ به روش پتانسیل گره حساب کنید.

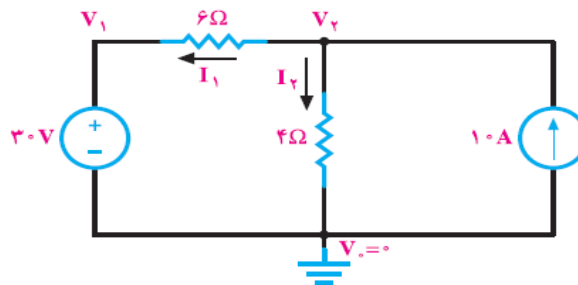


شکل ۷-۱

راه حل:

الف: این مدار شکل ساده‌ای دارد و ساده‌تر نمی‌شود.

ب: گره پایین را مبنا اختیار می‌کنیم و به بقیه‌ی گره‌ها ولتاژ نسبت می‌دهیم (شکل ۸-۱).



شکل ۸-۱

پ: اکنون معادله‌ی جریان‌ها را در گره می‌نویسیم. در این مثال، پتانسیل گره ۱ معلوم است؛ زیرا از آن‌جا که یک سر منبع ولتاژ به گره مبنا وصل است، پتانسیل سر دیگر آن بسته به پلاریته‌ی منبع به اندازه‌ی اختلاف پتانسیل دوسر آن بیش‌تر یا کم‌تر از پتانسیل مبنا خواهد بود. در این‌جا گره ۱ به پلاریته‌ی مثبت منبع وصل است. پس پتانسیل آن برابر ۳۰ ولت می‌شود. در نتیجه، معادله‌ی جریان‌ها را فقط برای گره ۲ می‌نویسیم.

$$\xrightarrow{\text{KCL در گره ۲}} +I_1 + I_2 - 10 = 0 \quad + \frac{V_2 - V_1}{6} + \frac{V_2 - V_0}{4} - 10 = 0$$

چون جهت I_2 مخالف جهت منبع جریان است برای آن علامت منفی در نظر می‌گیریم. با جاگذاری مقادیر V_1 و V_0 خواهیم داشت:

$$\frac{V_2 - 30}{6} + \frac{V_2}{4} = 10$$

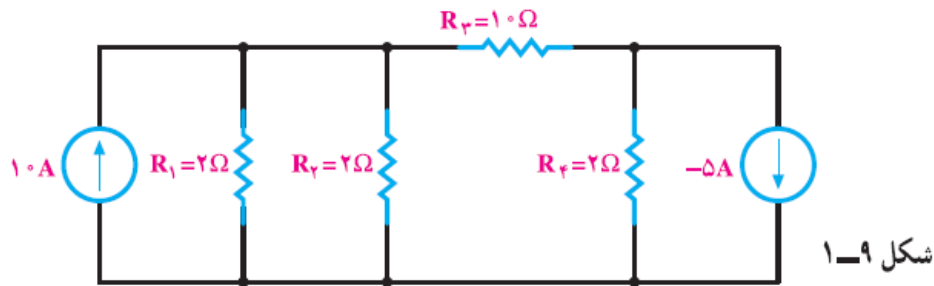
معادله‌ی بالا را حل می‌کنیم و ولتاژ V_2 را به دست می‌آوریم.

$$\frac{2(V_2 - 30) + 3V_2}{12} = 10 \rightarrow 5V_2 - 60 = 120$$

$$5V_2 = 180 \rightarrow V_2 = \frac{180}{5} = 36V$$

$$P_{4\Omega} = \frac{V_2^2}{4} = \frac{36^2}{4} = 324W$$

مثال ۵: در مدار شکل ۹-۱ جریان را در مصرف کننده ۱۰ اهم حساب کنید.



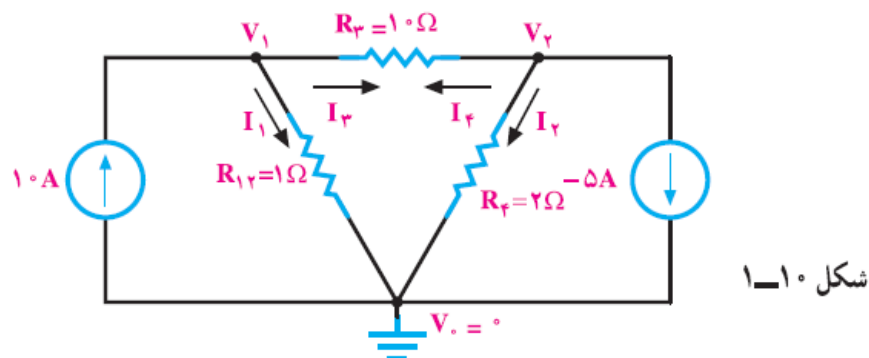
راه حل:

الف: ابتدا مقاومت R_1 و R_2 را با هم موازی می‌کنیم و مدار را به صورت شکل ۱۰-۱ ساده می‌کنیم.

$$R_{12} = (R_1 \parallel R_2) = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2 \times 2}{2 + 2} = 1\Omega$$

ب: گره‌های مدار را تعیین می‌کنیم و به هر یک پتانسیلی را نسبت می‌دهیم.

پ: برای هر شاخه یک جهت جریان تعیین می‌کنیم.



ت: در این مدار سه گره داریم. پس KCL را برای گره‌های ۱ و ۲ می‌نویسیم و برای آن‌ها معادله تشکیل می‌دهیم.

KCL گره ۱ $\rightarrow -10 + I_1 + I_3 = 0 \quad -10 + \frac{V_1}{1} + \frac{V_1 - V_2}{10} = 0$

KCL گره ۲ $\rightarrow +I_4 + I_2 + (-5) = 0 \quad +\frac{V_2 - V_1}{10} + \frac{V_2}{2} + (-5) = 0$

ث : معادله‌ها را مرتب کرده حل می‌کنیم تا V_1 و V_2 به دست آید.

$$\begin{cases} 11V_1 - V_2 = 100 \\ -V_1 + 6V_2 = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = 10V \\ V_2 = 10V \end{cases}$$

ج : اکنون جریان مقاومت $10\ \Omega$ اهم به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$I_{10\Omega} = \frac{V_1 - V_2}{10} = \frac{10 - 10}{10} = 0A$$

پس در این مدار از مقاومت $10\ \Omega$ جریانی عبور نمی‌کند. البته در رابطه‌ی بالا می‌شد $\frac{V_2 - V_1}{10}$ هم نوشت که در این صورت جهت جریان به دست آمده از سمت گره ۲ به سمت گره ۱ تعیین می‌شد. به هر حال، در این مثال خاص که مقدار جریان صفر است، هیچ مسئله‌ای نیز در مورد جهت جریان وجود ندارد.

 نتیجه: اگر در مداری تعداد حلقه‌ها زیاد ولی تعداد گره‌ها کم باشد، استفاده از روش پتانسیل گره مناسب‌تر است، اگر تعداد حلقه‌ها کم‌تر از تعداد گره‌ها باشد، استفاده از روش جریان حلقه بهتر است؛ زیرا معادلات کم‌تری تشکیل می‌شود و حل کردن آن‌ها ساده‌تر است.

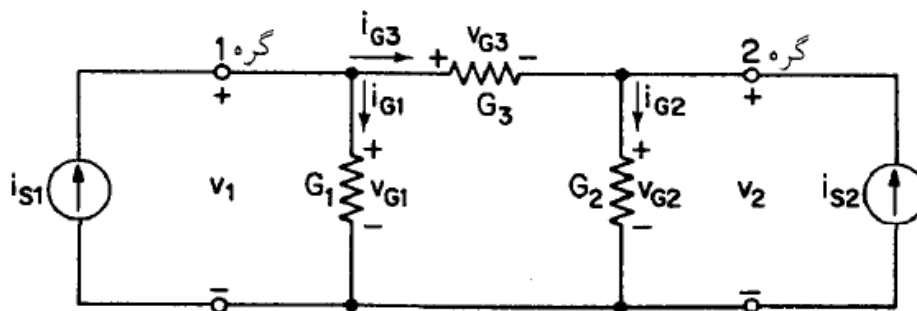
۳-۳-۱- معادلات گره برای مدارهای ساده

در فصل اول، برای پیاده‌سازی قانون KCL، مفهوم گره را بیان نمودیم. در آنجا بیان نمودیم که جمع جبری تمام جریان‌های مربوط به شاخه‌های متصل به هر گره، برابر صفر

می‌باشد. در قانون KCL، جریان‌های ورودی را با علامت منفی و جریان‌های خروجی از هر گره را با علامت مثبت در نظر می‌گیریم که در یک طرف معادله می‌آیند. شکل دیگر بیان قانون KCL آن است که جمع جریان‌های ورودی با جمع جریان‌های خروجی، برابر خواهد بود. حال در روش تحلیل گره، یک گره از گره‌های مدار را به عنوان گره مبنا اختیار می‌کنیم و ولتاژ دیگر گره‌های مدار را نسبت به گره مبنا محاسبه می‌کنیم (معمولاً ولتاژ گره مبنا را به مقدار صفر در نظر می‌گیریم).

برای بیان اصول کلی این روش، مدار الکتریکی شکل (۱۲-۳) را در نظر بگیرید. در این شکل، برای هر عنصر، یک جریان و ولتاژی در نظر گرفته می‌شود که بر اساس رابطه $v-i$ برای این سه مقاومت با رسانایی G_1 ، G_2 و G_3 خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} i_{G1}(t) &= G_1 \cdot v_{G1}(t) \\ i_{G2}(t) &= G_2 \cdot v_{G2}(t) \\ i_{G3}(t) &= G_3 \cdot v_{G3}(t) \end{aligned} \quad (12-3)$$



شکل (۱۲-۳): یک مدار ساده با دو گره

حال در مدار مذکور متوجه می‌شویم که غیر از گره مبنا (که همان گره پایینی مدار با ۴ شاخه متصل به آن است) دو گره دیگر با شماره‌های ۱ و ۲ وجود دارد. در صورتی که قانون KCL را برای بین این دو گره بنویسیم، خواهیم داشت:

$$i_{s1}(t) = i_{G1}(t) + i_{G3}(t) \quad (13-3)$$

$$i_{s2}(t) = i_{G2}(t) - i_{G3}(t) \quad (14-3)$$

با کاربرد روابط (۱۲-۳) در معادلات (۱۳-۳) و (۱۴-۳) می‌توان نوشت:

$$i_{s1}(t) = G_1 \cdot v_{G1}(t) + G_3 \cdot v_{G3}(t) \quad (15-3)$$

$$i_{s2}(t) = G_2 \cdot v_{G2}(t) - G_3 \cdot v_{G3}(t) \quad (16-3)$$

در مرحله بعدی روش تحلیل گره، برای هر گره، یک ولتاژ با شماره گره در نظر می‌گیریم که در این شکل، ولتاژهای $v_1(t)$ برای گره ۱ و $v_2(t)$ برای گره ۲ هستند. با مقایسه این دو ولتاژ گره با ولتاژهای ارائه شده برای عناصر در شکل (۱۲-۳) نتیجه می‌گیریم که،

$$v_{G1}(t) = v_1(t)$$

$$v_{G2}(t) = v_2(t) \quad (17-3)$$

$$v_{G3}(t) = v_1(t) - v_2(t)$$

با استفاده از مجموعه روابط (17-3) در هر دو معادله (15-3) و (16-3) خواهیم داشت:

$$i_{s1}(t) = (G_1 + G_3) \cdot v_1(t) - G_3 \cdot v_2(t) \quad (18-3)$$

$$i_{s2}(t) = -G_3 \cdot v_1(t) + (G_2 + G_3) \cdot v_2(t) \quad (19-3)$$

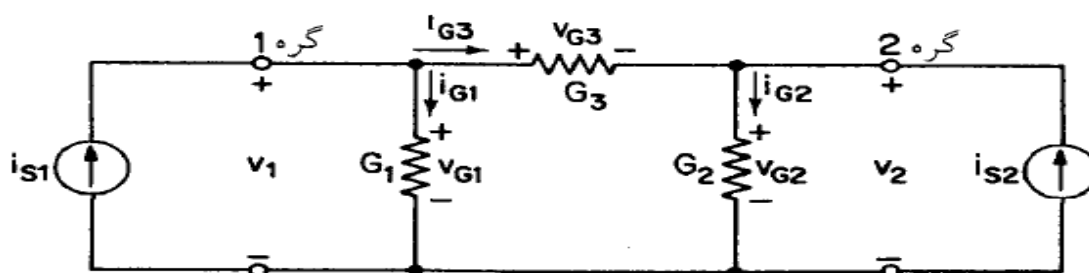
دو معادله اخیر به دو معادله اساسی روش تحلیل گره معروف است. با کمی دقت در این دو معادله به نکات جامعی دسترسی می‌یابیم که با استفاده از آنها می‌توان به راحتی معادلات گره را بیان نمود. این نکات عبارتند از:

۱- منابع جریانی که جهت جریان تولیدی آنان به سمت گره موردنظر می‌باشد، با علامت مثبت در سمت چپ معادله گره موردنظر آورده می‌شود. مثلاً در گره اول، جریان منبع $i_{s1}(t)$ به سمت داخل گره ۱ بوده و لذا با علامت مثبت در سمت چپ معادله گره ۱ در رابطه (18-3) وارد می‌شود.

۲- در معادله اول جمله $(G_1 + G_3) \cdot v_1(t)$ در سمت راست معادله، بیانگر کل جریان خروجی از گره ۱ ناشی از ولتاژ همان گره می‌باشد. در معادله دوم نیز چون دو مقاومت با رسانایی G_2 و G_3 به گره ۲ متصل است لذا جمله $(G_2 + G_3) \cdot v_2(t)$ با علامت مثبت در سمت راست معادله آورده می‌شود.

۳- در مقاومت‌هایی که بین دو گره واقع می‌شوند، باید جریان ناشی از گره مقابل را به صورت علامت منفی در گره مربوطه وارد نمود. به عنوان مثال، چون مقاومت با رسانایی G_3 بین دو گره ۱ و ۲ واقع شده است لذا جمله $-G_3 \cdot v_2(t)$ با علامت منفی در معادله اول مربوط به گره اول و در سمت راست آن آورده می‌شود.

برای سادگی در نمایش معادلات گره، دو معادله (18-3) و (19-3) را به شکل ماتریسی زیر می‌نویسیم:



شکل (12-3): یک مدار ساده با دو گره

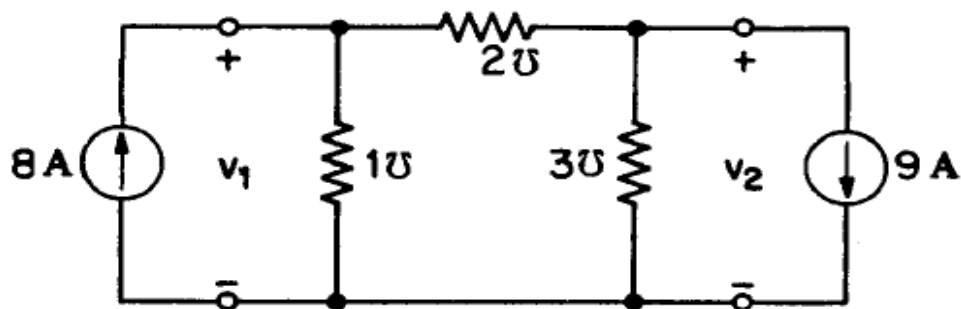
$$\begin{bmatrix} i_{s1}(t) \\ i_{s2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 + G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} \quad (20-3)$$

و یا،

$$\mathbf{I}_s(t) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{V}(t) \quad (21-3)$$

مشابه روش تحلیل مش، برای تعیین ولتاژهای $v_1(t)$ و $v_2(t)$ در دو گره ۱ و ۲ می‌توان از روش کرامر استفاده نمود و یا اینکه ماتریس ضرایب G در معادله (۳-۲۱) را معکوس نموده و در بردار جریان $I_s(t)$ ضرب کنیم تا بردار $V(t)$ تعیین شود. در نهایت می‌توان گفت که با مشخص شدن ولتاژ گره‌ها قادریم تا جریان تمام شاخه‌ها را محاسبه کنیم.

مثال (۳-۵): شکل (۳-۱۳) یک مدار الکتریکی ساده با دو گره (بدون گره مبنا) را نشان می‌دهد. با استفاده از روش تحلیل گره، ولتاژهای $v_1(t)$ و $v_2(t)$ را بیابید.



شکل (۳-۱۳): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۳-۵)

$$\begin{bmatrix} i_{s1}(t) \\ i_{s2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 + G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} \quad (۳-۲۰)$$

و یا،

$$I_s(t) = G \cdot V(t) \quad (۳-۲۱)$$

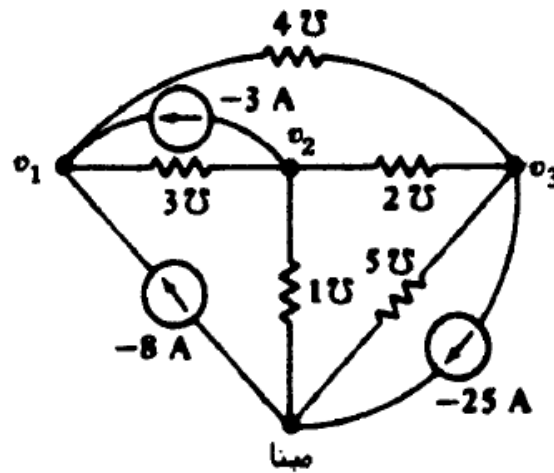
حل: با استفاده از قانون KCL برای این دو گره و بر اساس معادله (۳-۲۰)، معادلات ماتریسی گره به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{bmatrix} 8 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & -2 \\ -2 & 3+2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$$

علامت منفی برای منبع جریان در گره ۲ به این خاطر است که جریان این منبع از گره ۲ خارج می‌شود، لذا با علامت منفی در سمت چپ معادله مربوط به گره ۲ وارد می‌شود. سپس با استفاده از روش معکوس‌گیری در معادله اخیر خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

مثال (۳-۶): شکل (۳-۱۴) یک مدار الکتریکی با سه گره (بدون گره مبنا) را نشان می‌دهد. ولتاژهای $v_1(t)$ ، $v_2(t)$ و $v_3(t)$ را با استفاده از روش تحلیل گره تعیین نمایید.



شکل (۳-۱۴): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۳-۶)

حل: با استفاده از قانون KCL برای سه گره مدار، روابط زیر را داریم:

$$(-3) + (-8) = (3 + 4) \cdot v_1(t) - 3 \times v_2(t) - 4 \times v_3(t)$$

$$-(-3) = -3 \times v_1(t) + (3 + 2 + 1) \cdot v_2(t) - 2 \times v_3(t)$$

$$-(-25) = -4 \times v_1(t) - 2 \times v_2(t) + (2 + 5) \cdot v_3(t)$$

و اگر این سه معادله را به شکل ماتریسی بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix}$$

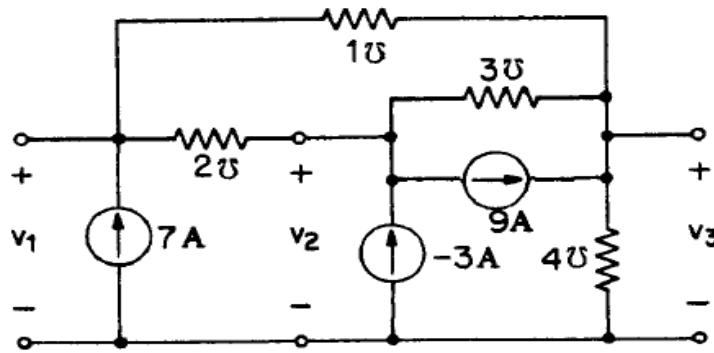
با استفاده از روش کرامر ولتاژهای $v_1(t)$ ، $v_2(t)$ و $v_3(t)$ ، از رابطه ماتریسی اخیر محاسبه می‌شوند:

$$v_1(t) = \frac{\begin{vmatrix} -11 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 \\ 25 & -2 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 7 \end{vmatrix}} = 1V$$

$$v_2(t) = 2V$$

$$v_3(t) = 3V$$

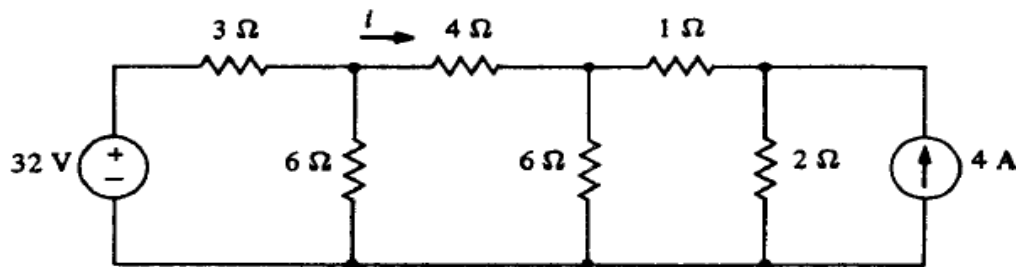
تمرین (۵-۳): مدار الکتریکی در شکل (۳-۱۵) دارای سه گره (بدون گره مبنا) می باشد. با استفاده از روش تحلیل گره، ولتاژهای $v_1(t)$ ، $v_2(t)$ و $v_3(t)$ را بیابید.



شکل (۳-۱۵): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۵-۳)

جواب: $v_1(t) = 2V$ ، $v_2(t) = -1V$ ، $v_3(t) = 1V$

تمرین (۳-۶): با استفاده از روش تحلیل گره، جریان $i(t)$ در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۳-۱۶) بیابید.



شکل (۳-۱۶): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۳-۶)

جواب: $i(t) = 2A$

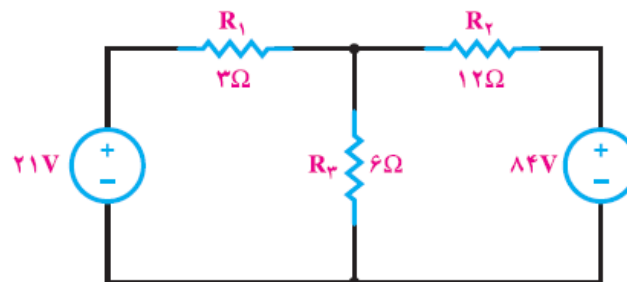
۵-۱- تحلیل مدار به روش اصل جمع آثار

در مدارهای الکتریکی که چند منبع تغذیه دارند، هریک از منابع در مدار جریانی ایجاد می کند و جریان هر عنصر در مدار از جمع جبری جریان هایی که هر منبع در آن عنصر ایجاد می کند به دست می آید. به عبارت دیگر، جریان عناصر مدار از مجموع جبری آثار تک تک منابع در مدار حاصل می شود. در تحلیل مدار به روش جمع آثار باید اثر هریک از منابع را به طور جداگانه با بی اثر کردن منابع دیگر بر کمیت مجهول محاسبه کرد. جمع آثار در مورد ولتاژ دوسر هر عنصر نیز صادق است ولی در مورد کمیت هایی که با مجذور جریان یا ولتاژ متناسب هستند صدق نمی کند. مثلاً توان در یک مقاومت اهمی را نمی توان از مجموع توان هایی به دست آورد که هر منبع به تنهایی می تواند در آن عنصر ایجاد کند.

تذکر

وقتی منبع ولتاژ را از مدار حذف می‌کنیم، دوسر آن را اتصال کوتاه می‌کنیم
در صورتی که بخواهیم منبع جریانی را از مدار حذف کنیم، باید آن را باز کرده و از
مدار جدا سازیم.

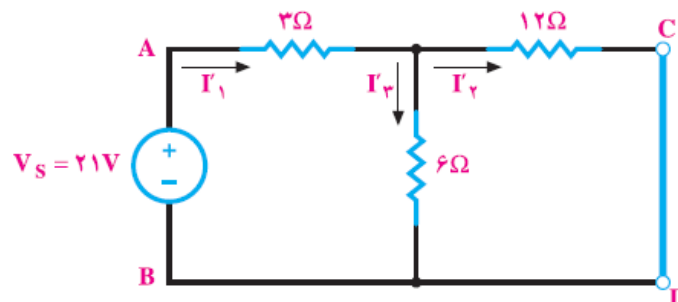
مثال ۶: در مدار شکل ۱-۱۱ جریان را در مقاومت‌های R_1 و R_2 و R_3 و توان و ولتاژ
مقاومت ۶ اهم را محاسبه کنید.



شکل ۱-۱۱

راه حل:

الف: ابتدا به جز یک منبع (مثلاً ۲۱ V) بقیه‌ی منابع را از مدار حذف می‌کنیم.
حال برای هر عنصر جریانی را در نظر می‌گیریم و آن‌ها را مطابق روش‌هایی که قبلاً آموخته‌ایم،
حساب می‌کنیم (شکل ۱-۱۲).



شکل ۱-۱۲

می‌بینیم مقاومت ۶ اهمی به صورت موازی با مقاومت ۱۲ اهمی و مجموعه آن‌ها به صورت سری
با مقاومت ۳ اهمی قرار دارد.

$$R_{AB} = (6 \parallel 12) + 3$$

$$R_{AB} = \frac{12 \times 6}{12 + 6} + 3 = 7 \Omega$$

$$I'_1 = \frac{21}{7} = 3 \text{ A}$$

$$I'_2 = I'_1 \times \frac{6}{12 + 6} = 3 \times \frac{1}{3} = 1 \text{ A}$$

$$I'_3 = 3 \times \frac{12}{12 + 6} = 2 \text{ A}$$

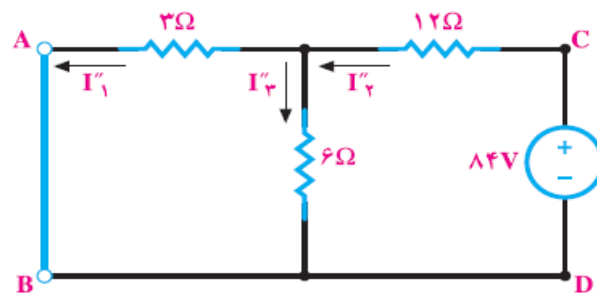
ب : این بار منبع دوم را حذف می‌کنیم و مجدداً جریان عناصر مدار را محاسبه می‌نماییم
مکل ۱۳-۱).

$$R_{CD} = \frac{3 \times 6}{3 + 6} + 12 = 14 \Omega$$

$$I''_2 = \frac{84}{14} = 6 \text{ A}$$

$$I''_3 = 6 \times \frac{3}{3 + 6} = 2 \text{ A}$$

$$I''_1 = 6 \times \frac{6}{3 + 6} = 4 \text{ A}$$



شکل ۱۳-۱

اگر جریان‌های هر عنصر را که در دو حالت محاسبه شده با توجه به جهت آن‌ها با یک‌دیگر
جمع کنیم، جریان هر عنصر برای زمانی که هر دو منبع در مدار هستند به دست می‌آید.

$$I_1 = I''_1 - I'_1 = 4 - 3 = 1 \text{ A}$$

$$I_2 = I''_2 - I'_2 = 6 - 1 = 5 \text{ A}$$

$$I_3 = I'_3 + I''_3 = 2 + 2 = 4 \text{ A}$$

پ : برای محاسبه‌ی ولتاژ مقاومت ۶ اهم، می‌توان به دو صورت زیر عمل کرد.

$$۱) V_{6\Omega} = I_3 \times 6 = 4 \times 6 = 24 [\text{V}]$$

$$۲) V_{6\Omega} = I'_3 \times 6 + I''_3 \times 6 = 2 \times 6 + 2 \times 6 = 24 [\text{V}]$$

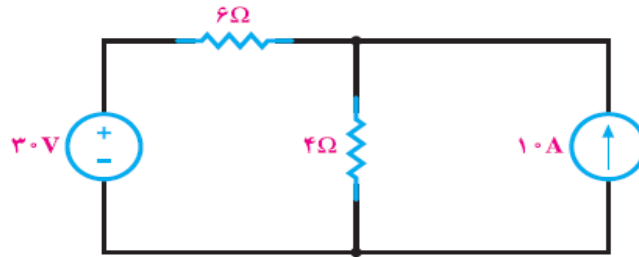
ت : توان در مقاومت ۶ اهمی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$P = 6 \times I_3^2 = 6 \times 4^2 = 96 \text{ W}$$

توجه کنید که توان این مقاومت را نمی‌توان از رابطه‌ی زیر به دست آورد؛ زیرا حاصل ۹۶
وات نمی‌شود :

$$6 \times I_1^2 + 6 \times I_2^2 = 6 \times 1^2 + 6 \times 5^2 = 18 \neq 96$$

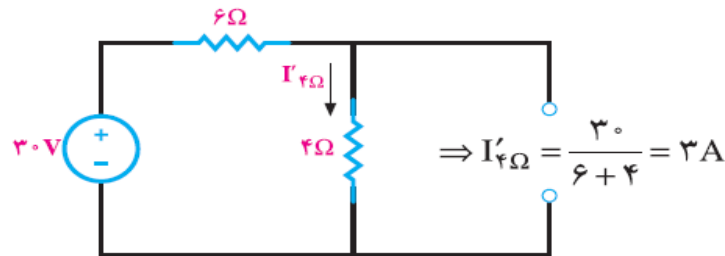
مثال ۷: توان مصرفی در مقاومت ۴ اهم را در شکل ۱۴-۱ به روش اصل جمع آثار حساب کنید.



شکل ۱۴-۱

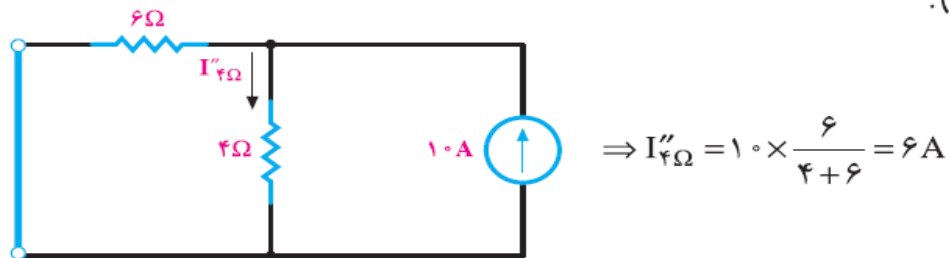
راه حل:

الف : منبع جریان را حذف و جریان مقاومت ۴Ω را محاسبه می کنیم (شکل ۱۵-۱).



شکل ۱۵-۱

ب : منبع ولتاژ را حذف می کنیم و مجدداً جریان مقاومت ۴Ω را به دست می آوریم (شکل ۱۶-۱).



شکل ۱۶-۱

پ : اکنون با جمع آثار، جریان مقاومت ۴Ω را در مدار اصلی به دست می آوریم و سپس توان آن را حساب می کنیم.

$$I_{4\Omega} = I'_{4\Omega} + I''_{4\Omega} = 3 + 6 = 9A$$

$$P_{4\Omega} = 4 \times 9^2 = 324W$$

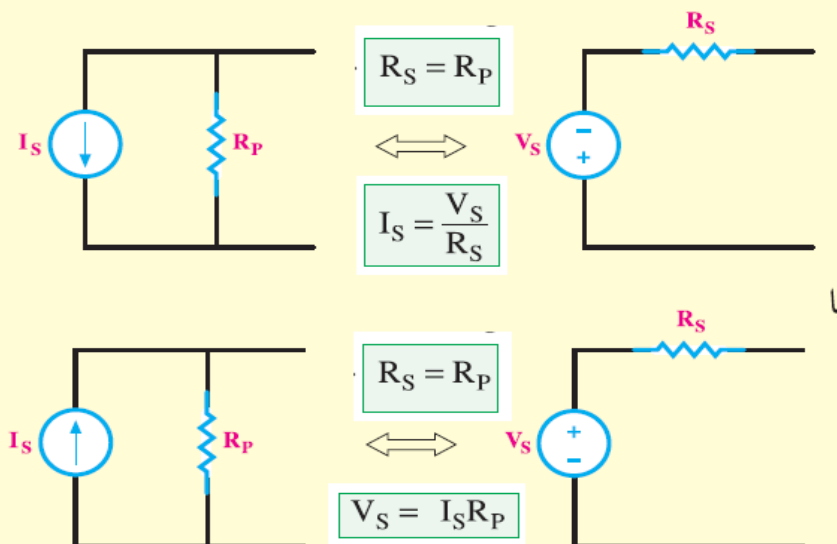
👉 نتیجه: در روش جمع آثار به ازای هر منبع، مدار یکبار تحلیل می شود. این روش زمانی نسبت به سایر روش ها ترجیح داده می شود که مدار ساده تر حل شود.

۶-۱- تبدیل منابع ولتاژ و جریان به یکدیگر

در تحلیل مدارهای الکتریکی مواردی پیش می‌آید که به نظر می‌رسد اگر به جای منبع ولتاژ، یک منبع جریان در مدار قرار داشته باشد، تحلیل مدار ساده‌تر انجام می‌گیرد. به شکل ۱-۱۷ توجه کنید. اگر در این مدار به جای منبع واقعی V_s یک منبع جریان واقعی وجود داشت، همه‌ی مقاومت‌های منابع مدار با هم موازی بودند و به راحتی با یک محاسبه مقاومت معادل، استفاده از قوانین اهم و جریان‌های کیرشهف ولتاژ V به دست می‌آمد. مطلب یادشده این فکر را به وجود می‌آورد که چگونه می‌توان منابع ولتاژ و جریان را جایگزین یکدیگر کرد. برای این منظور، چنانچه منابع را جایگزین هم کنیم، نباید در ولتاژ و جریان مصرف کننده تغییری ایجاد شود. پس اگر منبع ولتاژی را جایگزین منبع جریانی کنیم بدون آن که جریان و ولتاژ مصرف کننده تغییر کند، می‌توان گفت این دو منبع معادل هم هستند. با توجه به توضیحات فوق منابع معادل را هم به صورت زیر می‌توان محاسبه کرد.

توجه

- ۱- اگر در یک مدار، اطلاعاتی از مصرف کننده‌ها یا منابع خواسته شود تبدیل منبع در آن قسمت صحیح نمی‌باشد.
- ۲- در تبدیل منابع ولتاژ و جریان به یکدیگر ضروری است به جهت و علامت منابع مطابق شکل زیر توجه شود.



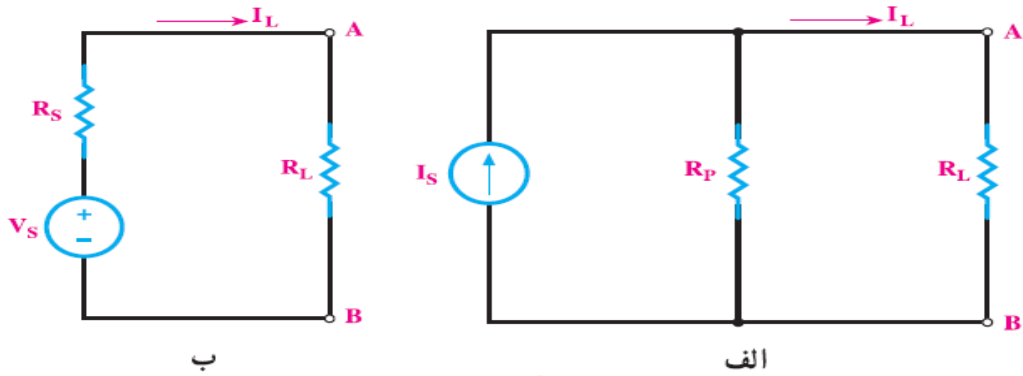
یاد آوری

$$I_L = I_S \frac{R_P}{R_L + R_P}$$

در مدار «الف» داریم:

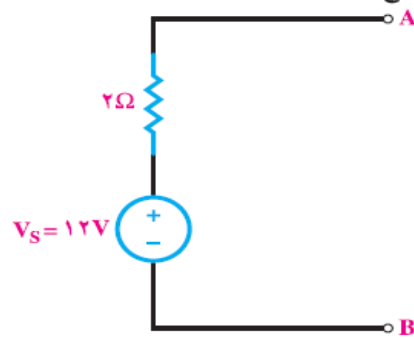
$$I_L = \frac{V_S}{R_L + R_S}$$

در مدار «ب» داریم:



شکل ۱۸-۱

مثال ۸: منبع جریان معادل منبع ولتاژ شکل ۱۹-۱ را به دست آورید.

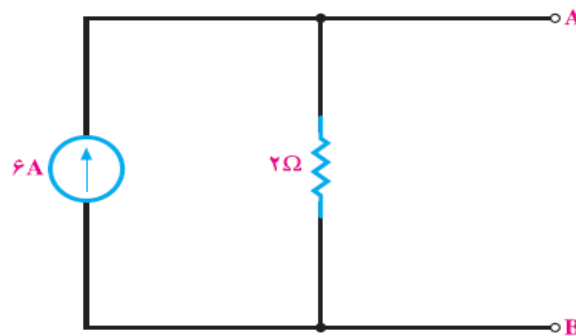


شکل ۱۹-۱

$$R_P = R_S = 2\Omega \text{ و } I_S = \frac{12}{2} = 6A$$

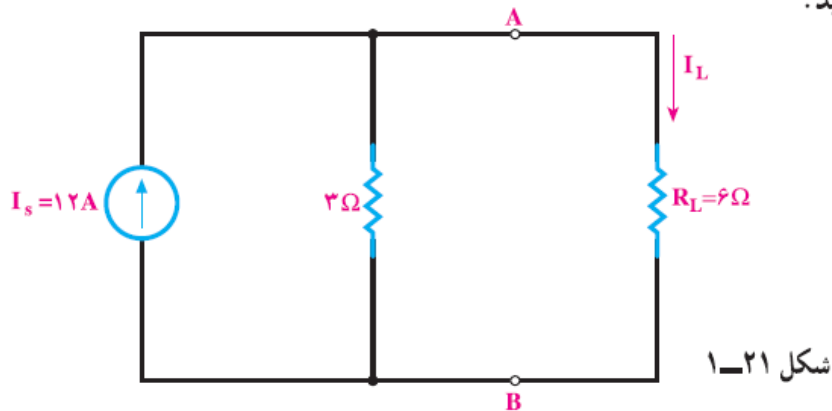
راه حل:

پس منبع جریان معادل به صورت شکل ۲۰-۱ درمی آید.



شکل ۲۰-۱

مثال ۹: در شکل ۱-۲۱ ابتدا جریان مصرف کننده (R_L) را حساب کنید. سپس منبع ولتاژ معادل منبع جریان مدار را محاسبه کرده شکل مدار را رسم کنید و بار دیگر جریان مصرف کننده را محاسبه نمایید.



شکل ۱-۲۱

راه حل:

$$I_L = 12 \times \frac{3}{3+6} = 4 \text{ A}$$

$$V_S = 12 \times 3 = 36 \text{ V} \text{ و } R_S = 3 \Omega$$

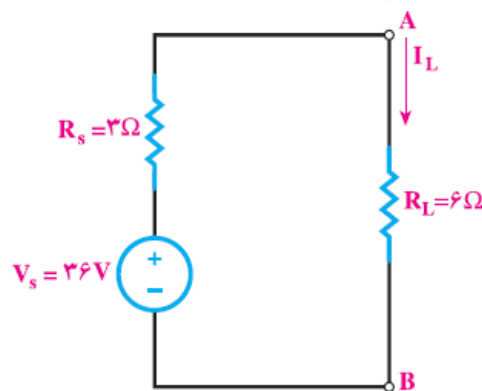
اکنون مدار به صورت شکل ۱-۲۲ خواهد شد.

در این حالت، جریان I_L را داریم:

$$I_L = \frac{36}{3+6} = 4 \text{ A}$$

ملاحظه می کنید که جریان مصرف کننده باز هم ۴ آمپر است. بدیهی است ولتاژ و توان مصرفی آن نیز تغییر نمی کند.

لازم به یادآوری است که منابع ایده آل را نمی توان به یک دیگر تبدیل کرد.

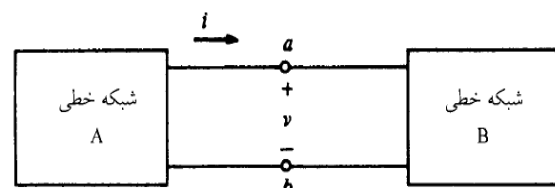


شکل ۱-۲۲

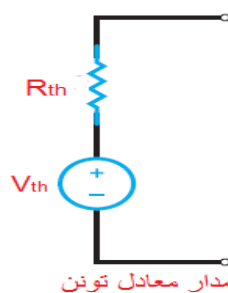
۷-۱- مدار معادل تونن و نورتن مدارهای الکتریکی

در تجزیه و تحلیل مدارهای الکتریکی به مواردی برخورد می‌کنیم که مدار از عناصر زیادی درست شده است و تعداد زیادی گره و حلقه دارد اما هدف ما فقط بررسی یک عنصر در مدار است و می‌خواهیم بدانیم با تغییرات این عنصر، مثلاً جریان یا توان آن چه تغییراتی خواهد داشت. در این مورد، تحلیل تکراری مدار بسیار مشکل خواهد بود. حتی اگر از روش‌های رایانه‌ای نیز برای تحلیل استفاده کنیم، باز محاسبات مکرر به زمان بیش‌تری نیاز دارد. برای از بین بردن این مشکل راه‌حل‌هایی ارایه شده است. به این ترتیب که همیشه می‌توان تمامی عناصر مدار را از دو سر بار یا عنصر موردنظر به صورت یک منبع واقعی جریان یا ولتاژ، معادل‌سازی کرد. اگر مدار را به صورت یک منبع ولتاژ واقعی معادل‌سازی کنیم، مدار را **معادل تونن** گویند و اگر مدار را به صورت یک منبع جریان واقعی معادل‌سازی شود، آن را **معادل نورتن** مدار گویند. در اینجا با ذکر مثال‌هایی چگونگی محاسبه‌ی معادل تونن و نورتن مدارهای الکتریکی را بیان می‌کنیم. تونن و نورتن دو دانشمند بودند که در زمینه‌ی مخابرات کار می‌کردند.

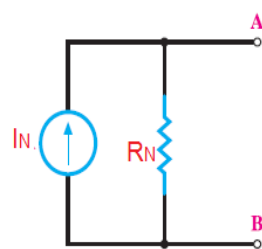
۷-۱-۱- معادل تونن مدارهای الکتریکی: برای به دست آوردن معادل تونن مدار، ابتدا بار یا عنصر موردنظر را از مدار جدا می‌کنیم، سپس اختلاف پتانسیل بین دو نقطه‌ای را که بار از آن جدا شده است، به یکی از روش‌های تحلیل که قبلاً آموخته‌ایم محاسبه می‌کنیم. ولتاژ به دست آمده که به آن **ولتاژ مدار باز** (V_{OC})^۱ گفته می‌شود، همان ولتاژ تونن (V_{th})^۲ مدار است. برای به دست آوردن مقاومت معادل مدار، تمام منابع را بی‌اثر می‌کنیم (منابع جریان باز و منابع ولتاژ اتصال کوتاه). سپس با نگاه کردن به مدار از دو نقطه‌ای که بار از آنجا باز شده، مقاومت معادل کل را به دست می‌آوریم. این مقاومت تونن مدار (R_{th})^۳ خواهد بود.



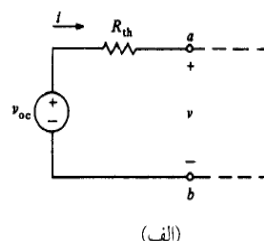
شکل (۳-۲۴): تقسیم مدار به دو بخش A و B



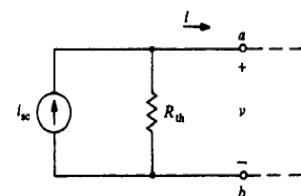
مدار معادل تونن



مدار معادل نورتن



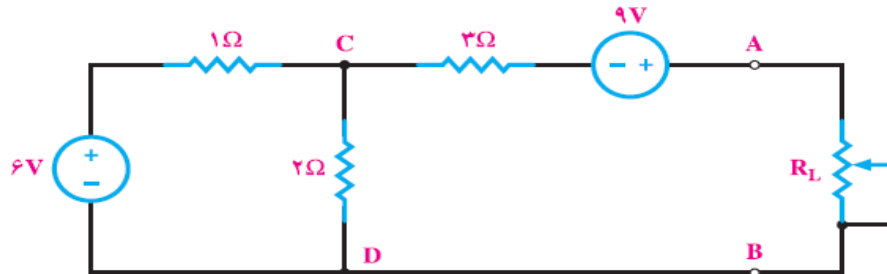
(الف)



(ب)

شکل (۳-۲۵): (الف) مدار معادل هم‌ارز تونن؛ (ب) مدار معادل هم‌ارز نورتن

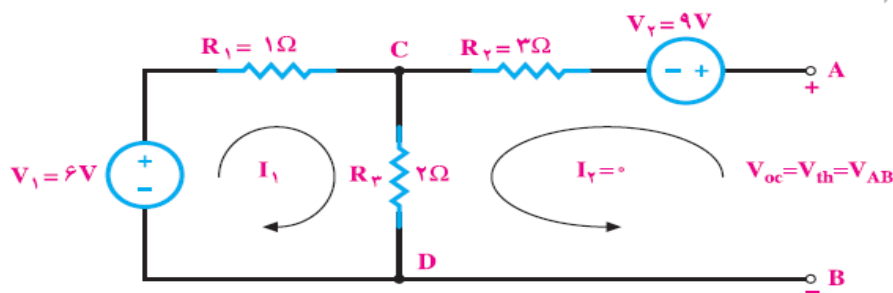
مثال ۱۰: در مدار شکل ۱-۲۳ برای این که بتوانیم اثر تغییرات بار را بررسی کنیم، معادل تونن مدار را به دست می آوریم.



شکل ۱-۲۳

راه حل:

۱- ابتدا مطابق شکل ۱-۲۴ بار را از مدار جدا کرده و سپس ولتاژ بین دو پایانه‌ی A و B را محاسبه می کنیم.



شکل ۱-۲۴

در مدار شکل ۱-۲۴ بین دو نقطه‌ی A و B باز است؛ بنابراین $I_2 = 0$ می شود و با

ل KVL به حلقه‌ی I_1 داریم: $-V_1 + R_1 I_1 + R_3(I_1 + I_2) = 0$ **KVL در حلقه‌ی ۱**

مقادیر V_1 و I_2 را جایگزین می کنیم و I_1 را به دست می آوریم.

$$-6 + 1 \times I_1 + 2(I_1 + 0) = 0 \Rightarrow I_1 = 2A$$

با به دست آوردن I_1 می توان V_{OC} را با اعمال KVL به حلقه‌ی I_2 به دست آورد:

KVL در حلقه‌ی ۲ $R_3(I_2 + I_1) - V_{OC} + V_r + R_2 I_2 = 0$

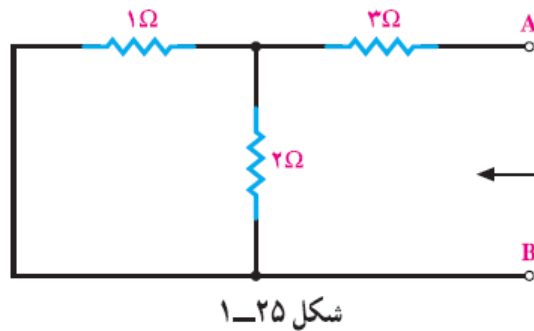
$$2(0 + 2) - V_{OC} + 9 + 3(0) = 0$$

بنابراین، داریم:

$$V_{OC} = 9 + 4 = 13V$$

$$V_{OC} = V_{th} = 13V$$

V_{OC} همان V_{th} است.

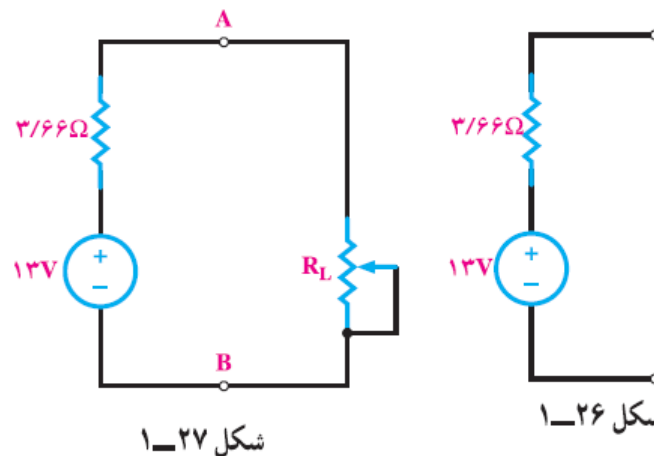


۲- اکنون منابع ولتاژ مدار را مطابق شکل ۱-۲۵ بی اثر می کنیم و مقاومت معادل آن را از دو پایانه ای A و B به دست می آوریم.

$$R_{th} = \frac{1 \times 2}{1 + 2} + 3 = 3.66 \Omega$$

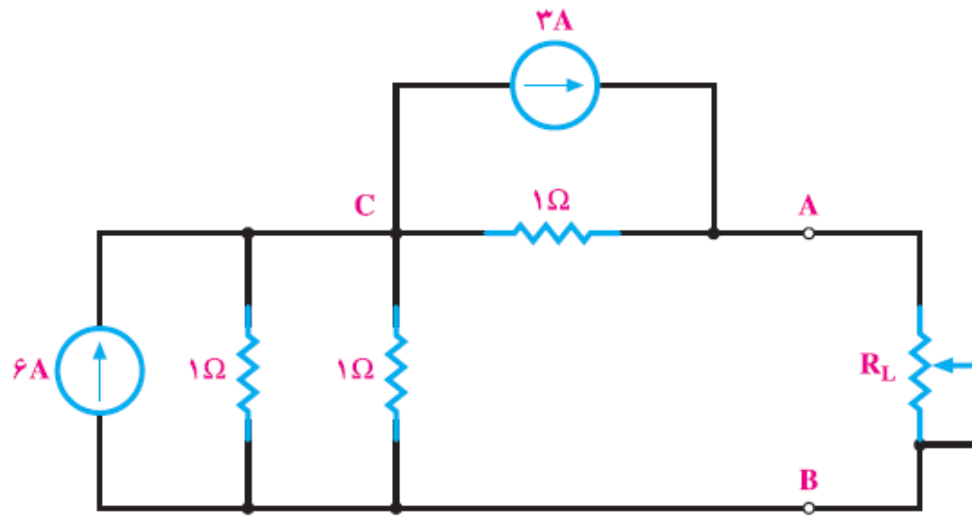
$$R_{AB} = R_{th}$$

۳- اکنون معادل تونن مدار به صورت شکل ۱-۲۶ به دست آمده است. می توان بار را به مدار معادل وصل کرد (شکل ۱-۲۷) و تحلیل لازم را انجام داد.



۲-۷-۱- معادل نورتن مدارهای الکتریکی: برای به دست آوردن معادل نورتن مدار، باز هم ابتدا بار را از مدار جدا می کنیم. برای به دست آوردن مقاومت معادل نورتن مدار (R_N) نیز درست به همان صورتی عمل می کنیم که هنگام به دست آوردن مقاومت معادل تونن انجام دادیم. پس می توان گفت مقاومت های معادل تونن و نورتن یکی هستند ($R_N = R_{th}$) اما برای محاسبه ی جریان معادل نورتن مدار، پس از باز کردن بار، دو پایانه ای را که بار از آن جا باز شده است اتصال کوتاه می کنیم و سپس جریان عبوری از این اتصال کوتاه را محاسبه می کنیم. این جریان که به جریان مدار اتصال کوتاه (I_{SC}) معروف است، همان جریان معادل نورتن مدار (I_N) می باشد.

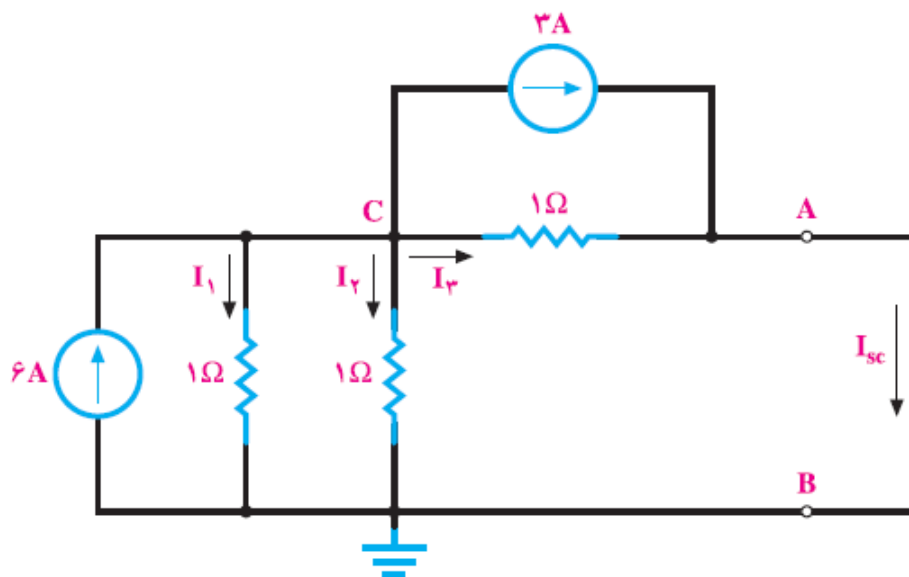
مثال ۱۱: در شکل ۱-۲۸ معادل نورتن مدار را به دست آورید.



شکل ۱-۲۸

راه حل:

۱- ابتدا بار را جدا کرده و دو پایانه‌ی A و B را اتصال کوتاه می‌کنیم (شکل ۱-۲۹).



شکل ۱-۲۹

۲- این مدار را می‌توان از روش پتانسیل گره حل کرد و I_{SC} را محاسبه نمود. توجه داشته باشید که در این حالت، گره‌های A و B به یک گره تبدیل می‌شوند. پس می‌توان نوشت:

$$\text{KCL گره C} \rightarrow -6 + I_1 + I_2 + I_3 + 3 = 0$$

$$-6 + \frac{V_c}{1} + \frac{V_c}{1} + \frac{V_c}{1} + 3 = 0 \rightarrow V_c = 1V$$

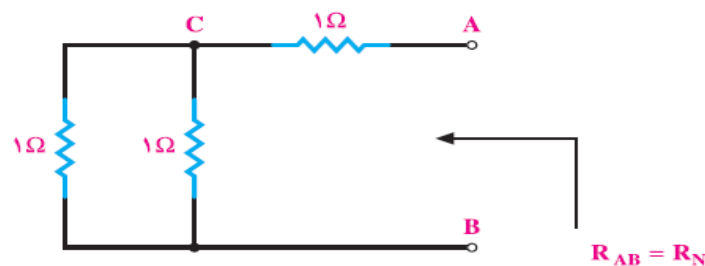
به این ترتیب، جریان در هریک از مقاومت‌ها نیز یک آمپر است، و همگی از گره C خارج می‌شوند. جریان I_{SC} نیز از مجموع دو جریان (یکی منبع ۳A و دومی جریان I_2) به دست می‌آید. پس داریم:

$$I_{SC} = 3 + 1 = 4A$$

$$I_{SC} = I_N = 4A$$

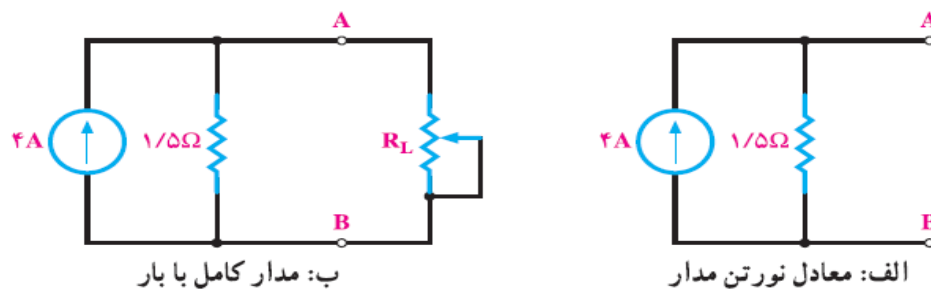
۳- مقاومت معادل نورتن با بی‌اثر کردن منابع — درحالی که مقاومت بار باز شده است — به دست می‌آید (شکل ۱-۳۰).

$$R_N = \frac{1 \times 1}{1 + 1} + 1 = 1.5 \Omega$$



شکل ۱-۳۰

۴- معادل نورتن مدار و مدار کامل به صورت شکل‌های ۱-۳۱ است.



ب: مدار کامل با بار

الف: معادل نورتن مدار

شکل ۱-۳۱

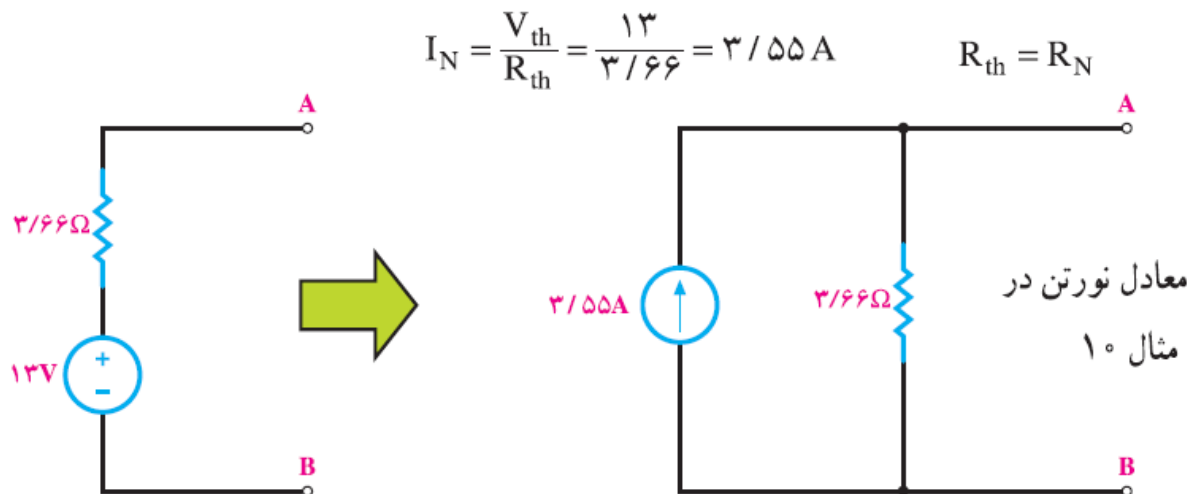
گاهی ممکن است معادل تونن مداری را داشته باشیم و بخواهیم معادل نورتن همان مدار یا به عکس معادل نورتن را داشته و به دنبال معادل تونن باشیم. در این گونه موارد به راحتی می‌توانیم با تبدیل منابع، معادل دیگر را برای مدار به دست آوریم.

مثال ۱۲: معادل نورتن مثال ۱۰ و معادل تونن مدار مثال ۱۱ را به دست آورید.

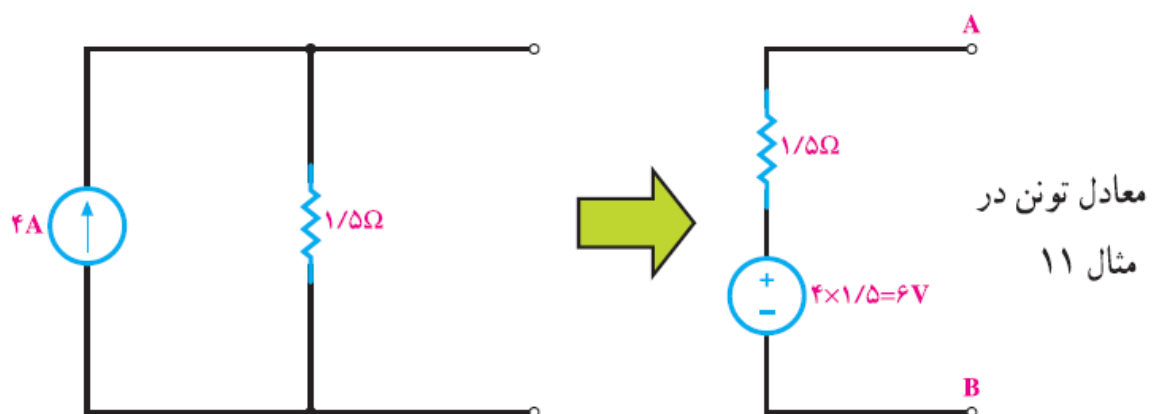
راه حل: (شکل های ۱-۳۲)

تذکر

برای جلوگیری از اشتباه و تعیین جهت صحیح جریان منابع و پلاریته ی ولتاژ آن ها به جهت جریان اتصال کوتاه (I_{SC}) و هم چنین به پلاریته ی ولتاژ مدار باز (V_{OC}) کاملاً دقت کنید.



$$V_{th} = I_N \cdot R_N = 4 \times 1/5 = 6V$$



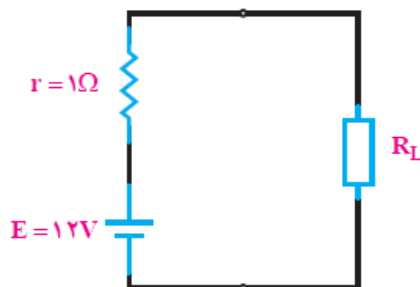
شکل ۱-۳۲

۸-۱- انتقال ماکزیمم توان به بار

یکی از مسائلی که در مدارهای الکتریکی مطرح می‌شود، این است که در چه شرایطی می‌توان ماکزیمم توان ممکن را به بار منتقل کرد. از آن جا که منابع تغذیه دارای مقاومت داخلی هستند، تمامی توانی را که به مدار تحویل می‌دهند به بار نمی‌رسد. انتقال ماکزیمم توان ممکن را به بار، **تطابق** می‌گویند. به خصوص در مدارهای الکترونیک که عناصر زیادی در مدار وجود دارد و مدار از قسمت‌ها و طبقات مختلفی درست شده است، ایجاد تطابق بین طبقات مختلف مدار و انتقال ماکزیمم توان از یک طبقه به طبقه‌ی دیگر مسئله‌ی مهمی است. در نتیجه، چگونگی انتقال ماکزیمم توان مورد توجه قرار می‌گیرد. اگر مقاومت بار صفر باشد، (اتصال کوتاه شود) چون ولتاژ دو سر خروجی صفر می‌شود پس توان آن نیز صفر خواهد بود. از طرفی، اگر مقاومت بار بی‌نهایت باشد، به دلیل صفر بودن جریان این بار توان آن نیز صفر می‌شود. بدیهی است اگر بار دارای ولتاژ و جریان باشد، دارای توان نیز خواهد بود. پس اگر مقاومت بار از صفر زیاد شود و تا بی‌نهایت افزایش یابد (مدار باز شود)، توان آن هم از صفر زیاد می‌شود و مجدداً به صفر برمی‌گردد. در این بین حالتی وجود دارد که توان مصرف‌کننده به بیشترین مقدار می‌رسد. محاسبه‌ها نشان می‌دهند که زمانی ماکزیمم توان به بار یا مصرف‌کننده منتقل می‌شود که مقاومت بار با مقاومت داخلی منبع تغذیه برابر باشد. اگر مدار دارای عناصر زیادی باشد، می‌توان با به دست آوردن معادل تونن یا نورتن مدار از دوسر بار، تمامی مدار را به صورت یک منبع ولتاژ یا جریان واقعی نشان داد. در این صورت، می‌توان گفت

زمانی ماکزیمم توان به بار منتقل می‌شود که مقاومت بار با مقاومت معادل تونن یا نورتن مدار برابر باشد. $R_L = R_{th} = R_N$ شرط ماکزیمم شدن توان بار

مثال ۱۳: یک باتری مطابق شکل ۱-۳۳ با مقاومت داخلی $r = 1\Omega$ ، نیروی محرکه‌ی $E = 12V$ ولت را تولید می‌کند. این باتری در چه جریانی می‌تواند ماکزیمم توان را به بار بدهد؟ در این حال توان مصرف‌کننده چند وات است؟



اگر مقاومت بار را به ترتیب $R_L = 3\Omega$ ، $R_L = 5\Omega$ در نظر بگیریم در هر مرحله توان مصرفی چند وات می‌شود؟

شکل ۱-۳۳

راه حل:

اولاً در صورت انتقال توان ماکزیمم مقاومت مصرف کننده باید با مقاومت داخلی مولد

$$R_L = r = 1\Omega$$

یعنی ۱ اهم - برابر باشد. پس می توان نوشت:

$$I = \frac{E}{r + R_L} = \frac{12}{1+1} = 6A$$

$$P_{\max_1} = R_L \times I^2 = 1 \times 6^2 = 36W$$

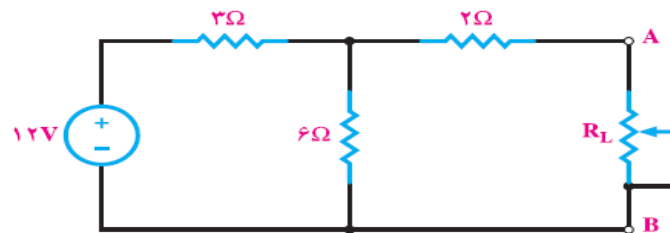
$$P_{r_1} = R_L \left(\frac{E}{r + R_L} \right)^2 = 1 \times \left(\frac{12}{1+1} \right)^2 = 36W$$

ثانیاً:

$$P_{r_2} = 0.5 \times \left(\frac{12}{1+0.5} \right)^2 = 32W$$

ملاحظه می شود توان مصرفی در هر دو حالت فرض دوم از حالت اول کم تر است؛ یعنی، وقتی مقاومت بار از ۱ اهم کمتر، یا از آن زیاد تر شود، توان مصرفی کوچک شده است. پس در مقاومت ۱ اهم، توان مصرفی ماکزیمم است.

مثال ۱۴: در مدار شکل ۱-۳۴ ماکزیمم توانی که می تواند به بار منتقل شود، چند وات است و در چه مقدار از مقاومت بار حاصل می شود؟



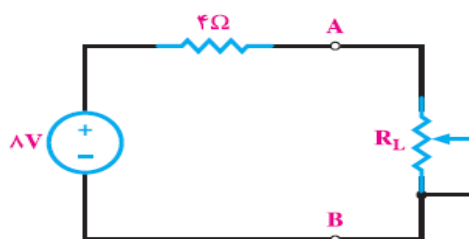
شکل ۱-۳۴

راه حل:

ابتدا مقاومت بار را از مدار جدا می کنیم و معادل تونن مدار را از دو نقطه ی A و B به دست می آوریم. با توجه به این که در صورت باز شدن R_L از مقاومت ۲ اهمی جریان نمی گذرد و ولتاژ آن صفر است، پس V_{OC} همان ولتاژ دو سر مقاومت ۶ اهم است. در نتیجه، می توان نوشت:

$$V_{th} = V_{OC} = V_{6\Omega} = 12 \times \frac{6}{3+6} = 8V$$

$$R_{th} = \frac{3 \times 6}{3+6} + 2 = 2 + 2 = 4\Omega$$



شکل ۱-۳۵

اکنون مدار را به صورت شکل ۱-۳۵ داریم:
برای انتقال ماکزیمم توان باید R_L مساوی ۴ اهم باشد
و توان ماکزیمم در R_L برابر است با:

$$P_{\max} = \left(\frac{8}{4+4} \right)^2 \times 4 = 4W$$

👉 نتیجه: اگر مقاومت بار با مقاومت داخلی منبع برابر باشد ماکزیمم توان به بار منتقل می شود و اندازه توان ماکزیمم در معادل تونن و نورتن را می توان از روابط زیر به دست آورد.

$$P_{\max} = \frac{V_{th}^2}{4R_{th}} \quad (\text{ماکزیمم توان بار براساس معادل تونن مدار})$$

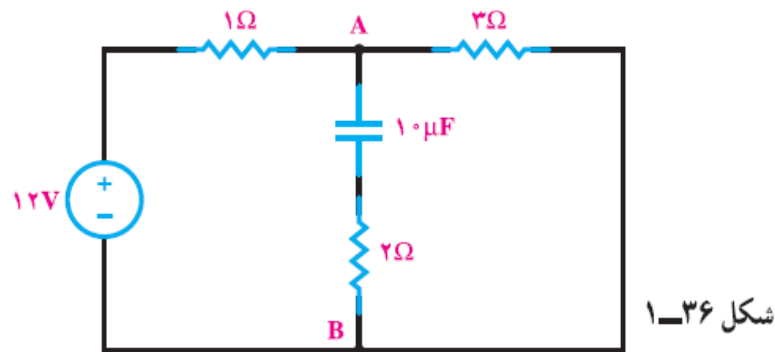
$$P_{\max} = \frac{1}{4} R_N I_N^2 \quad (\text{ماکزیمم توان بار براساس معادل نورتن مدار})$$

۹-۱- مدارهای شامل سلف و خازن

همان طور که در درس مبانی برق خواندید، وقتی یک خازن به منبع ولتاژ جریان مستقیم وصل می شود، ابتدا جریان نسبتاً بزرگی در مدار جریان می یابد و خازن رفته رفته شارژ می شود تا ولتاژ دوسر آن به اندازه ی ولتاژ منبع برسد. در همین حالت، جریان مدار هم به تدریج کاهش می یابد تا وقتی که خازن کاملاً شارژ شود. در این حالت، جریان مدار به صفر می رسد. پس از این فرآیند که حدود ۵ ثابت زمانی طول می کشد، خازن در مدار مانند یک کلید باز عمل می کند. وقتی ۵ ثابت زمانی سپری می شود، در اصطلاح می گویند مدار به حالت پایدار یا ماندگار خود رسیده است. پس در مدارهای جریان مستقیم و در حالت ماندگار عبوری از خازن صفر است و خازن به صورت یک کلید باز عمل می کند. در حالی که به اندازه ی ولتاژ اعمال شده به دوسر آن، شارژ شده است. هم چنین ملاحظه کردید که سلف در مدار با تغییرات جریان مخالف است؛ بنابراین، وقتی در یک مدار جریان مستقیم شامل سلف، کلید مدار را وصل می کنیم، ابتدا سلف با ایجاد یک ولتاژ خودالقایی در خلاف جهت ولتاژ اعمال شده، با برقراری جریان مخالفت می کند؛ و جریان کمی در مدار جاری می شود اما رفته رفته این مخالفت کاهش می یابد و از بین می رود به طوری که پس از گذشت ۵ ثابت زمانی، جریان مدار به حداکثر مقدار خود می رسد و نیروی محرکه ی خودالقایی سلف صفر می شود. به طوری که می توان گفت وقتی یک مدار جریان مستقیم شامل سلف به حالت ماندگار می رسد، ولتاژ دو سر سلف صفر است و سلف به صورت یک هادی اتصال کوتاه عمل می کند. در واقع دیگر در مدار دیده نمی شود و نقشی ندارد. البته در این حالت، به دلیل عبور جریان از سلف، مقداری انرژی در آن ذخیره می شود. ضمن این که جریان مدار ماکزیمم است. از زمان کلیدزنی تا زمان پایدار شدن را می گوئیم مدار در حالت گذراست.

مثال ۱۵: مدار شکل ۱-۳۶ در حالت ماندگار است. مطلوب است محاسبه ی:

الف - جریان مقاومت ۳ اهمی. ب - انرژی ذخیره شده در خازن.

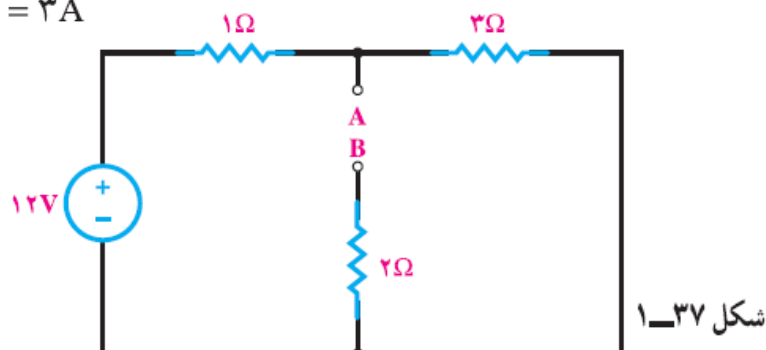


شکل ۱-۳۶

راه حل:

الف - در حالت ماندگار، خازن شارژ می شود و مانند کلید باز عمل می کند. پس مدار به صورت شکل ۱-۳۷ در می آید و جریان مقاومت ۳ اهمی برابر است با:

$$I_{3\Omega} = \frac{12}{1+3} = 3A$$



شکل ۱-۳۷

ب: اختلاف پتانسیل بین دو نقطه ی A و B برابر است با:

$$V_{AB} = 3\Omega \times 3A = 9V$$

چون از شاخه ی خازن دار جریان عبور نمی کند، پس افت ولتاژ دوسر مقاومت ۲ اهمی صفر و ولتاژ شارژ خازن همان $V_C = V_{AB} = 9V$ است. در نتیجه، داریم:

$$W_C = \frac{1}{2} C V_C^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 10^{-6} \times 9^2 = 4.05 \times 10^{-6} \text{ ژول}$$

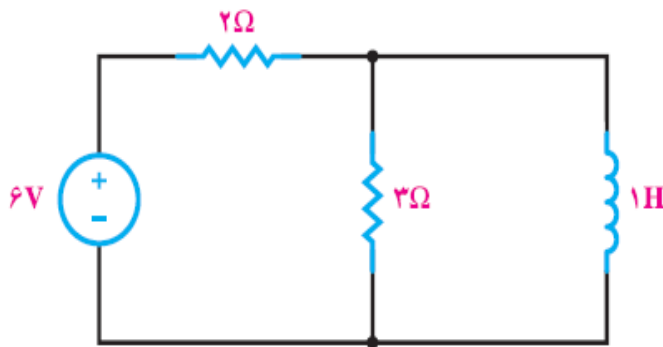
همان طور که می بینید، با وجود این که جریان خازن صفر است ولی در آن مقداری انرژی ذخیره شده است.

مثال ۱۶: مدار شکل ۱-۳۸ در حالت

پایدار است. مطلوب است محاسبه‌ی:

الف: جریان مقاومت ۳ اهمی.

ب: انرژی ذخیره شده در سلف.



شکل ۱-۳۸

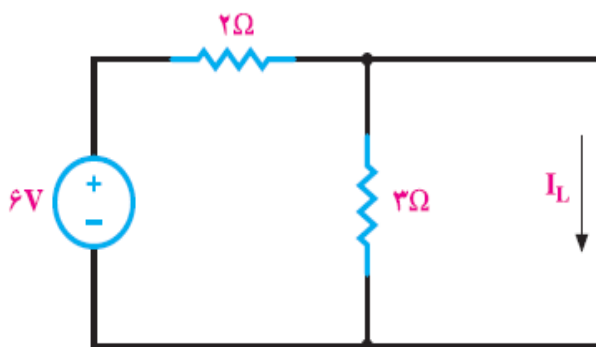
راه حل:

الف: در حالت ماندگار سلف، به صورت

اتصال کوتاه عمل می‌کند؛ یعنی مدار به صورت

شکل ۱-۳۹ در می‌آید و چون دوسر مقاومت ۳

اهمی اتصال کوتاه است، پس جریان از آن

نمی‌گذرد و داریم: $I_{3\Omega} = 0$ 

شکل ۱-۳۹

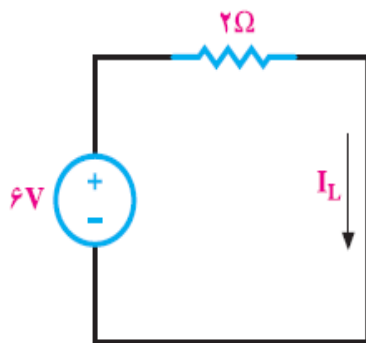
ب: در حالت ماندگار، مدار به صورت شکل ۱-۴۰ است.

در نتیجه، جریانی که از سلف می‌گذرد برابر است با:

$$I_L = \frac{6V}{2\Omega} = 3A$$

پس انرژی ذخیره شده در سلف برابر است با:

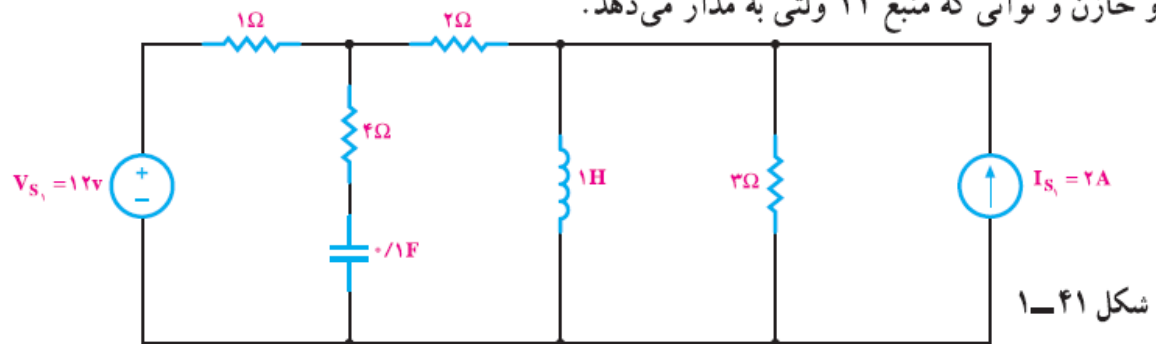
$$W_L = \frac{1}{2} L I_L^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 3^2 = 4.5 \text{ ژول}$$



شکل ۱-۴۰

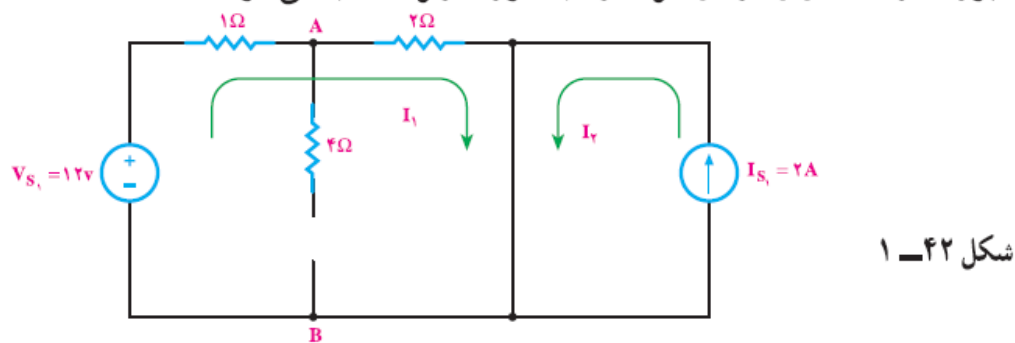
مثال ۱۷: مدار شکل ۱-۴۱ در حالت پایدار است. مطلوبست انرژی ذخیره شده در سلف

و خازن و توانی که منبع ۱۲ ولتی به مدار می‌دهد.



راه حل:

چون مدار در حالت پایدار قرار دارد، پس سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز است. در نتیجه، مقاومت ۳ اهم نیز اتصال کوتاه است و مدار به صورت شکل ۱-۴۲ درمی‌آید. در این حالت جریان عبوری از سلف و ولتاژ دو سر خازن به صورت زیر محاسبه می‌شود.



$$I_1 = \frac{12}{1+2} = 4A$$

$$I_2 = 2A$$

$$I_L = I_1 + I_2 = 4 + 2 = 6A \quad \text{جریان عبوری از سلف}$$

$$V_{1\Omega} = R_{1\Omega} \times I_1 = 1 \times 4 = 4V$$

$$V_{AB} = V_C = V_{S1} - V_{1\Omega} = 12 - 4 = 8V \quad \text{ولتاژ دو سر خازن}$$

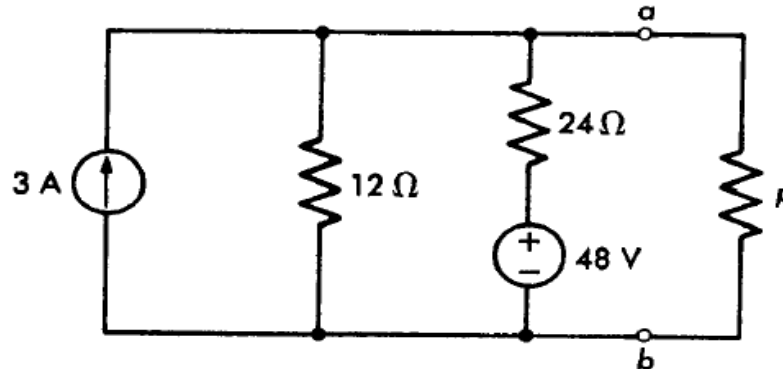
$$W_L = \frac{1}{2} L \cdot I_L^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times (6)^2 = 18J \quad \text{انرژی ذخیره شده در سلف}$$

$$W_C = \frac{1}{2} C \cdot V_C^2 = \frac{1}{2} \times 0.1 \times (8)^2 = 3.2J \quad \text{انرژی ذخیره شده در خازن}$$

توانی که منبع ۱۲ ولت به مدار تزریق می‌کند برابر است با:

$$P_{12V} = -12 \times 4 = -48 \text{ W}$$

مثال (۳-۱۰): در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۳-۲۷) ابتدا مدار هم‌ارز تونن از مدار سمت چپ دو سر a و b را بیابید. سپس مقدار R را به گونه‌ای تعیین کنید که حداکثر توان مصرفی را در آن داشته باشیم.



شکل (۳-۲۷): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۳-۱۰)

حل: در مدار موردنظر، از آنجا که مقاومت R مورد مطالعه است، لذا آن را به عنوان شبکه B در نظر گرفته و بقیه مدار در سمت چپ دو سر a و b را به عنوان شبکه خطی A در نظر می‌گیریم. حال ابتدا باید هم‌ارز معادل تونن برای شبکه A (دیده شده از دو سر a و b) را بیابیم. برای رسیدن به این هدف، از دو آزمایش مدار باز و مدار اتصال کوتاه استفاده می‌کنیم که این دو مدار بترتیب در شکل‌های (۳-۲۸-الف) و (۳-۲۸-ب) نشان داده شده است. برای به دست آوردن ولتاژ v_{oc} در مدار ارائه شده در شکل (۳-۲۸-الف)، از روش تحلیل گره استفاده می‌کنیم که خواهیم داشت:

$$2 + 3 = \frac{1}{12} v_{oc} + \frac{1}{24} v_{oc}$$

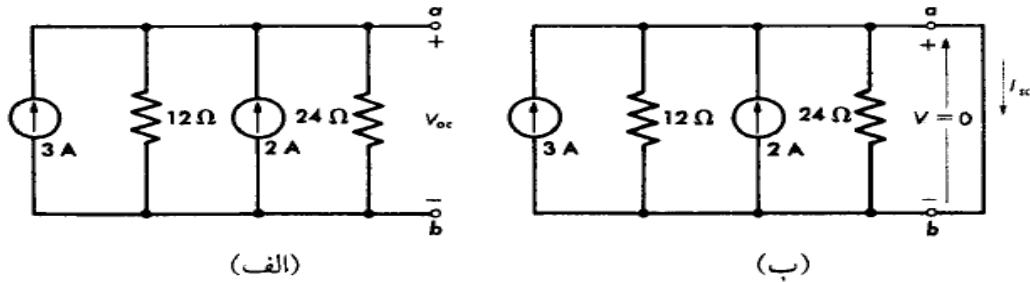
$$v_{oc} = 40V$$

حال برای محاسبه i_{sc} کافی است که دو سر a و b را مطابق با شکل (۳-۲۸-ب) اتصال کوتاه کرده و جریان عبوری از آن را (یعنی i_{sc}) محاسبه کنیم. در این مدار با توجه به آنکه با اتصال کوتاه شدن دو سر a و b ، دو سر مقاومت‌های 24Ω و 12Ω به هم وصل می‌شوند، لذا از آنها جریانی عبور نمی‌کند. پس با استفاده از قانون KCL در گره مدار خواهیم داشت:

$$2 + 3 = i_{sc} \Rightarrow i_{sc} = 5A$$

با محاسبه v_{oc} و i_{sc} ، مقدار R_{th} به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$R_{th} = \frac{v_{oc}}{i_{sc}} = \frac{40}{5} = 8\Omega$$



شکل (۳-۲۸): (الف) آزمایش مدار باز؛ (ب) آزمایش مدار اتصال کوتاه

در نتیجه مدار ارائه شده در شکل (۳-۲۹)، هم‌ارز تونن مدار را به همراه مقاومت R نشان می‌دهد. حال برای تعیین مقدار R به گونه‌ای که توان مصرفی آن حداکثر گردد، ابتدا رابطه توان مصرفی در مقاومت R را می‌یابیم. برای این منظور با استفاده از قانون KVL جریان مدار را تعیین می‌کنیم.

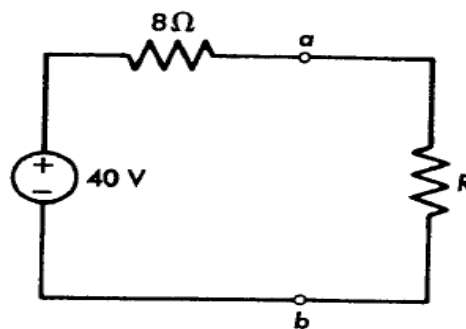
$$40 = (8 + R)I$$

$$I = \frac{40}{8 + R}$$

توان مصرفی در مقاومت R برابر است با:

$$P_R = R \cdot I^2 = R \left(\frac{40}{8 + R} \right)^2 = \frac{1600R}{(8 + R)^2}$$

برای تعیین مقدار R متناسب با حداکثر توان مصرفی باید dP_R/dR را محاسبه نموده و مساوی صفر قرار دهیم. لذا،



شکل (۳-۲۹): مدار هم‌ارز تونن معادل با شکل (۳-۲۷)

$$\frac{dP_R}{dR} = \frac{1600(8 + R)^{-2} - 2(8 + R)^{-3}1600R}{(8 + R)^4} = 0$$

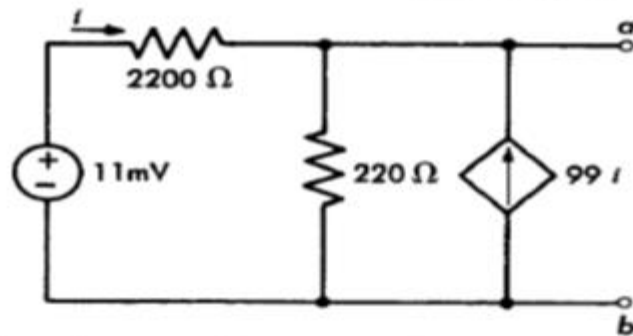
از حل این معادله اخیر، مقدار R برابر 8Ω به دست می‌آید. پس به ازای این مقاومت، حداکثر توان مصرفی در آن ایجاد می‌شود. برای تعیین مقدار حداکثر توان مصرفی، کافی است که در مدار شکل (۳-۲۹) مقدار R را برابر 8Ω انتخاب نموده و ابتدا جریان مدار را بیابیم:

$$I_{\max} = \frac{40}{8 + 8} = 2.5 \text{ A}$$

سپس توان حداکثر در مقاومت $R = 8\Omega$ برابر است با:

$$P_{R,\max} = R \cdot I_{\max}^2 = 8 \times 2.5^2 = 50 \text{ W}$$

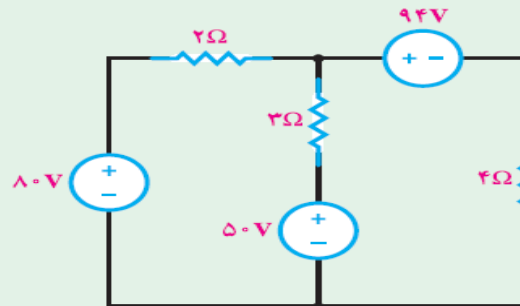
تمرین (۳-۱۰): مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۳-۳۰) مفروض است. در این مدار، هم‌ارز تونن مدار را از دو سر a و b بیابید.



شکل (۳-۳۰): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۳-۱۰)

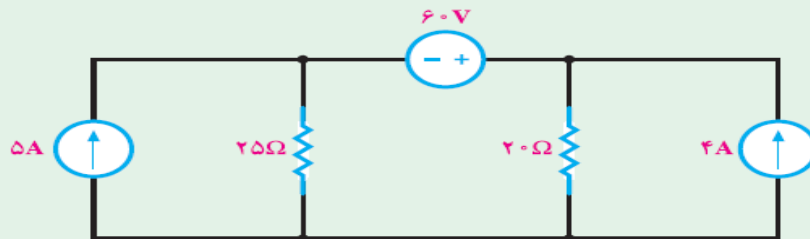
جواب: $R_{th} = 200 \Omega$, $i_{sc} = 0.5 \text{ mA}$

۱- در مدار شکل ۱-۴۳ با استفاده از روش جریان حلقه، توان مصرفی در مقاومت ۳ اهمی را حساب کنید.



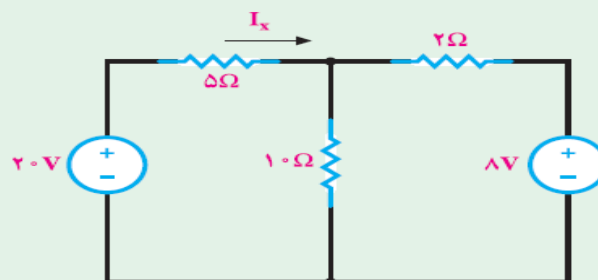
شکل ۱-۴۳

۲- در مدار شکل ۱-۴۴ با استفاده از روش جریان حلقه و بدون تبدیل منابع، توان منبع ولتاژ را محاسبه کنید.



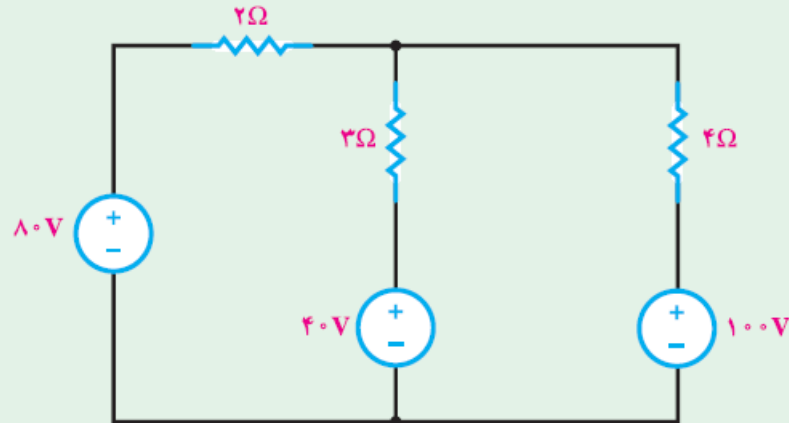
شکل ۱-۴۴

۳- با استفاده از روش پتانسیل گره و بدون تبدیل منابع جریان I_x را حساب کنید.



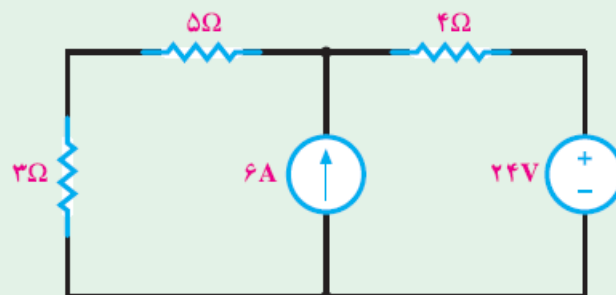
شکل ۱-۴۵

۴- در مدار شکل ۱-۴۶ با استفاده از روش پتانسیل گره و بدون تبدیل منابع توان مصرفی در مقاومت ۳ اهمی را محاسبه کنید.



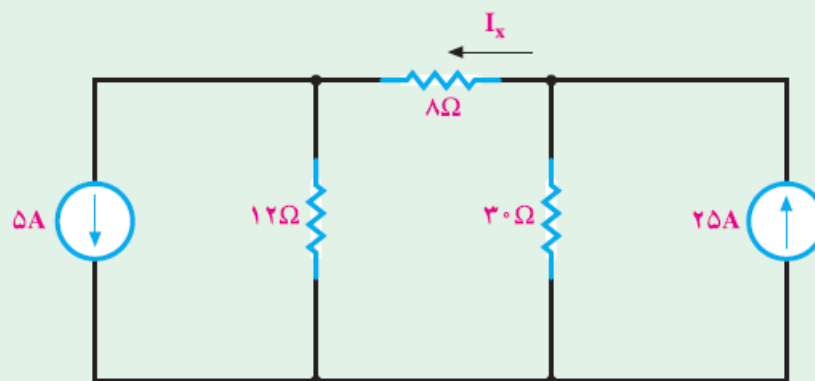
شکل ۱-۴۶

۵- در شکل ۱-۴۷ با استفاده از اصل جمع آثار، توان را در مقاومت ۳ اهمی محاسبه کنید.



شکل ۱-۴۷

۶- با استفاده از روش جمع آثار جریان I_X را در مدار شکل ۱-۴۸ حساب کنید.



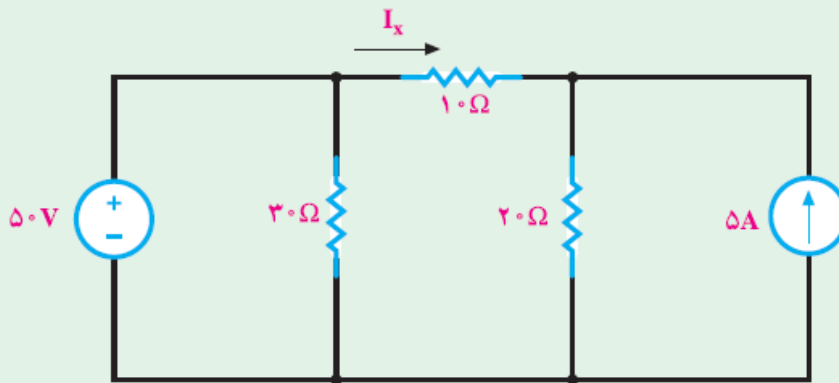
شکل ۱-۴۸

۷- در مدار شکل ۱-۴۹، مطلوب است محاسبه‌ی جریان I_X با استفاده از روش‌های

الف: اصل جمع آثار

ب: پتانسیل گره

پ: جریان حلقه.



شکل ۱-۴۹

۸- در مدار شکل ۱-۴۴ ابتدا منابع جریان را به منبع ولتاژ تبدیل کنید و سپس به کمک روش جریان حلقه، جریان منبع ۶۰ ولت را حساب کنید.

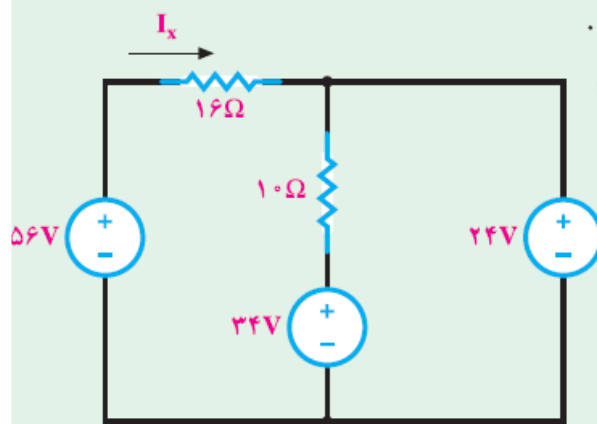
۹- در مدار شکل ۱-۴۷ ابتدا منابع ولتاژ را به منبع جریان تبدیل کنید و سپس با کمک روش پتانسیل گره جریان مقاومت 3Ω را به دست آورید.

۱۰- در مدار شکل ۱-۵۰ مطلوب است:

الف: جریان I_X .

ب: توان مصرفی در مقاومت 1Ω اهمی.

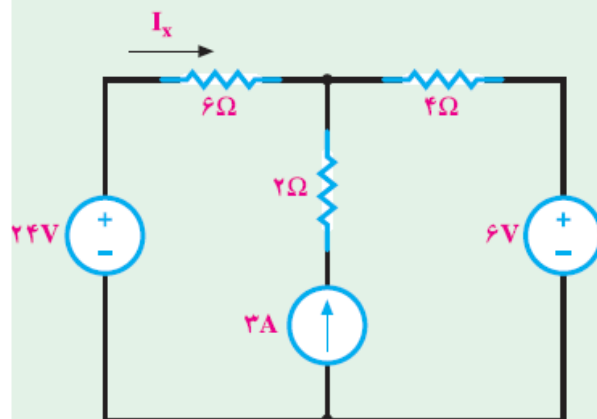
پ: توان منبع ولتاژ ۲۴ ولتی.



شکل ۱-۵۰

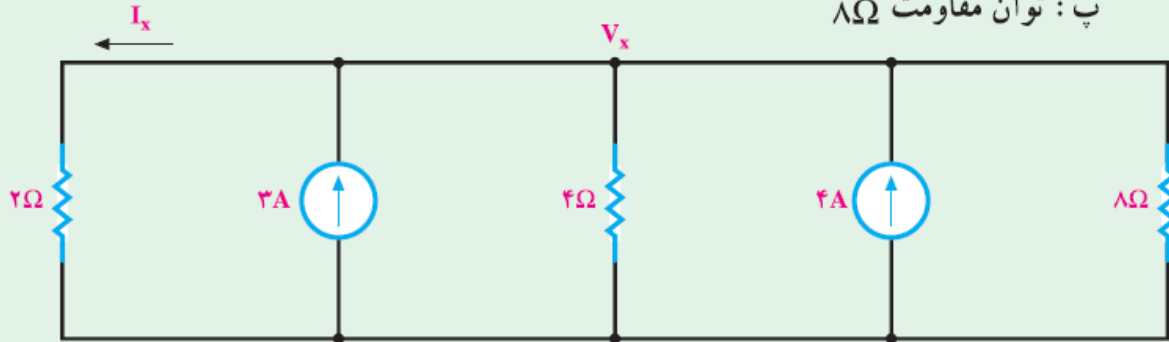
۱۱- در مدار شکل ۱-۵۱ جریان I_X را

از طریق پتانسیل گره محاسبه کنید.



شکل ۱-۵۱

۱۲- در مدار شکل ۱-۵۲ مطلوب است :

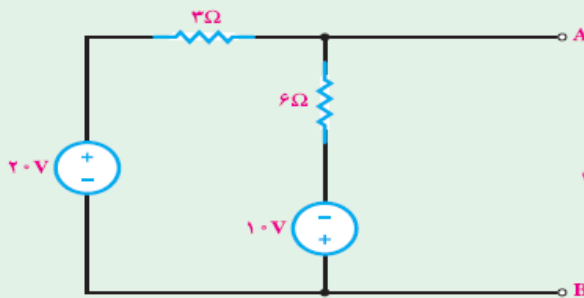
الف : پتانسیل V_X ب : جریان I_X پ : توان مقاومت 8Ω 

شکل ۱-۵۲

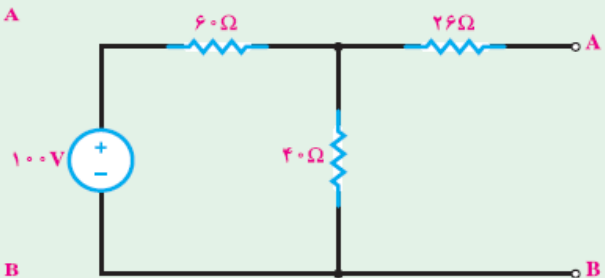
۱۳- در مدارهای شکل های ۱-۵۳ تا ۱-۵۶ مطلوب است :

الف : معادل تونن مدار از دو پایانه A و B .

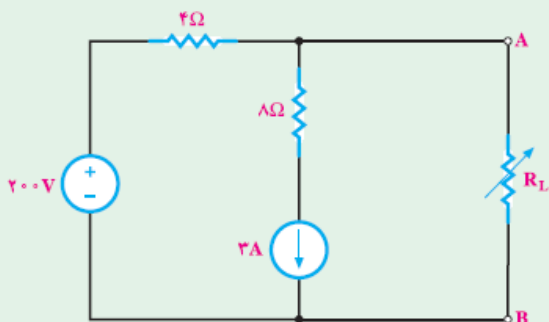
ب : معادل نورتن مدار از دو پایانه A و B .



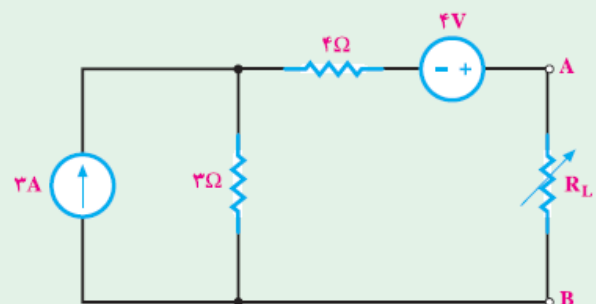
شکل ۱-۵۴



شکل ۱-۵۳

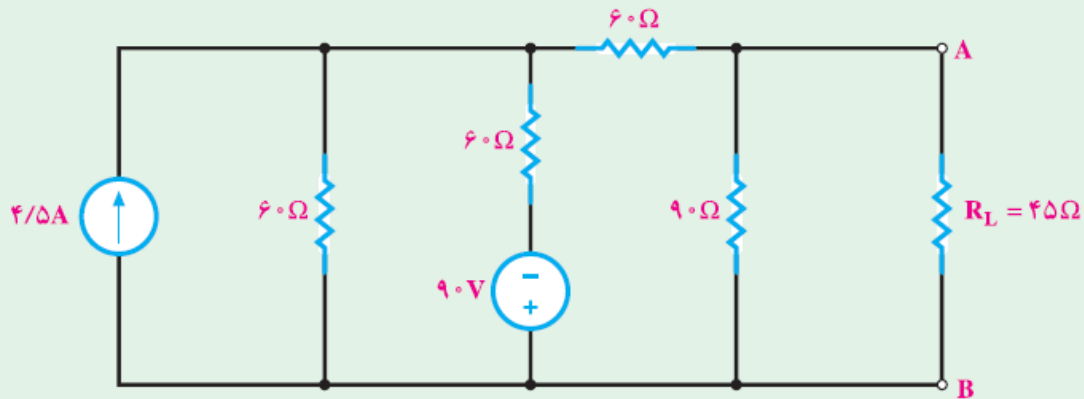


شکل ۱-۵۶



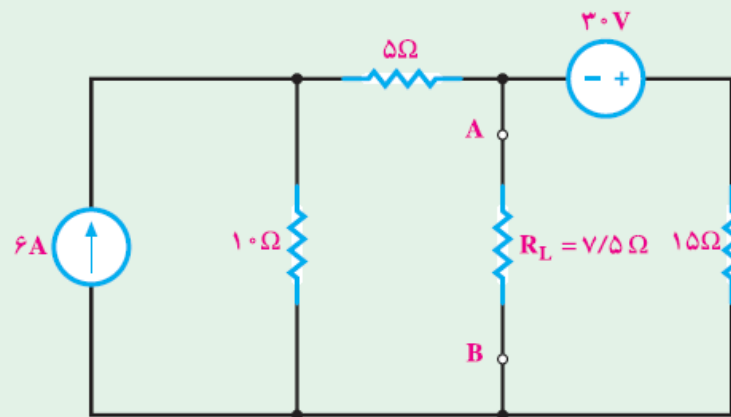
شکل ۱-۵۵

۱۴- در شکل ۱-۵۷ توان مقاومت بار (R_L) را با استفاده از معادل تونن مدار به دست آورید.



شکل ۱-۵۷

۱۵- معادل نورتن مدار شکل ۱-۵۷ را با استفاده از تبدیل تونن به نورتن به دست آورید.
۱۶- در شکل ۱-۵۸ جریان مقاومت بار (R_L) را با استفاده از معادل نورتن مدار به دست آورید.



شکل ۱-۵۸

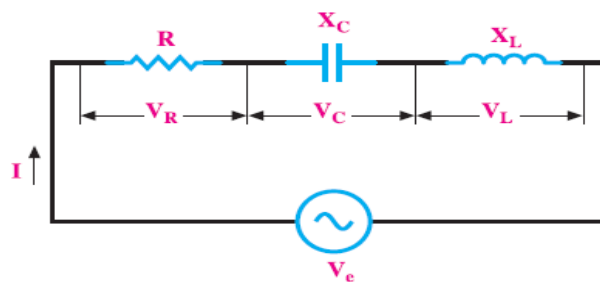
۱۷- معادل تونن مدار شکل ۱-۵۸ را با استفاده از تبدیل نورتن به تونن به دست آورید.
۱۸- در مدارهای شکل ۱-۵۹ و ۱-۶۰ پس از وصل شدن کلید و سپری شدن ۵ ثابت زمانی انرژی ذخیره شده در سلف و خازن را حساب کنید.

مدارهای R - L - C جریان متناوب

۶-۲- مدارهای R-L-C سری

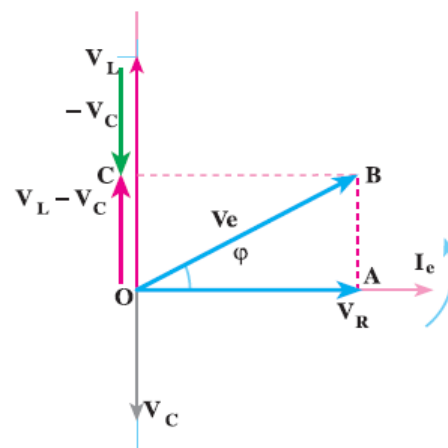
مدار الکتریکی R-L-C سری مطابق شکل ۶-۱ است. در این مدار سه عنصر R، L و C به طور متوالی اتصال دارند. اگر جریان سینوسی $i = I_m \sin(\omega t + \theta_i)$ از این مدار سری عبور کند، در دو سر مقاومت اهمی ولتاژی به معادله $v_R = I_m R (\sin \omega t + \theta_i)$ ایجاد می‌کند که این ولتاژ با جریان هم فاز است. در دو سر سلف، ولتاژی به معادله $v_L = X_L I_m \sin(\omega t + \theta_i + 90^\circ)$ و در دو سر خازن، ولتاژی به معادله $v_C = X_C I_m \sin(\omega t + \theta_i - 90^\circ)$ پدید می‌آید. به طوری که در شکل ۶-۱ مشاهده می‌شود، این ولتاژها هم فاز نیستند و راستای بردار آنها، بر روی هم منطبق نیست. به همین علت، ولتاژ کل مدار از جمع برداری رابطه ی ۶-۱ به دست می‌آید.

$$\vec{V}_e = \vec{V}_R + \vec{V}_C + \vec{V}_L \quad (6-1)$$



شکل ۶-۱- مدار R-L-C سری

دیاگرام برداری ولتاژها و جریان، مطابق شکل ۶-۲ خواهد شد. از آنجا که جریان در عناصر R، L و C یکسان است، دیاگرام برداری R-L-C سری، بر مبنای جریان در شکل ۶-۲



شکل ۶-۲- دیاگرام برداری مدار R-L-C سری

۱- اگر $X_L > X_C$ باشد، مدار در مجموع دارای خاصیت اهمی و سلفی است و ولتاژ بر جریان، تقدم فاز دارد.

۲- اگر $X_L = X_C$ باشد، مدار کاملاً خاصیت اهمی دارد و ولتاژ و جریان هم فازند. (حالت تشدید)

۳- اگر $X_L < X_C$ باشد، مدار خاصیت اهمی خازنی خواهد داشت و ولتاژ از جریان عقب تر خواهد بود.

۴- با تغییر عناصر R ، L و C می توان در مدار اختلاف فاز بین -90° تا $+90^\circ$ الکتریکی ایجاد کرد، یعنی $-90^\circ < \varphi < +90^\circ$

۱-۲-۶- محاسبه‌ی امپدانس مدار **R-L-C سری**: در مثلث OAB دیاگرام برداری مدار R-L-C سری می توان نوشت:

$$\begin{aligned}\overline{OB}^2 &= \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 \\ V_e^2 &= V_R^2 + (V_L - V_C)^2\end{aligned}\quad (6-2)$$

اگر در رابطه‌ی ۶-۲ مقادیر $V_C = I_e X_C$ و $V_L = I_e X_L$ ، $V_R = I_e R$ ، $V_e = I_e Z$ را جایگزین کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}I_e^2 Z^2 &= I_e^2 R^2 + (I_e X_L - I_e X_C)^2 \\ I_e^2 Z^2 &= I_e^2 R^2 + I_e^2 (X_L - X_C)^2 \\ Z^2 &= R^2 + (X_L - X_C)^2 \\ Z &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}\end{aligned}\quad (6-3)$$

Z : امپدانس (مقاومت ظاهری) R : مقاومت اهمی

X_L : مقاومت القایی (راکتانس سلفی) X_C : مقاومت خازنی (راکتانس خازنی)

۲-۲-۶- محاسبه‌ی ضرایب توان‌ها: در مثلث OAB شکل ۶-۲ می توان نوشت:

$$\tan \varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{X_L I - X_C I}{R I} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

بدین ترتیب، φ زاویه‌ی اختلاف فاز به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\tan \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1} \frac{X_L - X_C}{R} \quad \text{ضریب کیفیت} \quad (6-4)$$

اگر $X_L > X_C$ باشد، $\varphi > 0$ و اگر $X_L < X_C$ باشد، $\varphi < 0$ خواهد شد.

$$\cos \varphi = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{V_R}{V_e} = \frac{I \times R}{I \times Z}$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} \quad \text{ضریب قدرت مفید} \quad (6-5)$$

$$\sin \varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{|V_L - V_C|}{V} = \frac{|I \times X_L - I \times X_C|}{I \times Z}$$

$$\sin \varphi = \frac{|X_L - X_C|}{Z} \quad \text{ضریب قدرت غیر مفید} \quad (6-6)$$

۳-۲-۶- مثلث توان‌ها: توان مصرفی در مقاومت اهمی، توان اکتیو و در سلف و خازن

از نوع راکتیو است.

$$P_e = I_e^2 R = V_e I_e \cos \varphi \quad (W) \quad (6-7)$$

$$P_{dL} = I_e^2 X_L \quad \text{سلفی (V.A.R)}$$

$$P_{dC} = -I_e^2 X_C \quad \text{خازنی (V.A.R)}$$

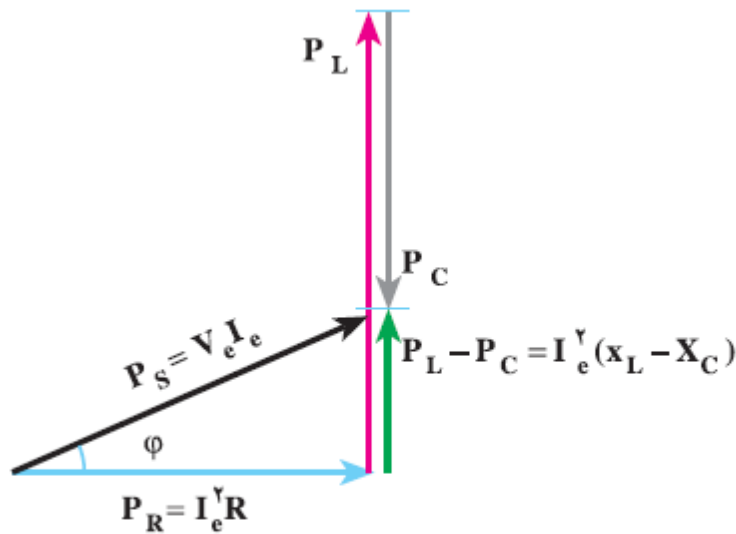
توان راکتیو کل برابر است با:

$$P_d = P_{dL} + P_{dC} = I_e^2 X_L - I_e^2 X_C = I_e^2 (X_L - X_C)$$

$$P_d = V_e I_e \sin \varphi = I_e^2 (X_L - X_C) \quad \text{(V.A.R)} \quad (6-8)$$

با توجه به توان مفید مقاومت و توان‌های راکتیو سلف و خازن مثلث توان‌ها، مطابق شکل

۳-۶ رسم می‌شود.



شکل ۳-۶- مثلث توان های مدار R-L-C سری

اگر جریان $i = I_m \sin \omega t$ ، یک مدار R-L-C سری را تغذیه کند، با توجه به روابط ولتاژهای
سر مقاومت اهمی و سلفی و خازنی و رابطه ی زمانی توان ها می توان نوشت :

$$i = I_m \sin \omega t \quad \text{معادله ی زمانی جریان مدار}$$

$$V_m = I_m \times Z$$

ولتاژ دو سر مقاومت اهمی را می توان به صورت زیر نوشت :

$$v_R = I_m R \sin \omega t$$

ولتاژ دو سر سلف برابر است با :

$$v_L = I_m X_L \sin(\omega t + \theta_i + \frac{\pi}{2})$$

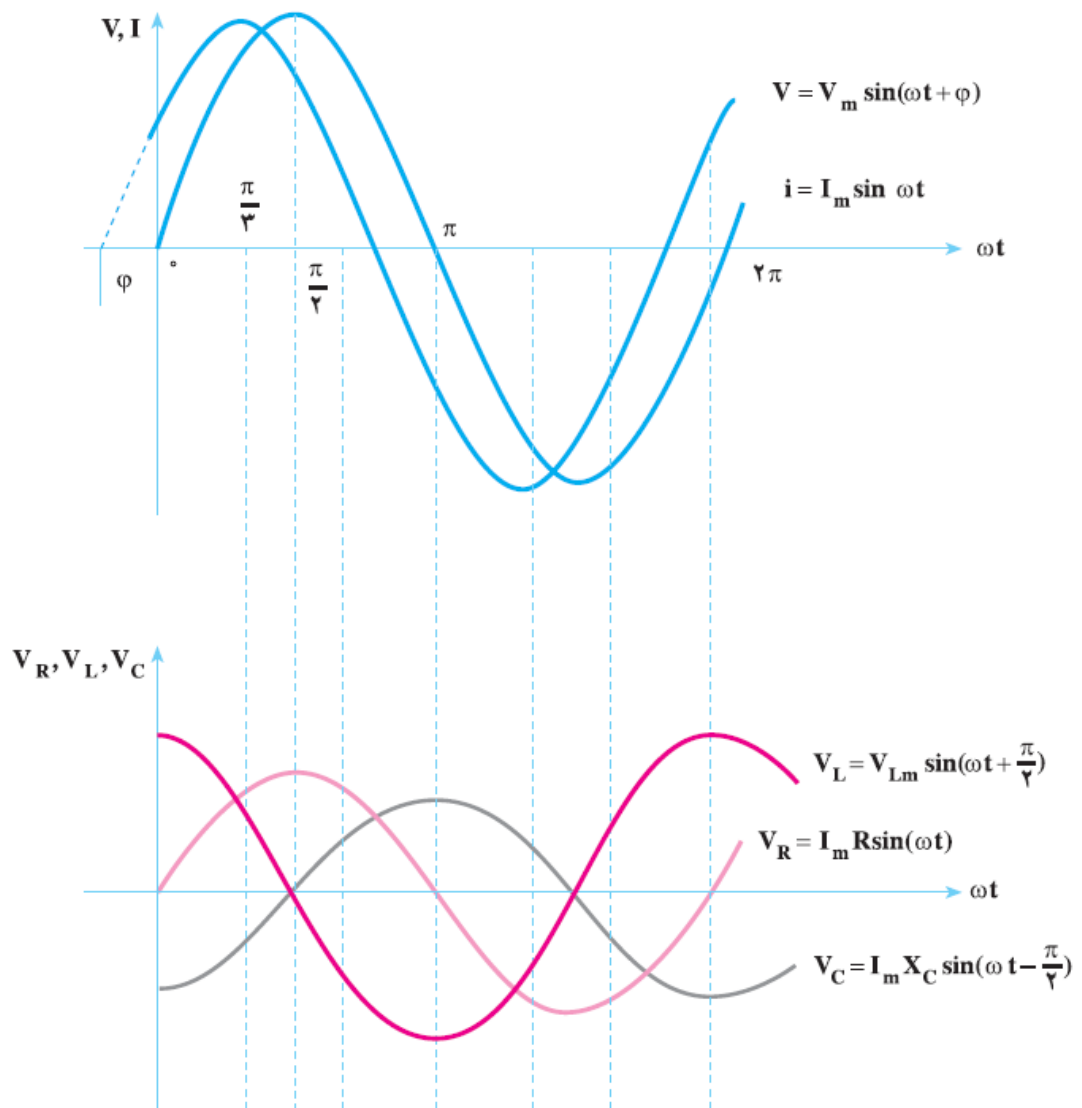
ولتاژ دو سر خازن برابر است با :

$$v_C = I_m X_C \sin(\omega t - \theta_i - \frac{\pi}{2})$$

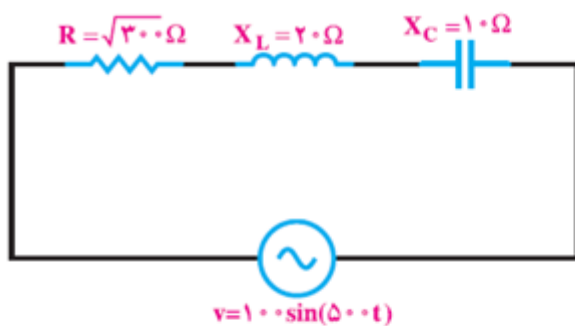
بدین ترتیب، ولتاژ کل مدار محاسبه می شود :

$$v = V_m \sin(\omega t + \theta_v)$$

منحنی تغییرات توابع بالا در شکل ۴-۶ مشاهده می شود.



شکل ۴-۶- منحنی تغییرات توابع زمانی جریان کل، ولتاژ کل و ولتاژ دو سر مقاومت اهمی، سلفی، خازنی مدار R-L-C سری (دامنه‌ها فرضی و با فرض $R > X_L > X_C$ رسم شده‌اند)



مثال: در مدار شکل مقابل مطلوب

است:

الف - امپدانس مدار،

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(\sqrt{300})^2 + (20 - 10)^2} = 20 \Omega$$

ب- جریان منبع ولتاژ و معادله‌ی زمانی آن،

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{\sqrt{300}}{20} = \frac{10\sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ضرب قدرت}$$

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{R}{Z}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^\circ \rightarrow \varphi = \theta_v - \theta_i \Rightarrow 30^\circ = 0^\circ - \theta_i \Rightarrow \theta_i = -30^\circ$$

$$I_m = \frac{V_m}{Z} = \frac{100}{20} = 5A, \quad I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = 2.5\sqrt{2} = 3.53A$$

$$i = 5 \sin(50^\circ t - 30^\circ) \quad \text{می‌باشد؛ بنابراین، جریان پس فاز است.} \quad X_L > X_C$$

پ- ولتاژ دوسر L، R و C و معادلات زمانی آن‌ها.

$$V_{R_m} = RI_m = \sqrt{300} \times 5 = 5\sqrt{300} = 50\sqrt{3}V$$

$$v_R = 50\sqrt{3} \sin(50^\circ t - 30^\circ) \quad \text{هم فاز جریان}$$

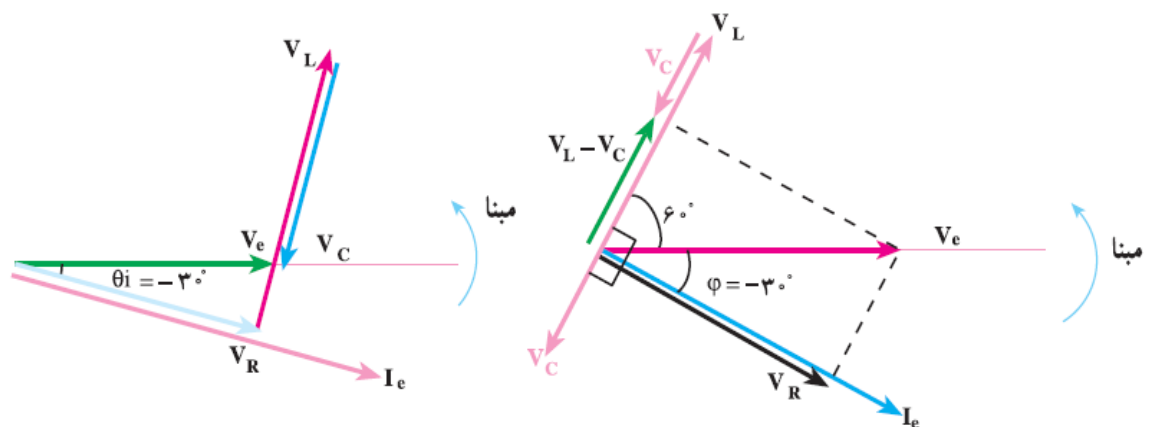
$$V_{L_m} = X_L \cdot I_m = 20 \times 5 = 100V$$

$$v_L = 100 \sin(50^\circ t + 60^\circ) \quad 90^\circ \text{ درجه جلوتر از جریان}$$

$$V_{C_m} = X_C \cdot I_m = 10 \times 5 = 50V$$

$$v_C = 50 \sin(50^\circ t - 120^\circ) \quad 90^\circ \text{ درجه عقب‌تر از جریان}$$

ت- رسم دیاگرام برداری ولتاژها و جریان.



شکل ۵-۶- دیاگرام برداری ولتاژها و جریان مدار

ث- توان مصرفی و مثلث توان‌ها.

$$P_e = V_e I_e \cdot \cos \varphi = \frac{100}{\sqrt{2}} \times \frac{5}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 125\sqrt{3} \quad W$$

چون $X_L > X_C$ زاویه ϕ مثبت شده است، P_d نیز مثبت می‌شود.

$$P_d = V_e I_e \sin \phi = \frac{100}{\sqrt{2}} \times \frac{5}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = +125 \text{ V.A.R}$$

$$P_s = V_e I_e = \frac{100}{\sqrt{2}} \times \frac{5}{\sqrt{2}} = 250 \text{ V.A}$$

توان‌ها را به‌روش زیر می‌توان محاسبه کرد. بدیهی است در هر دو حالت جواب‌ها یکی است.

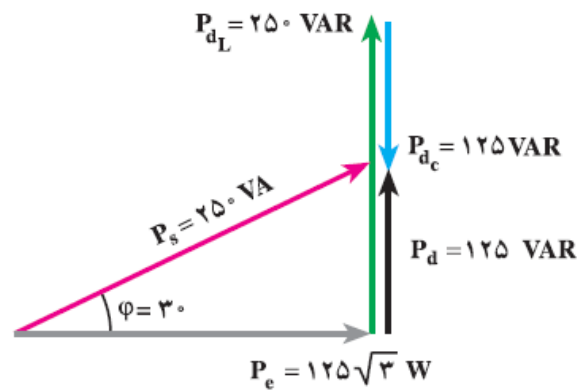
$$P_e = R \cdot I_e^2 = \sqrt{300} \times \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = 10\sqrt{3} \times \frac{25}{2} = 125\sqrt{3} \text{ W}$$

$$P_{dL} = X_L \cdot I_e^2 = 2 \times \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = +250 \text{ V.A.R}$$

$$P_{dC} = -X_C \cdot I_e^2 = -1 \times \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = -125 \text{ V.A.R}$$

$$\vec{P}_d = \vec{P}_{dL} + \vec{P}_{dC} = 250 - 125 = +125 \text{ V.A.R}$$

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = \sqrt{(125\sqrt{3})^2 + (125)^2} = 250 \text{ V.A}$$



شکل ۶-۶

توجه کنید اگر در روابط بالا $R=0$ باشد مدار LC و اگر $X_L=0$ مدار RC و اگر $X_C=0$ باشد مدار را RL گویند

۵-۶- رزناس در مدارهای R-L-C سری

فرض می‌کنیم مقادیر R ، C و L در مدار R-L-C سری در طول تغییرات فرکانس همواره ثابت بمانند. در فرکانس‌های کم، $X_C = \frac{1}{\omega C}$ ، راکتانس خیلی زیاد از خود نشان می‌دهد. زیرا در جریان مستقیم، $f = 0$ است، در حالت پایدار راکتانس مدار آن قدر زیاد می‌شود که جریان مدار عملاً به صفر می‌رسد. زمانی که فرکانس منبع تغذیه افزایش می‌یابد، راکتانس خازنی کاهش می‌یابد. در مقابل، راکتانس سلفی با توجه به $X_L = \omega L$ افزایش می‌یابد. با توجه به رابطه‌ی ۳-۶، خازن و سلف در امپدانس مدار R-L-C سری رفتار متقابل دارند. در روند افزایش فرکانس از صفر به مقدار ∞ ، زمانی فرا می‌رسد که راکتانس خازنی و سلفی یک‌دیگر را خنثی می‌کنند. به عبارت دیگر، عبارت $X_L - X_C$ در رابطه‌ی ۳-۶ برابر صفر و ضریب توان مدار برابر یک است؛ چون $Z=R$ می‌شود. در این حالت، در مدار R-L-C هیچ‌گونه توان راکتیو با منبع مبادله نمی‌شود. این حالت از مدار R-L-C را حالت **تشدید** یا **رزناس** گویند. فرکانس رزناس با توجه به مطالب گفته شده به قرار زیر محاسبه می‌شود:

$$X_L - X_C = 0 \quad (6-24)$$

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$$

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow L\omega^2 C = 1 \quad (6-25)$$

$$\omega = \omega_r$$

$$L(\omega_r)^2 C = 1$$

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (6-26)$$

رابطه فرکانس رزناس نظیر مقدار محاسبه شده در مدارهای L-C است.

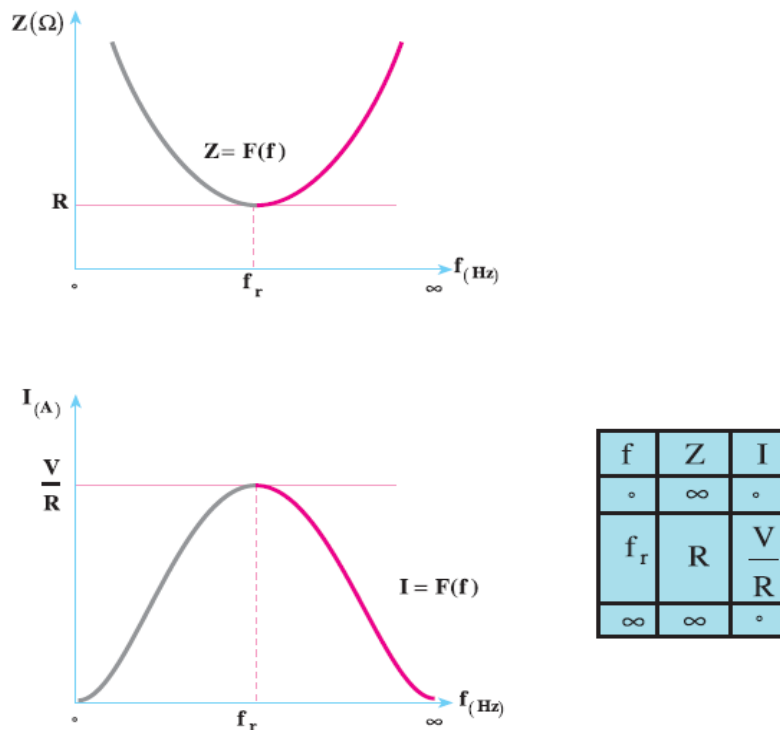
۱-۵-۶- رسم تابع تغییرات امپدانس و جریان مدار R-L-C سری: در فرکانس تشدید

با توجه به رابطه‌ی $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ ، امپدانس Z با مقاومت اهمی مدار مساوی می‌شود؛ زیرا $X_L = X_C$ شده و امپدانس به حداقل مقدار، یعنی R تنزل می‌کند. چون $I_e = \frac{V_e}{Z}$ است، در

حالت تشدید، Z حداقل است. جریان I ، حداکثر مقدار را خواهد داشت و اندازه‌ی جریان $I_e = \frac{V_e}{R}$ است. با افزایش فرکانس از موقعیت تشدید، امپدانس مدار R-L-C به علت رشد $X_L = \omega L$ مجدداً افزایش می‌یابد و جریان رو به کاهش می‌گذارد. زمانی که $f \rightarrow \infty$ (فرکانس به بی‌نهایت میل می‌کند) امپدانس خیلی زیاد می‌شود؛ مجدداً جریان به صفر می‌رسد و مدار R-L-C باز می‌شود.

یادآوری می‌کنیم که در فرکانس‌های خیلی زیاد، راکتانس خازنی نیز صفر می‌شود. از طرف دیگر، راکتانس سلفی یک محدوده‌ی فرکانسی دارد و در آن محدوده‌ی فرکانسی اثرات سلف ظاهر می‌شود. در فرکانس‌های بسیار زیاد، سلف خاصیت خود را از دست می‌دهد و کمیت‌های مدار با روابطی که تا به حال مطالعه کردیم، قابل محاسبه نخواهند بود. این خاصیت سلف در طراحی مدارهای الکترونیکی و مخابراتی محدودیت‌هایی ایجاد می‌کند و به همین دلیل، برای هر فرکانس دلخواه نمی‌توان مداری طراحی کرد.

در محدوده‌ی فرکانسی صفر تا حالت تشدید (f_r)، مدار R-L-C، خاصیت خازنی از خود نشان می‌دهد. این خاصیت در محدوده‌ی فرکانسی تشدید به بالا، به خاصیت سلفی تبدیل می‌شود. با توجه به مطالب گفته شده تابع تغییرات $I=F(f)$ و $Z=F(f)$ مطابق شکل‌های ۱۹-۶ رسم می‌شوند.



شکل ۱۹-۶ منحنی‌های تغییرات $I=F(f)$ و $Z=F(f)$ در مدار R-L-C سری

۲-۵-۶ ضریب کیفیت مدار R-L-C سری در حالت رزونانس:

$$Q = \frac{\text{ماکزیمم انرژی ذخیره شده}}{\text{انرژی مصرفی در یک سیکل}}$$

$$Q = \frac{2\pi(W_{(L)} + W_{(C)})_{\max}}{I_e^2 \cdot R \cdot T} = \frac{2\pi \left(\frac{1}{2} I_L^2 L + \frac{1}{2} C V_C^2 \right)_{\max}}{I_e^2 \cdot R \cdot T} \quad (6-27)$$

با توجه به شکل ۴-۶ وقتی جریان ماکزیمم می‌شود، V_C صفر می‌شود. هم‌چنین وقتی V_C ماکزیمم می‌شود، جریان مدار یعنی I_{Lm} نیز صفر خواهد شد. بنابراین، در رابطه‌ی ۲۷-۶ یکی از

قسمت‌های $\frac{1}{2} I_{Lm}^2 L$ و $\frac{1}{2} C V_{Cm}^2$ در حالت ماکزیمم وجود دارد.

$$Q_C = \frac{2\pi \left(\frac{1}{2} I_{Lm}^2 L \right)}{I_e^2 \cdot R \cdot T} = \frac{2\pi \left(\frac{1}{2} C V_{Cm}^2 \right)}{I_e^2 \cdot R \cdot T}$$

$$Q_C = \frac{2\pi \left(\frac{1}{2} \times 2 I_e^2 L \right)}{I_e^2 \times R \times \frac{2\pi}{\omega}} = \frac{L\omega}{R} \quad (6-28)$$

$$Q = \frac{2\pi \left(\frac{1}{2} \times C V_{cm}^2 \right)}{I_e^2 \times R \cdot T} = \frac{2\pi \times \frac{1}{2} C \times \frac{I_m^2}{C^2 \omega^2}}{I_e^2 \times R \times \frac{2\pi}{\omega}}$$

$$Q = \frac{1}{RC\omega} = \frac{X_C}{R} \quad (6-29)$$

اگر ω را برای فرکانس تشدید به ω_0 نشان دهیم، ضریب کیفیت مدار در فرکانس تشدید از رابطه‌ی ۳۰-۶ محاسبه می‌شود.

$$Q_0 = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{C\omega_0 R} \quad (6-30)$$

۳-۵-۶- پهنای باند (Band Width): پهنای باند به محدوده‌ای از فرکانس مدارهای R-L-C گفته می‌شود که در آن، اندازه‌ی جریان از $\frac{1}{\sqrt{2}}$ برابر مقدار ماکزیمم بیش‌تر باشد.

برای تعیین پهنای باند، منحنی تغییرات جریان را $I=F(f)$ با خط $I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ قطع می‌دهیم. این خط منحنی $I=F(f)$ را در دو نقطه‌ی f_L و f_H قطع می‌کند. محدوده‌ی فرکانسی $f_H - f_L$ را **پهنای باند** می‌گویند.

$$B.W = f_H - f_L \quad (6-31)$$

f_H را **فرکانس قطع بالا** و f_L را **فرکانس قطع پایین** می‌گویند. از خصوصیات مهم f_H و f_L آن است که فرکانس تشدید f_r در میان f_H و f_L قرار دارد؛ به طوری که:

$$f_r = \frac{f_H + f_L}{2} \quad (6-32)$$

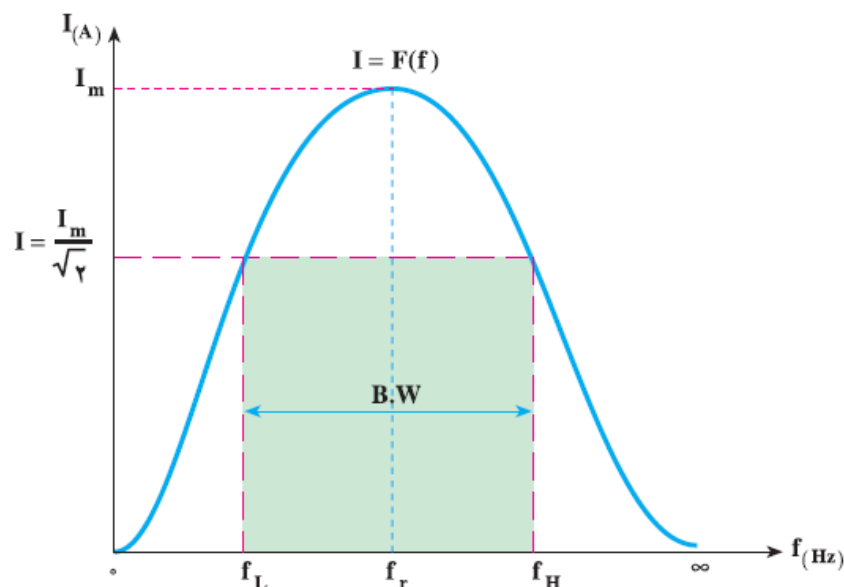
رابطه‌ی فوق برای $Q \geq 5$ صادق است ولی $f_r = \sqrt{f_L \cdot f_H}$ همواره صادق است. اگر توان ماکزیمم را به صورت $P_m = I_m^2 \cdot R$ در نظر بگیریم، مقدار توان در f_H و f_L به قرار زیر محاسبه خواهد شد. P_m توان مدار به ازای I_m (جریان در حالت تشدید) است.

$$P_{H,L} = I^2 \times R = \left(\frac{I_m}{\sqrt{2}} \right)^2 \times R = \frac{I_m^2 R}{2} = \frac{P_m}{2} \quad (6-33)$$

رابطه‌ی ۶-۳۳ بیان می‌کند که در فرکانس قطع بالا و پایین، توان مصرفی نصف توان در حالت تشدید است. به همین دلیل، فرکانس‌های f_H و f_L را **فرکانس‌های نیم توان** نیز می‌گویند. بین پهنای باند و فرکانس تشدید رابطه‌ی ۶-۳۴ برقرار است.

$$B.W = \frac{f_r}{Q} = \frac{R}{\pi L} \quad \text{برای } Q > 5 \quad (6-34)$$

در شکل ۶-۲۰ مشاهده می‌کنید، مدار R-L-C سری برای فرکانس‌های بین f_H و f_L ، جریان مدار از مقدار $\frac{I_m}{\sqrt{2}}$ بیش‌تر است. به عبارت دیگر، تابع $I = F(f)$ در محدوده‌ی $f_H - f_L$ از مقدار بیش‌تری برخوردار است. بدین علت، به این نوع مدارها **فیلترهای میان‌گذر** می‌گویند که در مدارهای مخابراتی و الکترونیکی کاربرد فراوانی دارد.



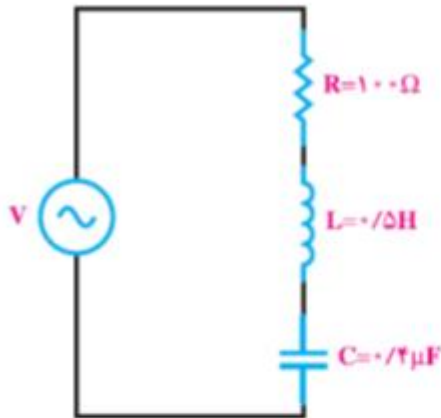
شکل ۶-۲۰ - پهنای باند مدار R-L-C سری

مثال: در مدار شکل ۶-۲۱ مطلوب است:

الف - فرکانس رزونانس.

ب - پهنای باند.

پ - فرکانس‌های نیم توان.



شکل ۶-۲۱

راه حل:

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{L.C}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0.5 \times 4 \times 10^{-6}}}$$

الف -

$$f_r = 356 \text{ Hz}$$

$$B.W = \frac{f_r}{Q}$$

ب -

$$Q = \frac{L\omega_r}{R} = \frac{2\pi f_r L}{R} = \frac{2 \times 3.14 \times 356 \times 0.5}{100} = 11.18$$

$$B.W = \frac{356}{11.18} = 31.8 \text{ Hz}$$

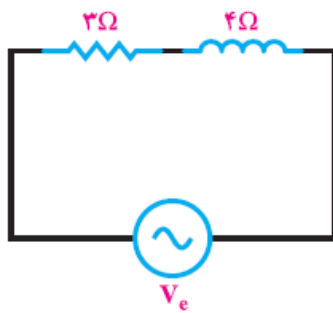
پ -

$$f_H = f_r + \frac{B.W}{2} = 356 + \frac{31.8}{2} = 372 \text{ Hz}$$

$$f_L = f_r - \frac{B.W}{2} = 356 - \frac{31.8}{2} = 340.1 \text{ Hz}$$

توجه

در مدار R.L.C سری پهنای باند به صورت $B.W = \frac{R}{2\pi L}$ درمی آید.



شکل ۳-۶

مثال: مدار R-L سری شکل ۳-۶ با ولتاژ متناوبی به معادله، $V(t) = 5 \sin 40^\circ t$ تغذیه می شود مطلوب است:

الف: امپدانس مدار. از رابطه ی ۳-۹ می توان محاسبه کرد:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Omega$$

ب: معادله ی جریان مدار: از رابطه ی ۳-۱ می توان محاسبه کرد:

$$I_m = \frac{V_m}{Z} = \frac{5}{5} = 1 \text{ A}$$

و با توجه به رابطه ی ۳-۱۱ می توان نوشت:

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{X_L}{R} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{4}{3} \right) = 53^\circ \quad \text{و} \quad \theta_V = 0^\circ$$

$$\varphi = \theta_V - \theta_I$$

$$53^\circ = 0^\circ - \theta_I \Rightarrow \theta_I = -53^\circ$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta_i) \rightarrow i(t) = 1 \sin(40^\circ t - 53^\circ)$$

پ: اندازه ی ضریب خودالقایی سلف:

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{4}{40} = 0.1 \text{ H}$$

ت: معادله ی ولتاژ دو سر مقاومت اهمی R و القایی X_L .

با توجه به رابطه ی ۳-۵ می توان نوشت:

$$V_{R_m} = R \cdot I_m = 3 \times 1 = 3 \text{ V}$$

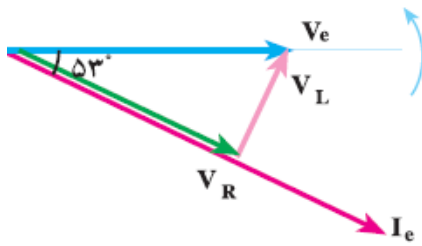
$$v_{R(t)} = R \cdot I_m \sin(\omega t + \theta_i) = 3 \sin(40^\circ t - 53^\circ)$$

و با توجه به رابطه ی ۳-۶ می توان نوشت:

$$V_{L_m} = X_L \cdot I_m = 4 \times 1 = 4 \text{ V}$$

$$v_{L(t)} = X_L \cdot I_m \sin \left[(\omega t + \theta_i) + \frac{\pi}{2} \right] = 4 \sin(40^\circ t - 53^\circ + 90^\circ) = 4 \sin(40^\circ t + 37^\circ)$$

ث: رسم دیاگرام برداری ولتاژها و جریان مدار.



ج- توان‌ها و مثلث توان

$$V_e = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{5^\circ}{\sqrt{2}} \text{ و } I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{1^\circ}{\sqrt{2}}$$

$$P_s = V_e \cdot I_e = \frac{5^\circ}{\sqrt{2}} \times \frac{1^\circ}{\sqrt{2}} = 25^\circ \text{ VA}$$

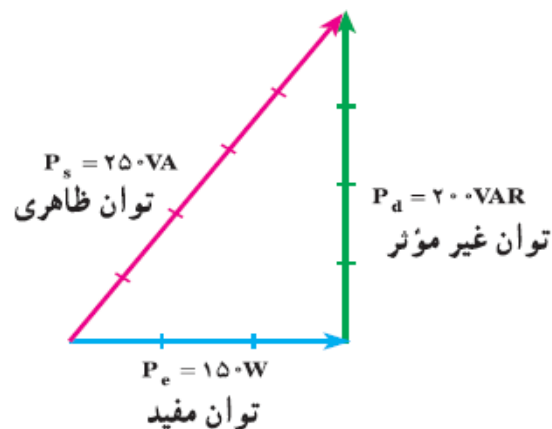
با توجه به رابطه‌ی ۳-۲۲ داریم:

و با توجه به رابطه‌ی ۳-۱۸ داریم:

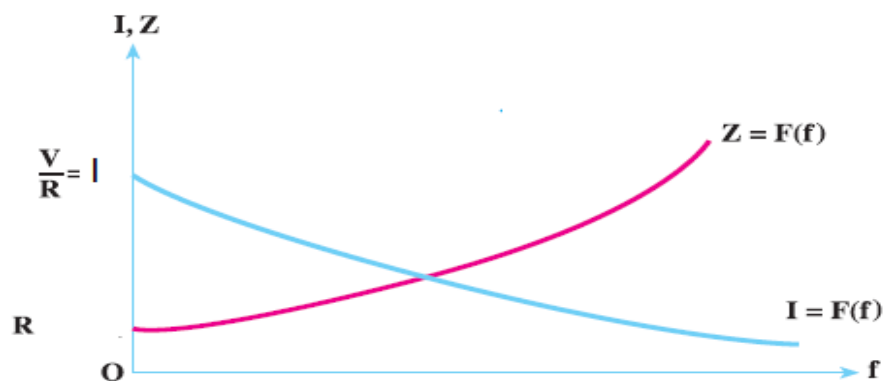
$$P_e = V_e I_e \cos \phi = P_s \cdot \cos \phi = 25^\circ \cdot \cos(53^\circ) = 25^\circ \times 0.6 = 15^\circ \text{ W}$$

و با توجه به رابطه‌ی ۳-۲۱ داریم:

$$P_d = V_e I_e \sin \phi = P_s \cdot \sin \phi = 25^\circ \cdot \sin 53^\circ = 25^\circ \times 0.8 = 20^\circ \text{ VAR}$$



تأثیر فرکانس در مدار RL



الف: اثر فرکانس در مدار R-L سری

مثال: در یک مدار R-C سری، تابع تغییرات ولتاژ و جریان به ترتیب $V = 220 \sin(100\pi t)$ و $i = 5 \sin(100\pi t + 60^\circ)$ است. مطلوب است:

- الف - عناصر مدار R و C
 ب - معادله‌ی زمانی ولتاژ دو سر مقاومت اهمی و خازن.
 پ - رسم منحنی تغییرات ولتاژ و جریان کل و ولتاژ دوسر مقاومت اهمی و خازن.
 ت - رسم دیاگرام برداری ولتاژها.
 ث - محاسبه‌ی توان‌ها و رسم مثلث توان‌ها.
 راه حل:

الف - از معادلات ولتاژ و جریان می‌توان نوشت:

$$V_e = \frac{220}{\sqrt{2}} = 155.6 \text{ ولت} \quad \text{و} \quad I_e = \frac{5}{\sqrt{2}} = 3.53 \text{ A}$$

$$\omega = 100\pi \quad \text{و} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{100\pi}{2\pi} = 50 \text{ Hz}$$

$$\varphi = \theta_v - \theta_i = 0 - 60^\circ = -60^\circ \quad \text{و} \quad I_m = 5 \text{ A} \quad \text{و} \quad V_m = 220 \text{ V}$$

$$Z = \frac{V_m}{I_m} = \frac{220}{5} = 44 \Omega$$

از روابط ۴-۹ و ۴-۱۰ می‌توان نوشت:

$$R = Z \cos \varphi = 44 \times \cos(-60^\circ) = 44 \times \frac{1}{2} = 22 \Omega$$

$$X_C = Z \sin \varphi = 44 \sin 60^\circ = 44 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 38.1 \Omega$$

$$C = \frac{1}{X_C \cdot \omega} = \frac{1}{38.1 \times 100\pi} = 83.58 \mu\text{F}$$

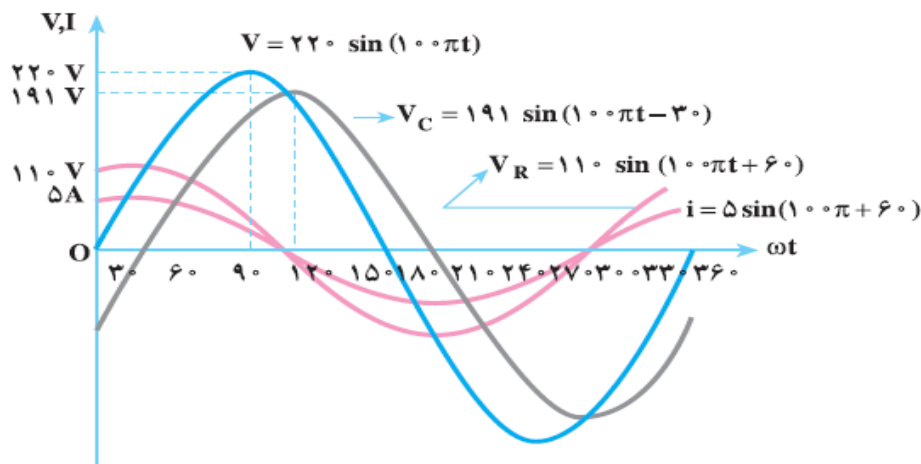
$$V_R = R \cdot I_m \sin(\omega t + \theta_i) \quad \text{ب -}$$

$$V_R = 22 \times 5 \times \sin(100\pi t + 60^\circ)$$

$$V_R = 110 \sin(100\pi t + 60^\circ)$$

$$V_C = I_m \cdot X_C \sin(100\pi t + \theta_i - 90^\circ)$$

$$V_C = 5 \times 38.1 \sin(100\pi t + 60^\circ - 90^\circ) = 190.5 \sin(100\pi t - 30^\circ)$$



شکل ۳-۴

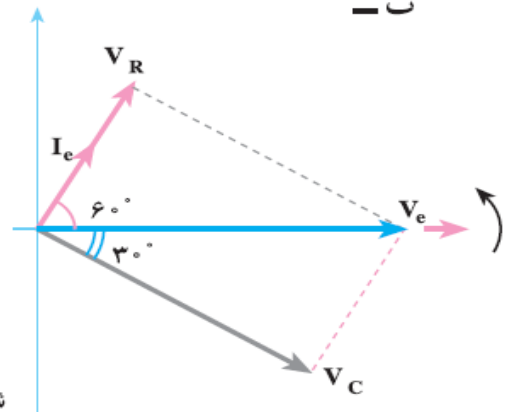
ت -

$$V_C = \frac{191}{\sqrt{2}} = 135 \text{ ولت} \quad \text{و} \quad \theta_{V_C} = -3^\circ$$

$$V_R = \frac{110}{\sqrt{2}} = 77.78 \text{ ولت} \quad \text{و} \quad \theta_{V_R} = 6^\circ$$

$$I_e = \frac{5}{\sqrt{2}} = 3.54 \text{ A} \quad \text{و} \quad \theta_i = 6^\circ$$

$$\varphi = \theta_V - \theta_I = 0 - 6^\circ = -6^\circ$$



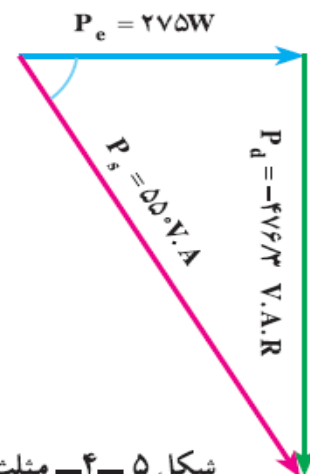
شکل ۴-۴- دیاگرام برداری

ث -

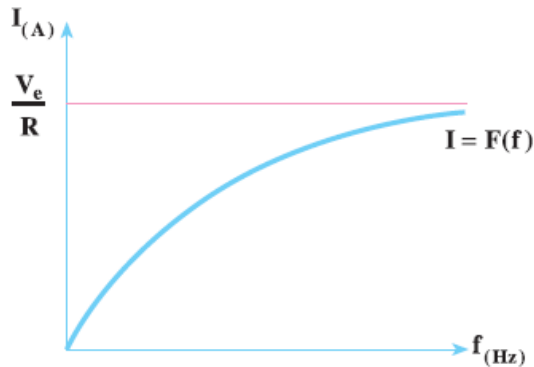
$$P_e = V_e I_e \cos \varphi = I_e^2 R = \frac{220}{\sqrt{2}} \times \frac{5}{\sqrt{2}} \times \cos 6^\circ = 275 \text{ W}$$

$$P_d = -V_e I_e \sin \varphi = -I_e^2 X_C = \frac{-220}{\sqrt{2}} \times \frac{5}{\sqrt{2}} \times \sin 6^\circ = -476 / 3 \text{ V.A.R}$$

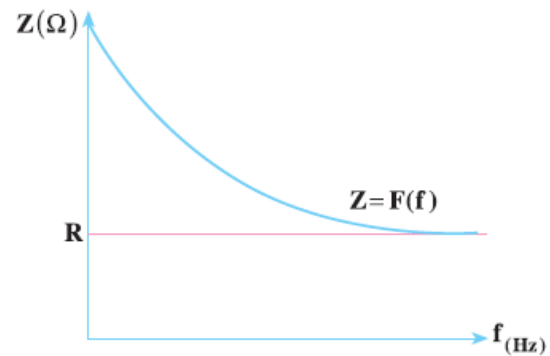
$$P_s = V_e I_e = \frac{220}{\sqrt{2}} \times \frac{5}{\sqrt{2}} = 550 \text{ V.A}$$



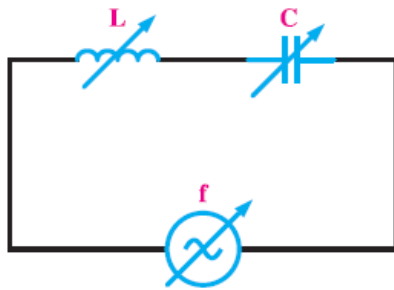
شکل ۵-۴- مثلث توان ها



ب: منحنی تغییرات جریان در اثر فرکانس



الف: منحنی تغییرات امپدانس در اثر فرکانس

شکل ۹-۴ - تأثیر فرکانس بر مقادیر I , Z در R-C سری

شکل ۴-۵

مثال: مدار L-C سری، مطابق شکل ۴-۵ مفروض است. همان طور که مشاهده می کنید، هر سه کمیت f و C و L در مدار قابل تغییر است. مطلوب است:

- ۱- مقدار اندوکتانس L در صورتی که در $f = 10^5 \text{ Hz}$ تشدید ایجاد کند و ظرفیت خازن برابر با $C = 10^{-6} \text{ F}$ باشد.

۲- اندازه‌ی ظرفیت خازن C در فرکانس رزونانس $f = 10^5 \text{ Hz}$ در صورتی که $L = 10^{-3} \text{ H}$ باشد.

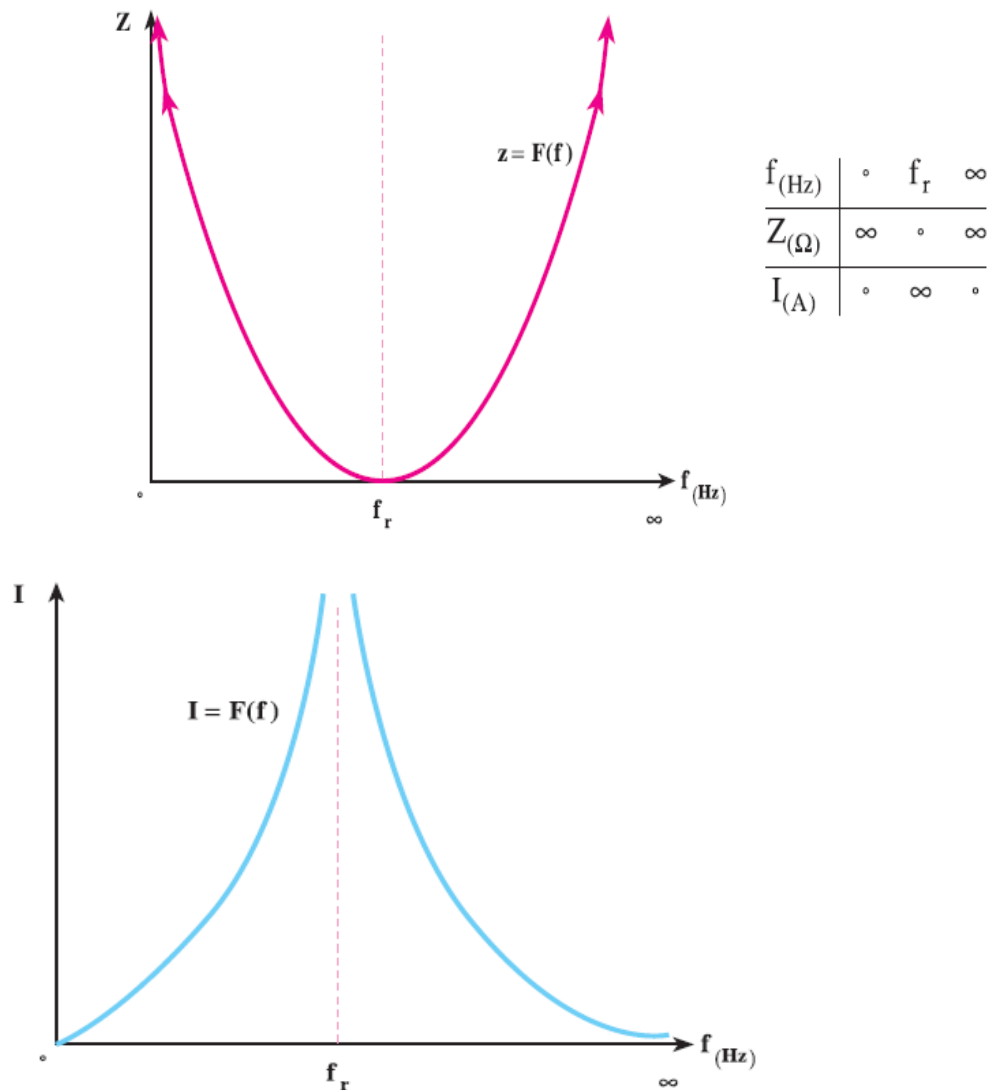
۳- در صورتی که $L = 10^{-3} \text{ H}$ و $C = 10^{-6} \text{ F}$ باشد، فرکانس رزونانس چقدر است؟
راه حل:

$$X_C = X_L \Rightarrow 2\pi fL = \frac{1}{2\pi fC} \Rightarrow L = \frac{1}{4\pi^2 f^2 C} \quad -1$$

$$L = \frac{1}{4 \times \pi^2 \times 10^5 \times 10^{-6}} = 25 / 35 \text{ mH}$$

$$C = \frac{1}{4\pi^2 f^2 L} = \frac{1}{4\pi^2 \times 10^5 \times 10^{-3}} = 253 / 5 \mu\text{F} \quad -2$$

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{10 \times 10^{-3} \times 10^{-6}}} = 159 / 23 \text{ Hz} \quad -3$$



شکل ۵-۵ - منحنی‌های تغییرات $Z = F(f)$ و $I = F(f)$ در مدار L-C سری

مدارات الکتریکی را اغلب با اعداد مختلط حل میکنیم.

مقاومت اهمی قسمت حقیقی عدد مختلط و سلف یا خازن قسمت موهومی عدد مختلط میباشد در مدارات سری

$$Z = R + (X_L - X_C)j \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

سیم پیچ $+X_L j$ و خازن $-X_C j$ در مدارات نمایش داده میشود

باقی روابط را میتوان با استفاده از قوانین اعداد مختلط به کار برد.

مثال: فرم فازوری توابع زیر که بر حسب زمان بیان شده‌اند را بنویسید.

$$۱) V(t) = 2 \cos 4t \Rightarrow V = 2 \angle 0^\circ$$

$$۲) V(t) = 3 \cos(2t + 45^\circ) \Rightarrow V = 3 \angle 45^\circ$$

$$۳) V(t) = 5 \sin 10t = 5 \cos(10t - 90^\circ) \Rightarrow V = 5 \angle -90^\circ$$

$$۴) V(t) = 5 \sin(377t + 150^\circ) = 5 \cos(377t + 150^\circ - 90^\circ) = 5 \cos(377t + 60^\circ) \Rightarrow V = 5 \angle 60^\circ$$

جمع چند موج سینوسی هم‌فرکانس

برای جمع چند موج سینوسی هم‌فرکانس می‌توانیم معادلات را به صورت فازوری نمایش داده و سپس فرم دکارتی آنها را نوشته (چون جمع دو عدد مختلط در فرم دکارتی به راحتی صورت می‌گیرد) و جمع را به راحتی انجام دهیم. در نهایت مجدداً با استفاده از تبدیل فرم دکارتی به فرم قطبی و سپس نوشتن آن در حوزه زمان جواب نهایی را بدست آوریم. دقت کنید برای جمع دو فازور، باید فرکانس دو فازور با یکدیگر برابر باشد. (می‌توانیم آن‌ها را در دستگاه مختصات قطبی هم رسم کنیم و سپس بردارها را با هم جمع برداری کنیم).

مثال: اگر $I_1(t) = 25 \sin(\omega t)$ و $I_2(t) = 25 \cos(\omega t - 30^\circ)$ و $I_3(t) = 25 \cos(\omega t + 30^\circ)$ باشد. حاصل $I(t) = I_1(t) + I_2(t) + I_3(t)$ را بدست آورید.

پاسخ: چون یکی از موج‌ها سینوسی می‌باشد، لذا لازم است آن را به فرم کسینوسی تبدیل کنیم:

$$I_1(t) = 25 \sin(\omega t) = 25 \cos(\omega t - 90^\circ) \Rightarrow \bar{I}_1 = 25 \angle -90^\circ$$

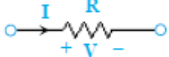
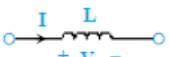
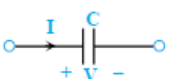
$$\bar{I}_2 = 25 \angle -30^\circ, \quad \bar{I}_3 = 25 \angle +30^\circ$$

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = -j25 + 25 \cos(-30^\circ) + j25 \sin(-30^\circ) + 25 \cos(+30^\circ) + j25 \sin(+30^\circ)$$

$$= -j25 + 25 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - j25 \times \frac{1}{2} + 25 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + j25 \times \frac{1}{2} = -j25 + 25\sqrt{3} = 25\sqrt{3} - j25$$

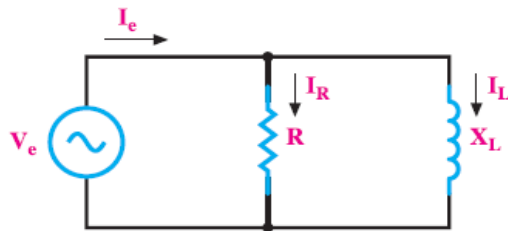
$$I_{\text{اندازه}} = \sqrt{(25)^2 + (25\sqrt{3})^2} = \sqrt{25^2 + 25^2 \times 3} = \sqrt{4 \times 25^2} = 2 \times 25 = 50 \text{ A}$$

$$I \text{ زاویه فاز} = \text{Arctg}\left(\frac{-25}{25\sqrt{3}}\right) = \text{Arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -30^\circ \Rightarrow I = 50 \angle -30^\circ \Rightarrow I(t) = 50 \cos(\omega t - 30^\circ)$$

امپدانس	در حالت فازوری	در حوزه زمان	عنصر
R	$V = RI$	$V = RI$	
$j\omega L$	$V = jX_L I$	$V = L \frac{dI}{dt}$	
$\frac{1}{j\omega C}$	$V = -jX_C I$	$I = C \frac{dV}{dt}$	

۷-۳- مدار R-L موازی

مدارهای R-L موازی از یک مقاومت اهمی و یک راکتانس القایی با اتصال موازی تشکیل می‌شوند. مدار الکتریکی اتصال موازی R-L به صورت شکل ۷-۳ است. این مدارها به طور گسترده در مدارهای الکترونیکی و مخابراتی به کار می‌روند. تله‌های امواج و فیلترسازی امواج



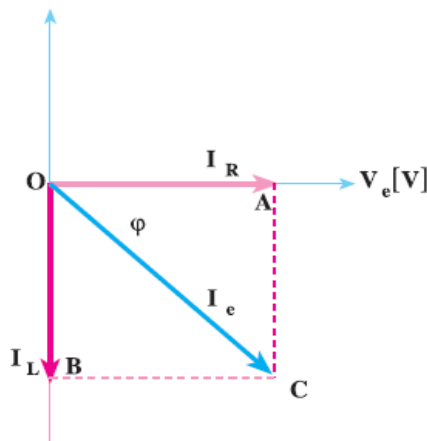
شکل ۷-۳ مدار الکتریکی R-L موازی

از جمله کاربردهای این مدارهاست. با توجه به مدار شکل ۷-۳ می‌توان گفت که جریان مدار (I_e) از دو جریان I_R و I_L تشکیل می‌شود. چون ولتاژ دو سر راکتانس القایی و مقاومت اهمی با هم برابرند و زاویه‌ی فاز جریان‌های I_L و I_R یکسان نیستند، در مطالعه مدارهای R-L موازی، ولتاژ را مبنا قرار

می‌دهند و دیاگرام برداری I_R و I_L را بر اساس ولتاژ مبنا رسم می‌کنند. بردار جریان I_R با ولتاژ هم‌فاز و بردار جریان I_L از ولتاژ 90° پس‌فاز است و مطابق شکل ۸-۳ رسم می‌شوند.

جریان کل مدار I_e از جمع برداری $\vec{I}_R$ و $\vec{I}_L$ به دست می‌آید:

$$\vec{I}_e = \vec{I}_R + \vec{I}_L \quad (3-27)$$



شکل ۸-۳ دیاگرام برداری مدار R-L موازی

۱-۷-۳ محاسبه‌ی امپدانس مدار R-L موازی: با توجه به شکل ۷-۳ و دیاگرام

برداری جریان‌ها (شکل ۸-۳) می‌توان نوشت:

$$I_e = \frac{V_e}{Z} \quad \text{و} \quad I_R = \frac{V_e}{R} \quad \text{و} \quad I_L = \frac{V_e}{X_L}$$

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 \quad \text{و} \quad \overline{OB} = \overline{AC}$$

$$I_e^2 = I_R^2 + I_L^2 \quad (3-28)$$

با جایگزین کردن مقادیر I_L ، I_R و I_e در رابطه‌ی ۲۸-۳ می‌توان نوشت:

$$\frac{V_e}{Z} = \frac{V_e}{R} + \frac{V_e}{X_L}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{X_L} \Rightarrow Z = \frac{R \cdot X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \quad (3-29)$$

۳-۷-۲ محاسبه‌ی اختلاف فاز و ضریب توان مدار R-L موازی: در شکل

۳-۸ در مثلث OAC می‌توان نوشت:

$$\tan \varphi = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{I_L}{I_R} = \frac{\frac{V_e}{X_L}}{\frac{V_e}{R}} = \frac{V_e R}{V_e X_L}$$

$$\tan \varphi = \frac{R}{X_L} \quad (3-30)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{R}{X_L} \quad (3-31)$$

برای محاسبه‌ی ضریب توان‌های مؤثر و غیر مؤثر از مثلث OAC، روابط زیر را می‌نویسیم:

$$\cos \varphi = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{I_R}{I_e}$$

$$\cos \varphi = \frac{\frac{V_e}{R}}{\frac{V_e}{Z}} = \frac{V_e \cdot Z}{V_e \cdot R}$$

$$\cos \varphi = \frac{Z}{R} \quad (3-32)$$

$$\sin \varphi = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} = \frac{I_L}{I_e} = \frac{Z}{X_L} \quad (3-33)$$

۳-۷-۳ محاسبه‌ی توان‌های مدار R-L موازی: از دیاگرام برداری شکل ۳-۸

می‌توان نوشت:

$$\cos \varphi = \frac{I_R}{I_e} \Rightarrow I_R = I_e \cos \varphi \quad (1)$$

$$P_e = I_R^2 R = I_R \cdot \frac{V_e}{I_R} = V_e \cdot I_R \quad (2)$$

با جاگذاری (۱) در (۲) خواهیم داشت:

$$P_e = I_e \cdot V_e \cdot \cos \varphi \quad (3-34)$$

با توجه به رابطه ی ۳-۳۳ و جای گذاری روابط می توانیم توان راکتیو را به دست آوریم.

$$P_d = X_L I_L^2 = \frac{V_e}{I_L} \times I_L^2 \text{ و } I_L = I_e \sin \varphi$$

$$P_d = V_e I_L = V_e I_e \sin \varphi \quad (3-35)$$

توان ظاهری از P_e و P_d به قرار زیر محاسبه می شود:

$$P_s = \sqrt{P_d^2 + P_e^2} = \sqrt{V_e^2 I_e^2 \sin^2 \varphi + V_e^2 I_e^2 \cos^2 \varphi}$$

$$P_s = V_e I_e \quad (3-36)$$

۴-۷-۳- محاسبه ی ضریب کیفیت مدار R-L موازی

$$Q = \frac{2\pi \times (\text{ماکزیم انرژی ذخیره شده})}{\text{انرژی مصرفی در یک سیکل}} = \frac{2\pi \left(\frac{1}{2} L I_{Lm}^2\right)}{I_R^2 \times R \times T} = \frac{2\pi \left(\frac{1}{2} L I_{Lm}^2\right)}{I_R^2 \times R \times \frac{2\pi}{\omega}}$$

$$I_{Lm} = \frac{V_m}{X_L} = \frac{\sqrt{2} V_e}{L\omega} \text{ و } I_R = \frac{V_e}{R}$$

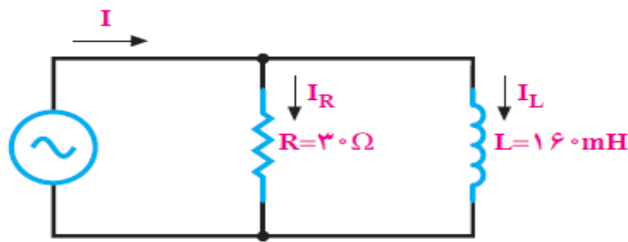
$$Q = \frac{2\pi \left[\frac{1}{2} L \times \left(\frac{\sqrt{2} V_e}{L\omega} \right)^2 \right]}{\frac{V_e^2}{R^2} \times R \times \frac{2\pi}{\omega}} = \frac{R}{L\omega}$$

$$Q = \tan \varphi = \frac{R}{X_L} = \frac{R}{L\omega} \quad (3-37)$$

با مقایسه ی روابط ۳-۳۷ و ۳-۳۰ می توان گفت:

مثال ۲: مدار الکتریکی شکل ۳-۹ از منبع ولتاژ به معادله ی $v = 120\sqrt{2} \sin(250t + 45^\circ)$ تغذیه می شود. مطلوب است.

الف: مقاومت القایی سلف. $X_L = L \cdot \omega = 160 \times 10^{-3} \times 250 = 40 \Omega$



شکل ۹-۳

ب : معادله‌ی جریان هر شاخه.

$$I_{R_m} = \frac{V_m}{R} = \frac{120\sqrt{2}}{30} = 4\sqrt{2}A$$

جریان مقاومت هم فاز با ولتاژ

$$i_R = 4\sqrt{2} \sin(250t + 45^\circ)$$

$$I_{L_m} = \frac{V_m}{X_L} = \frac{120\sqrt{2}}{40} = 3\sqrt{2}A$$

جریان سلف ۹۰ درجه عقب‌تر از ولتاژ

$$i_L = 3\sqrt{2} \sin(250t + 45^\circ - 90^\circ)$$

$$i_L = 3\sqrt{2} \sin(250t - 45^\circ)$$

پ : جریان کل و معادله‌ی زمانی آن.

$$I_R = \frac{I_{R_m}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4A$$

$$I_L = \frac{I_{L_m}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3A$$

با توجه به رابطه‌ی ۲۷-۳ داریم :

$$\dot{I}_e = \dot{I}_R + \dot{I}_L = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5A$$

$$I_m = I_e \sqrt{2} = 5\sqrt{2} A$$

براساس رابطه‌ی ۳۱-۳ می‌توان نوشت :

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{R}{X_L} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{3}{40} \right) = \tan^{-1} (0.75) = 37^\circ$$

بنابراین، جریان کل به اندازه‌ی $\phi = 37^\circ$ از ولتاژ منبع عقب‌تر است و داریم :

$$i = 5\sqrt{2} \sin(250t + 45^\circ - 37^\circ) = 5\sqrt{2} \sin(250t + 8^\circ)$$

ت : امپدانس مدار.

از رابطه‌ی ۲۹-۳ داریم :

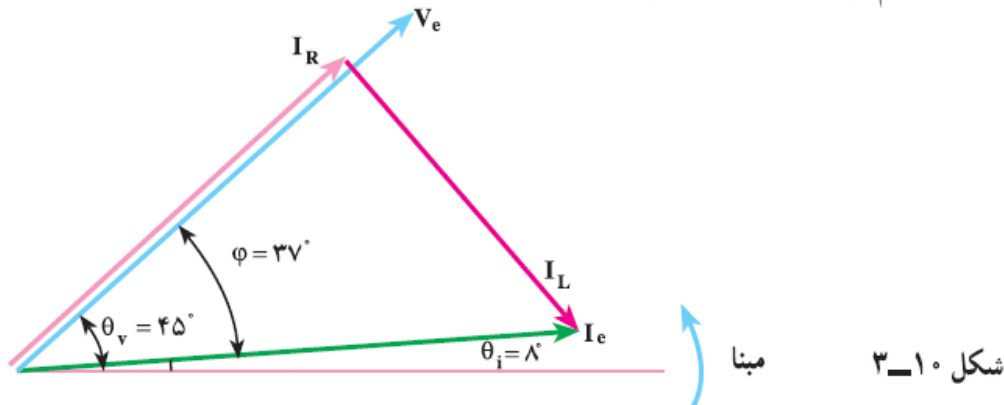
$$\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_L^2}$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_L^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{30^2} + \frac{1}{40^2}}} = 24\Omega \quad \text{یا} \quad Z = \frac{30 \times 40}{\sqrt{30^2 + 40^2}} = 24\Omega$$

راه ساده‌ی محاسبه‌ی امپدانس مدار استفاده از رابطه‌ی ۳-۱ است.

$$Z = \frac{V_e}{I_e} = \frac{V_m}{I_m} = \frac{120\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = 24\Omega$$

ث: دیاگرام برداری ولتاژ و جریان‌های مدار.



ج: توان‌های مدار و رسم مثلث توان.

از رابطه‌ی ۳-۱۵ خواهیم داشت:

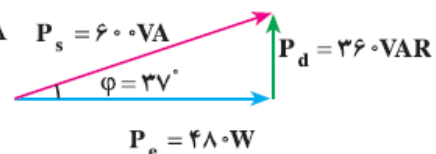
$$P_e = R \cdot I_R^2 = 30 \times (4)^2 = 480W$$

از رابطه‌ی ۳-۳۵ خواهیم داشت:

$$P_d = X_L \cdot I_L^2 = 40 \times (3)^2 = 360VAR$$

و از رابطه‌ی ۳-۳۶ خواهیم داشت:

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = \sqrt{480^2 + 360^2} = 600VA \quad P_s = 600VA$$



می‌توان توان‌های مدار را از روابط ۳-۳۴، ۳-۳۵ و ۳-۳۶ محاسبه کرد. بدیهی است جواب‌ها یکسان خواهند بود.

$$P_e = V_e I_e \cos \phi = 120 \times 5 \times 0.8 = 480W$$

$$P_d = V_e I_e \sin \phi = 120 \times 5 \times 0.6 = 360 \text{ VAR}$$

$$P_s = V_e I_e = 120 \times 5 = 600 \text{ VA}$$

مثال ۳: در مثال‌های ۱ و ۲ ضریب کیفیت مدار را محاسبه کنید.

راه حل:

در مثال ۱ ضریب کیفیت برابر است با:

$$Q = \frac{L\omega}{R} = \frac{X_L}{R} = \frac{4}{3} = 1.33$$

در مثال ۲ ضریب کیفیت برابر است با:

$$Q = \frac{R}{X_L} = \frac{30}{40} = 0.75$$

با وجود این که در دو مثال ۱ و ۲ نسبت راکتانس سلفی به مقاومت اهمی برابر است، در مدار سری ضریب کیفیت بزرگ‌تر است. به عبارت دیگر، خاصیت سلفی بیش‌تر نمایان است؛ در حالی که در مدار موازی خاصیت اهمی مدار بیش‌تر دیده می‌شود. مطلب ذکر شده نشان می‌دهد که در مدار سری، مقاومت و در مدار موازی، عکس مقاومت تعیین‌کننده‌ی خاصیت مدار است.

تاثیر فرکانس در مدار RL موازی

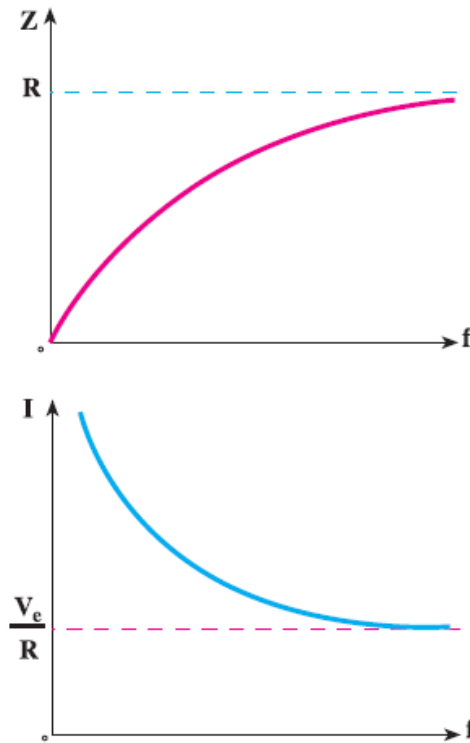
در مدار R - L موازی، امپدانس از رابطه‌ی $\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{(j\pi fL)}$ محاسبه می‌شود.

اگر فرکانس منبع صفر شود، آن‌گاه $\frac{1}{X_L} = \frac{1}{j\pi fL} = \infty$ خواهد شد و در این حالت $Z = \infty$

می‌شود. به عبارت دیگر، مدار R - L موازی در فرکانس صفر اتصال کوتاه می‌کند و از مدار جریان اتصال کوتاه عبور خواهد کرد. جریان اتصال کوتاه را به $I_{s.c}$ نشان می‌دهند. اگر فرکانس مدار از صفر به بی‌نهایت افزایش یابد، امپدانس مدار R - L موازی از مقدار اتصال کوتاه ($Z = 0$) به اندازه‌ی مقاومت اهمی R تغییر می‌کند. به‌طوری‌که در فرکانس‌های خیلی زیاد می‌توان $Z = R$ در نظر گرفت. در فرکانس خیلی زیاد از مدار R - L موازی جریان $I_e = \frac{V_e}{R}$ عبور خواهد کرد. مطالب بالا در جدول زیر آورده شده است.

$f_{\text{(Hz)}}$	0	∞
$Z_{\text{(\Omega)}}$	0	R
$I_{\text{(A)}}$	∞	$\frac{V_e}{R}$

منحنی تغییرات جریان و امپدانس مدار RL موازی به ازای تغییر فرکانس در شکل ۳-۱۲ از ریق نقطه‌یابی رسم شده است.



شکل ۳-۱۲ اثر فرکانس در مدار R-L موازی

در مدار موازی با توجه به $\cos \varphi = \frac{Z}{R}$ و $P_e = V_e I_e \cos \varphi$ و $P_d = V_e I_e \sin \varphi$ ، رشد فرکانس از صفر به مقدار خیلی زیاد موجب می‌شود امپدانس از مقدار صفر به R تغییر کند. در این حالت، $\cos \varphi$ از صفر به یک، $\sin \varphi$ از یک به صفر و φ از 90° درجه به صفر درجه تغییر می‌کند. توان اکتیو از صفر به مقدار $P_e = V_e I_e$ و توان راکتیو از مقدار حداکثر به صفر تغییر می‌کند.

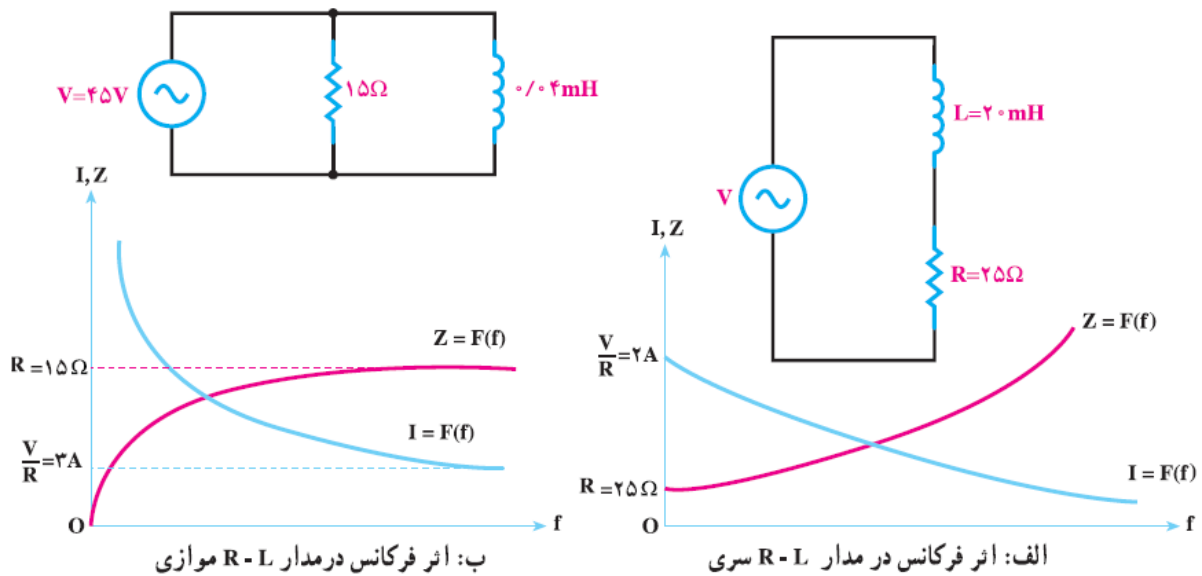
👉 نتیجه: افزایش فرکانس در مدار R-L موازی، خاصیت سلفی مدار را کاهش می‌دهد.

در شکل‌های ۱۳-۳ دو نمونه از اثر فرکانس بر روی I و Z در مدار $R-L$ سری و $R-L$ موازی موازی نشان داده شده است.

$f(\text{Hz})$	$Z(\Omega)$	$I(\text{A})$
۰	۰	∞
∞	$R=15$	$\frac{V}{R} = \frac{V}{15}$

مدار $R-L$ موازی

$f(\text{Hz})$	$Z(\Omega)$	$I(\text{A})$
۰	$R=25$	$\frac{V}{R} = \frac{V}{25}$
∞	∞	۰

مدار $R-L$ سری

شکل ۱۳-۳

۹-۳- تبدیل مدار RL سری به RL موازی و برعکس

هر گاه بخواهیم یک مدار $R-L$ سری را به $R-L$ موازی و یا بالعکس تبدیل کنیم باید Z_s و φ_s در حالت سری با Z_p و φ_p در حالت موازی برابر باشند.

همان‌طوری که اشاره شد روابط امپدانس و ضریب قدرت در مدارهای $R-L$ سری و $R-L$ موازی به صورت زیر است:



$$\begin{cases} Z_s = \sqrt{R_s^2 + X_{Ls}^2} \\ \cos \varphi_s = \frac{R_s}{Z_s} \end{cases} \quad \begin{cases} Z_p = \frac{R_p \cdot X_{Lp}}{\sqrt{R_p^2 + X_{Lp}^2}} \\ \cos \varphi_p = \frac{Z_p}{R_p} \end{cases}$$

I. در تبدیل مدار R-L موازی به R-L سری داریم:شرط اول تبدیل $\cos \varphi_p = \cos \varphi_s$

$$\frac{Z_p}{R_p} = \frac{R_s}{Z_s} \quad \text{معادل طرفین را قرار می دهیم}$$

$$R_s = \frac{Z_p \cdot Z_s}{R_p} \quad \text{مقدار } R_s \text{ را به دست می آوریم}$$

$$R_s = \frac{Z_p^2}{R_p} \quad \text{با توجه به شرط دوم تبدیل } Z_p = Z_s \text{ در معادله } R_s \text{ قرار می دهیم.}$$

بر پایه همین مراحل برای راکتانس معادل در مدار سری نیز چنین می توان نوشت:

$$X_s = \frac{Z_p^2}{X_{Lp}}$$

II. در تبدیل مدار R-L سری با R-L موازی داریم:شرط اول تبدیل $\cos \varphi_p = \cos \varphi_s$

$$\frac{Z_p}{R_p} = \frac{R_s}{Z_s} \quad \text{معادل طرفین را قرار می دهیم}$$

$$R_p = \frac{Z_p Z_s}{R_s} \quad \text{مقدار } R_p \text{ را به دست می آوریم}$$

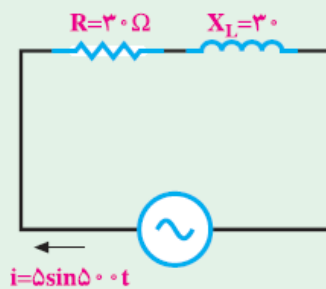
$$R_p = \frac{Z_s^2}{R_s} \quad \text{با توجه به شرط دوم تبدیل } Z_p = Z_s \text{ در معادله } R_p \text{ قرار می دهیم.}$$

بر پایه همین مراحل برای راکتانس معادل مدار موازی نیز چنین می توان نوشت:

$$X_p = \frac{Z_s^2}{X_{Ls}}$$



۱- در مدار شکل مقابل مطلوب است:



الف: ولتاژ دو سر R و X_L و معادلات زمانی آن‌ها.

ب: ولتاژ منبع و معادله‌ی زمانی آن.

پ: رسم دیاگرام برداری جریان و ولتاژها.

ت: توان اکتیو، راکتیو و ظاهری و رسم مثلث توان‌ها.

جواب:

$$V_R = 106V, P_e = 375W \text{ و } V_{R(t)} = 106\sqrt{2} \sin 50^\circ t$$

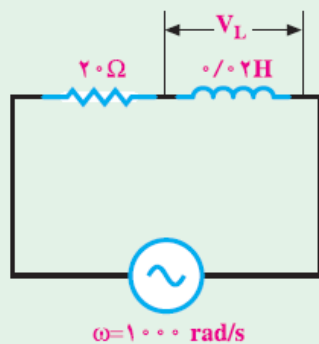
$$V_L = 106V, P_d = 375VAR \text{ و } V_{L(t)} = 106\sqrt{2} \sin(50^\circ t + 90^\circ)$$

$$V = 150V, P_s = 530/3 VA \text{ و } V_{(t)} = 150\sqrt{2} \sin(50^\circ t + 45^\circ)$$

۲- در یک مدار RL سری معادله‌ی ولتاژ و جریان به ترتیب $v(t) = 200 \sin(314t + 20^\circ)$ و

$i(t) = 10 \sin(314t - 10^\circ)$ است اندازه‌ی R و L چه قدر است؟

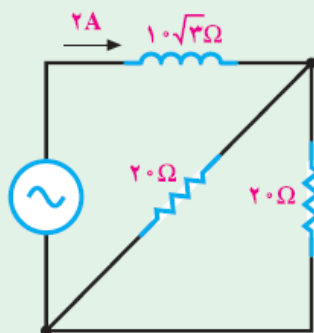
جواب: $R = 17/32 \Omega$ و $L = 0/03H$



۳- در مدار شکل مقابل ولتاژ دو سر سلف $V_L = 40V$

است ولتاژ منبع چند ولت است؟

جواب: $V = 56/5V$



۴- در مدار شکل مقابل ولتاژ منبع چند ولت است؟

جواب: $V_e = 40V$

۵- یک مقاومت ۵ اهمی با یک سلف نامشخص به طور سری به هم متصل اند. معادله‌ی ولتاژ

دو سر مقاومت $v_R = 25 \sin(200^\circ t + 30^\circ)$ است. اگر $\varphi = \frac{\pi}{3}$ رادیان باشد، مطلوب است:

الف: ضریب خودالقایی سلف

ب: معادله‌ی جریان مدار

پ: معادله‌ی ولتاژ کل

ت: معادله‌ی ولتاژ دو سر سلف

جواب: $L = 4/3 \text{ mH}$

$$i(t) = 5 \sin(200 \cdot t + 3^\circ)$$

$$V(t) = 50 \sin(200 \cdot t + 9^\circ)$$

$$V_{L(t)} = 43/3 \sin(200 \cdot t + 12^\circ)$$

۶- از یک مدار RL سری شدت جریانی به معادله‌ی $i = 3\sqrt{2} \sin 100 \pi t$ می‌گذرد. اگر $\cos \phi = 0.6$ و ولتاژ دو سر سلف $V_L = 200 \text{ V}$ باشد، مثلث توان‌ها را با درج مقادیر رسم کنید.

جواب: $P_e = 450 \text{ W}$ ، $P_d = 600 \text{ VAR}$ ، $P_s = 750 \text{ VA}$

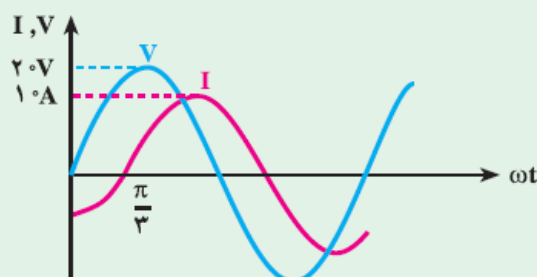
۷- در یک مدار RL سری با $L = 10 \text{ mH}$ و $R = 3 \Omega$ مقدار فرکانس چه قدر انتخاب شود تا جریان به اندازه‌ی $\frac{\pi}{6}$ تأخیر فاز داشته باشد.

جواب: $f = 27/5 \text{ Hz}$

۸- در یک مدار RL سری با $L = 5 \text{ mH}$ و $R = 20 \Omega$ در چه فرکانسی ضریب کیفیت مدار

 $\frac{\pi}{1}$ می‌شود؟جواب: $f = 200 \text{ Hz}$

۹- در یک مدار RL سری تابع تغییرات ولتاژ و جریان مطابق شکل زیر است اندازه‌ی R و

 X_L چه قدر است؟جواب: $R = 1 \Omega$ ، $X_L = 1/\sqrt{3} \Omega$

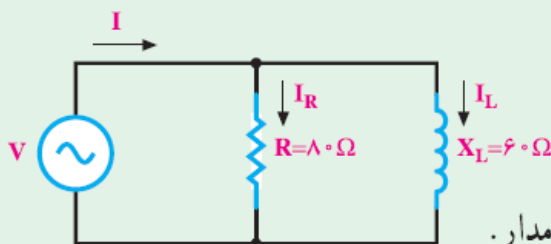
۱۰- در مدار شکل زیر $i(t) = 5\sqrt{2} \sin 250 t$ می‌باشد، مطلوب است.

الف: امپدانس مدار.

ب: ولتاژ منبع و معادله‌ی آن.

پ: جریان I_R و I_L و معادله‌های آن‌ها.

ت: رسم دیاگرام برداری ولتاژ و جریان‌های مدار.



۴-۱- مقدمه

کاربرد عناصر اهمی و خازنی در مدارهای الکترونیکی، مخابرات، الکترونیک صنعتی و شبکه‌های قدرت مثلاً فیلترها^۱، تایمرها^۲، تصحیح‌کننده ضریب توان^۳، ضرورت بحث مدارهای R-C را ایجاب

۷

۴-۲- مدار R-C سری

مدار الکتریکی R-C سری مطابق شکل ۴-۱ است. ولتاژ منبع از ولتاژ V_R و V_C تشکیل می‌شود. جریان در هر دو عنصر C و R یکسان و برابر I_e است. ولتاژ دو سر مقاومت اهمی با جریان I_e هم‌فاز و ولتاژ دو سر خازن V_C از جریان I_e ، 90° الکتریکی پس‌فاز است. برای به‌دست‌آوردن ولتاژ V_e ، چون $\vec{V}_R$ و $\vec{V}_C$ بردارهای جداگانه‌ای هستند، از دیاگرام برداری استفاده می‌کنیم. برای رسم دیاگرام برداری، جریان I_e را مبنا قرار می‌دهیم و $\vec{V}_R$ را هم‌فاز با جریان و $\vec{V}_C$ را 90° پس‌فاز از جریان مطابق شکل ۴-۲ رسم می‌کنیم. جمع برداری $\vec{V}_e = \vec{V}_R + \vec{V}_C$ ، ولتاژ منبع و به عبارت دیگر، ولتاژ دوسر R-C سری را نشان خواهد داد. اگر جریان لحظه‌ای مدار را به صورت $i = I_m \sin(\omega t)$ فرض کنیم، ولتاژ لحظه‌ای V_C و V_R به صورت‌های زیر بیان خواهند شد:

می‌کند. از طرف دیگر، خازن ایده‌آل عملاً وجود ندارد؛ زیرا هر خازن حقیقی علاوه بر راکتانس خازنی یک مقاومت نشتی دارد. به همین علت، هر خازن حقیقی را می‌توان به صورت یک مقاومت اهمی و یک راکتانس خازنی ایده‌آل به صورت مدار R-C سری یا موازی مدل کرد و سپس مدار آن را تحلیل نمود. در این فصل، رفتار مدارهای R-C سری و موازی در جریان متناوب در حالت پایدار (ماندگار) بررسی خواهیم کرد؛ زیرا حالت‌های گذرای این مدارها از محدوده‌ی بحث ما خارج است. پاسخ گذرا در مدارهای الکتریکی عکس‌العمل مدار در مقابل تغییرات جریان و ولتاژ شبکه است که با گذشت زمان از بین می‌رود.

مدارهای RC سری در جلسه پنجم تدریس شده است

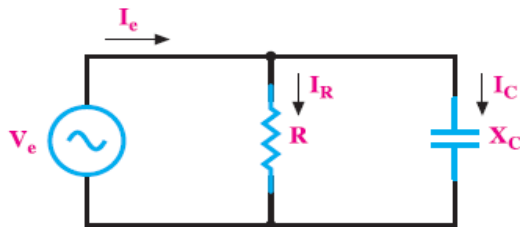
۱- فیلترها مدارات R-L-C هستند که می‌توانند امواج خاص را عبور دهند یا حذف کنند.

۲- تایمرها دستگاهی هستند که با استفاده از مقادیر R-C، به رله‌ها فرمان می‌دهند.

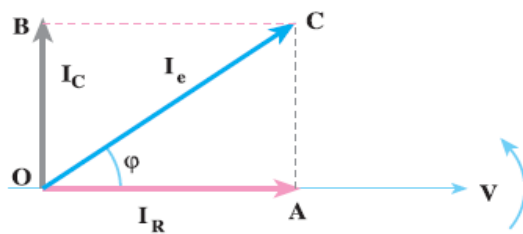
۳- در صنعت برق اثرات سلفی را با خازن‌ها و اثرات خازن را با سلف‌ها برای کاهش توان راکتیو خنثی می‌کنند این عمل را که ضریب توان را به نزدیکی $\cos \varphi = 1$ می‌رساند اصلاح ضریب توان گویند.

۳-۴- مدار R-C موازی

یک خازن حقیقی را عملاً به صورت یک خازن ایده آل و یک مقاومت اهمی موازی با آن مدل می کنند. مقاومت اهمی موازی شده را **مقاومت ناشی خازن** گویند و علت تخلیه ی خازن را در مرور زمان به وسیله ی این مدار توجیه می کنند. الکترون ها از طریق این مقاومت بزرگ از پلاریته ی



شکل ۴-۶- مدار الکتریکی R-C موازی



شکل ۴-۷- دیاگرام برداری مدار R-C موازی

مثبت خازن (صفحه ی مثبت) به طرف پلاریته ی منفی خازن (صفحه ی منفی)، مدارشان را کامل می کنند و خازن تخلیه می شود. مدار الکتریکی R-C موازی مطابق شکل ۴-۶ است. ولتاژ هر دو عنصر R و C باهم یکسان و برابر ولتاژ منبع است. جریان کل مدار از دو جریان غیرهم فاز I_R (اهمی) و I_C (خازنی) تشکیل می شود. جریان I_R با ولتاژ منبع هم فاز و جریان I_C از ولتاژ منبع ۹۰ درجه پیش فاز است. برای مطالعه ی مدار R-C موازی و تحلیل آن، دیاگرام برداری جریان ها را مطابق شکل ۴-۷ رسم می کنند و محاسبه های لازم را انجام می دهند.

چون ولتاژ هر دو عنصر R و C یکسان است، در رسم دیاگرام به منظور سادگی محاسبات، ولتاژ را مبنا قرار می دهند.

۱-۳-۴- محاسبه ی امپدانس مدار R-C موازی: با استفاده از شکل های ۴-۶ و

۴-۷ می توان نوشت:

$$I_R = \frac{V_e}{R} \quad (4-17)$$

$$I_C = \frac{V_e}{X_C} \text{ و } I_e = \frac{V_e}{Z} \quad (4-18)$$

نتیجه ی جمع دو بردار $\vec{I}_R$ و $\vec{I}_C$ جریان $\vec{I}_e$ است.

$$\vec{I}_e = \vec{I}_R + \vec{I}_C$$

با توجه به مثلث OAC خواهیم داشت:

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2$$

$$I_e^{\gamma} = I_R^{\gamma} + I_C^{\gamma} \quad (4-19)$$

با جایگزینی روابط ۴-۱۷ و ۴-۱۸ در رابطه ی ۴-۱۹ خواهیم داشت :

$$V_e = I_e Z \Rightarrow Z = \frac{V_e}{I_e}$$

$$\frac{V_e^{\gamma}}{Z^{\gamma}} = \frac{V_e^{\gamma}}{R^{\gamma}} + \frac{V_e^{\gamma}}{X_C^{\gamma}}$$

$$\frac{1}{Z^{\gamma}} = \frac{1}{R^{\gamma}} + \frac{1}{X_C^{\gamma}} \Rightarrow Z = \frac{R \cdot X_c}{\sqrt{R^{\gamma} + X_c^{\gamma}}} \quad (4-20)$$

۴-۳-۲- محاسبه ی اختلاف فاز بین ولتاژ و جریان و ضریب توان: برای محاسبه ی

φ اختلاف فاز بین ولتاژ و جریان از مثلث OAC شکل ۴-۷ استفاده می کنیم و می نویسیم :

$$\tan \varphi = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{I_C}{I_R}$$

$$\tan \varphi = \frac{\frac{V_e}{X_C}}{\frac{V_e}{R}} = \frac{V_e R}{V_e X_C}$$

با ساده کردن رابطه، خواهیم داشت :

$$\tan \varphi = \frac{I_C}{I_R} = \frac{R}{X_C} = RC\omega \quad (4-21)$$

اگر از رابطه ی ۴-۲۱، $\arctan$ گرفته شود، زاویه ی φ (اختلاف فاز بین جریان و ولتاژ) به دست می آید .

$$\varphi = \tan^{-1}(RC\omega) \quad \text{یا} \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{I_C}{I_R}\right) \quad (4-22)$$

کسینوس زاویه ی φ به دست آمده در رابطه ی ۴-۲۲ ضریب توان را تعیین می کند. برای محاسبه ی ضریب توان از مثلث OAC در شکل ۴-۷ می توان نوشت :

$$\cos \varphi = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{I_R}{I_e} = \frac{V_e Z}{V_e R}$$

بنابراین :

$$\cos \varphi = \frac{I_R}{I_e} = \frac{Z}{R} \quad (4-23)$$

برای تعیین $\sin \varphi$ ، از مثلث OAC شکل ۴-۷ می‌توان نوشت :

$$\sin \varphi = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} = \frac{I_C}{I_e} = \frac{V_e Z}{V_e X_C}$$

$$\sin \varphi = \frac{I_C}{I_e} = \frac{Z}{X_c} \quad (4-24)$$

۴-۳-۳ محاسبه‌ی ضریب کیفیت مدار R-C موازی: می‌دانید که انرژی ذخیره‌شدهدر یک خازن به ظرفیت C و ولتاژ دوسر آن (V) از رابطه‌ی $W = \frac{1}{2} CV^2$ به‌دست می‌آید. ماکزیممانرژی ذخیره‌شده توسط ولتاژ ماکزیمم V_m ایجاد می‌شود؛ بنابراین، $W_m = \frac{1}{2} CV_m^2$ ماکزیمم

انرژی ذخیره‌شده در خازن خواهد بود. انرژی مصرفی در مقاومت اهمی در یک سیکل از رابطه‌ی

$$I_e = \frac{V_e}{R} \quad W = P \cdot T = I_e^2 R \times \frac{2\pi}{\omega}$$

به‌دست می‌آید. برای محاسبه‌ی ضریب کیفیت می‌توان نوشت :

$$Q = \frac{\text{ماکزیمم انرژی ذخیره در خازن}}{\text{انرژی مصرفی در یک سیکل}}$$

$$Q = \frac{2\pi \left(\frac{1}{2} CV_m^2 \right)}{R \times \frac{V_e^2}{R} \times \frac{2\pi}{\omega}} \Rightarrow Q = RC\omega \quad (4-25)$$

۴-۳-۴ توان‌ها در مدار R-C موازی: با توجه به روش محاسبه‌ی توان‌ها در مدارهای

R-C می‌توان نوشت :

 P_e توان مؤثر به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

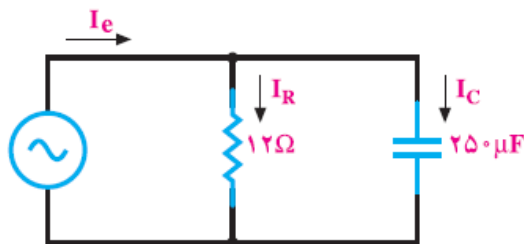
$$P_e = I_R^2 R = \frac{V_e^2}{R} = V_e I_e \cos \varphi \quad (4-26)$$

P_d توان غیر مؤثر از رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود :

$$P_d = -I_C^2 X_C = -\frac{V_e^2}{X_C} = -V_e I_e \sin \varphi \quad (4-27)$$

P_s توان ظاهری برابر است با :

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = V_e I_e \quad (4-28)$$



مثال ۴: در مدار RC موازی شکل مقابل

اگر ولتاژ منبع $v = 192\sqrt{2} \sin 25^\circ t$ باشد،
مطلوب است :

الف : جریان هر شاخه و معادلات آن‌ها.

$$X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{250 \times 10^{-6} \times 25} = 16 \Omega$$

$$V_e = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{192\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 192V$$

$$I_R = \frac{V_e}{R} = \frac{192}{12} = 16A$$

$$I_{Rm} = I_R \cdot \sqrt{2} = 16\sqrt{2}A$$

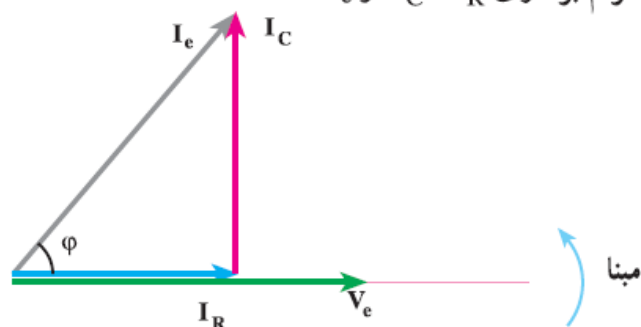
$$i_R = 16\sqrt{2} \sin 25^\circ t$$

$$I_C = \frac{V_e}{X_c} = \frac{192}{16} = 12A$$

$$I_{cm} = I_C \cdot \sqrt{2} = 12\sqrt{2}A$$

$$i_C = 12\sqrt{2} \sin(25^\circ t + 9^\circ) \quad \text{جریان خازن } 9^\circ \text{ درجه جلوتر (پیش فاز) از ولتاژ}$$

ب : رسم دیاگرام برداری $\vec{I}_R$ ، $\vec{I}_C$ و $\vec{I}_e$.



شکل ۸-۴

پ: جریان کل و معادله‌ی آن:

$$\vec{I}_e = \vec{I}_R + \vec{I}_C = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20 \text{ A} \quad \text{با توجه به شکل ۸-۴ داریم:}$$

$$I_m = I_e \sqrt{2} = 20 \sqrt{2} \text{ A}$$

از رابطه‌ی ۲۲-۴ خواهیم داشت:

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{I_C}{I_R} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{12}{16} \right) = 37^\circ$$

$$i = 20 \sqrt{2} \sin(250t + 37^\circ) \quad I \text{ به اندازه‌ی } \varphi \text{ از } v \text{ جلوتر است.}$$

ت: امپدانس مدار.

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{X_C} \quad \text{از رابطه‌ی ۲۰-۴ داریم:}$$

ولی با داشتن V_e و I_e که ساده‌ترین راه برای محاسبه‌ی Z رابطه‌ی ۱-۳ است.

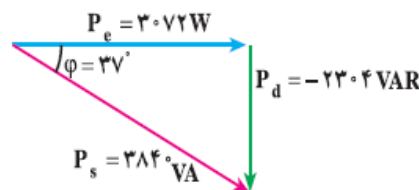
$$Z = \frac{V_e}{I_e} = \frac{V_m}{I_m} = \frac{192 \sqrt{2}}{20 \sqrt{2}} = 9.6 \Omega$$

ث: محاسبه‌ی توان‌ها و رسم مثلث توان.

$$P_e = V_e I_e \cos \varphi = 192 \times 20 \times \cos(37^\circ) = 3072 \text{ W}$$

$$P_d = V_e I_e \sin \varphi = 192 \times 20 \times \sin(37^\circ) = -2304 \text{ VAR}$$

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = \sqrt{(3072)^2 + (-2304)^2} = 3840 \text{ VA}$$



۴-۴- تأثیر فرکانس بر مدارهای R - C

با توجه به امپدانس‌های محاسبه‌شده برای مدار R - C سری، $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$ و مدار R - C

موازی $\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{X_C}$ و در نظر گرفتن این که $X_C = \frac{1}{\omega C}$ ، مشخص می‌شود. تغییرات فرکانس

مدار در امپدانس مدار R-C سری و موازی اثر می‌گذارد. کمیت‌های $\cos \varphi$ و $\sin \varphi$ و Q به طریقی به

امپدانس مدار مرتبطاند؛ بنابراین، تغییرات فرکانس، این کمیت‌ها را نیز تغییر می‌دهد.

هم‌چنین با توجه به این‌که $I_e = \frac{V_e}{Z}$ ، $P_e = V_e I_e \cos \phi$ ، $P_d = V_e I_e \sin \phi$ و $P_s = V_e I_e$ هستند، این کمیت‌ها نیز با تغییرات حاصل در فرکانس شبکه تغییر خواهند کرد. با در نظر گرفتن مطالب گفته شده تأثیر فرکانس را بر روی جریان و امپدانس مدار R - C سری و موازی به‌طور جداگانه بررسی می‌کنیم.

۴-۴-۱- تأثیر فرکانس در مدار R - C سری: در شکل ۴-۱ فرض می‌کنیم فرکانس منبع ولتاژ از صفر تا ∞ تغییر کند ولی دامنه‌ی ولتاژ ثابت باقی بماند. مقادیر R و C نیز در تغییرات فرکانس مقادیر ثابت باقی بمانند. فرکانس مدار را هم صفر در نظر می‌گیریم. می‌دانیم در جریان DC فرکانس مدار صفر است. خازن در مدارهای DC خیلی سریع شارژ می‌شود و جریان مدار را قطع می‌کند و منبع ولتاژ با مدار باز - یعنی امپدانس بی‌نهایت - مواجه می‌شود. بنابراین:

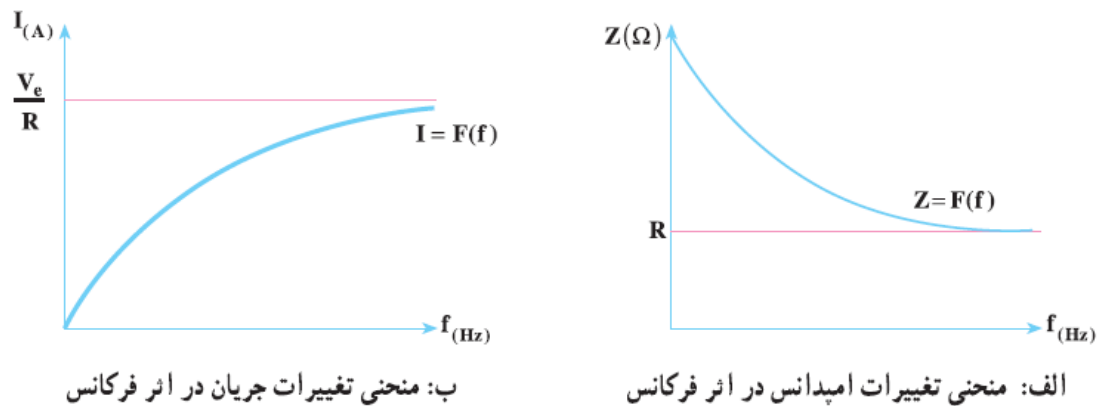
$$f = 0 \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \infty \quad \text{و} \quad I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\infty} = 0$$

اگر فرکانس از صفر به بی‌نهایت تغییر کند، امپدانس مدار کاهش یافته و جریان افزایش می‌یابد؛ به‌گونه‌ای که در فرکانس بی‌نهایت مقدار $X_C = 0$ و امپدانس مدار $Z = R$ و $I = \frac{V}{R}$ می‌شود. دلیل این‌که خازن اتصال کوتاه می‌شود، تغییرات سریع پلاریته‌ی صفحات آن در فرکانس‌های زیاد است. با وجود این تغییرات سریع نمی‌تواند عکس‌العمل نشان دهد و جریان به‌راحتی از آن عبور می‌کند. بنابراین:

$$f \rightarrow \infty \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2} = R \quad \text{و} \quad I = \frac{V}{R}$$

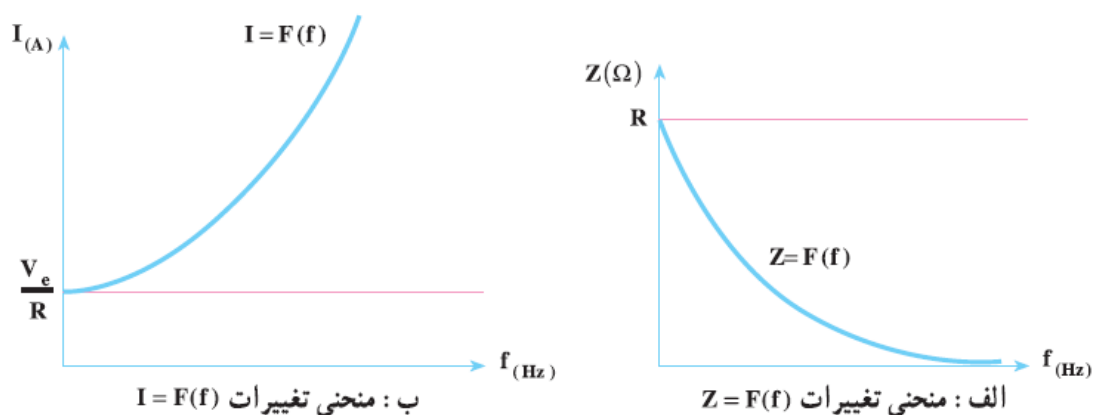
ضریب کیفیت مدار $Q = \frac{1}{RC\omega} = \frac{1}{\omega RC}$ در فرکانس‌های کم‌تر خیلی بالا و در فرکانس بی‌نهایت به سمت صفر میل می‌کند. منحنی تغییرات جریان و امپدانس مدار R - C را در فرکانس‌های متغیر می‌توان به‌صورت شکل‌های ۴-۹ از طریق نقطه‌یابی رسم کرد.

$f_{(Hz)}$	۰	∞
$Z_{(\Omega)}$	∞	R
$I_{(A)}$	۰	$\frac{V_e}{R}$

شکل ۴-۹ - تأثیر فرکانس بر مقادیر I ، Z در R - C سری

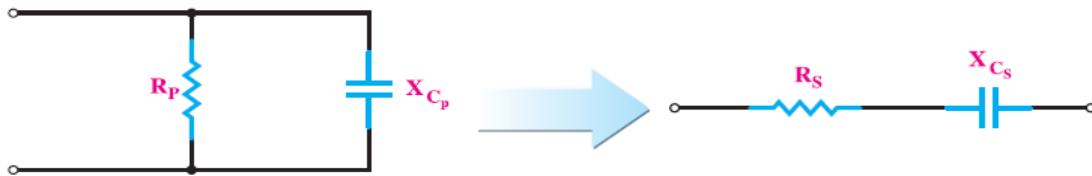
۴-۴-۲ - تأثیر فرکانس در مدار R - C موازی : در یک مدار R - C موازی فرض می‌کنیم فرکانس منبع تغذیه در دامنه‌ی ثابت تغییر کند و در این تغییرات مقدار عناصر R و C ثابت باشند. اگر فرکانس مدار صفر باشد، خازن شاخه‌ی موازی مربوط به خود را در اثر شارژ در حالت دائمی باز می‌کند و جریان $I_c = 0$ می‌شود. در این حالت، جریان مدار برابر جریان I_R خواهد شد و امپدانس $Z = R$ می‌شود. اگر فرکانس $f = \infty$ شود، شاخه‌ی خازنی اتصال کوتاه می‌کند و جریان I_c بی‌نهایت می‌شود. در این حالت $Z = 0$ خواهد بود. منحنی تغییرات جریان و امپدانس در R - C موازی نسبت به تغییرات فرکانس مطابق شکل ۴-۱۰، از طریق نقطه‌یابی رسم می‌شود.

$f_{(Hz)}$	0	∞
$Z_{(\Omega)}$	R	0
$I_{(A)}$	$\frac{V_e}{R}$	∞

شکل ۴-۱۰ - تأثیر فرکانس بر مقادیر I و Z در R - C موازی

۴-۵- تبدیل مدار R-C سری به مدار R-C موازی و برعکس

مدار R-C موازی را در نظر بگیرید می‌خواهیم معادل سری آن را به دست آوریم. در مدار معادل باید Z_P و φ_P با Z_S و φ_S مدار قبل از تبدیل یکی باشد.



$$Z_P = \frac{R_P \cdot X_{C_P}}{\sqrt{R_P^2 + X_{C_P}^2}}$$

$$\cos \varphi_P = \frac{Z_P}{R_P}$$

$$R_S = \frac{Z_P^2}{R_P}$$

$$X_{C_S} = \frac{Z_P^2}{X_{C_P}}$$

در تبدیل سری به موازی خواهیم داشت:



$$Z_S = \sqrt{R_S^2 + X_{C_S}^2}$$

$$\cos \varphi_S = \frac{R_S}{Z_S}$$

$$R_P = \frac{Z_S^2}{R_S}$$

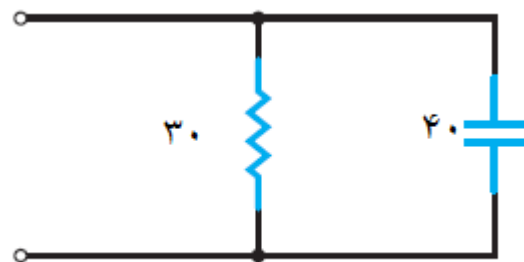
$$X_{C_P} = \frac{Z_S^2}{X_{C_S}}$$

مثال: مدار RC موازی زیر را به مدار سری تبدیل کنید.

$$Z_P = \frac{R \cdot X_c}{\sqrt{R^2 + X_c^2}} = \frac{30 \times 40}{\sqrt{30^2 + 40^2}} = \frac{1200}{50} = 24 \Omega$$

$$\cos \varphi_p = \frac{Z_p}{R_p} = \frac{24}{30} = 0.8$$

$$\sin \varphi_p = \frac{Z_p}{X_{cp}} = \frac{24}{40} = 0.6$$



تبدیل به سری مقادیر موازی

$$R_s = Z_p \times \cos \varphi_p = 24 \times 0.8 = 19.2 \Omega$$

$$X_{cs} = Z_p \times \sin \varphi_p = 24 \times 0.6 = 14.4 \Omega$$



۱- یک مقاومت $R = 10 \Omega$ با یک خازن به راکتانس $X_C = 10\sqrt{3} \Omega$ به صورت سری به یک منبع ولتاژ با معادله $v = 100 \sin 2500t$ متصل است. مطلوب است:

الف: معادله‌ی جریان منبع.

ب: معادله‌ی ولتاژ دو سر هر المان.

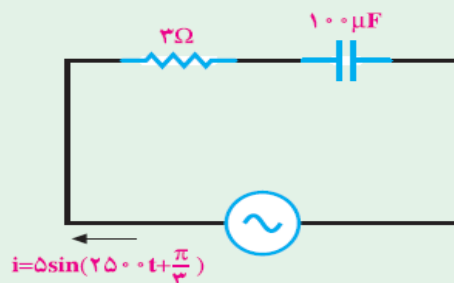
پ: محاسبه‌ی توان‌های مدار و رسم مثلث توان‌ها.

جواب:

$$i(t) = 5 \sin(2500t + 60^\circ)$$

$$v_C(t) = 50\sqrt{3} \sin(2500t - 30^\circ)$$

$$v_R(t) = 50 \sin(2500t + 60^\circ)$$



۲- در مدار مقابل مطلوب است:

الف: معادله‌ی ولتاژ منبع.

ب: معادله‌ی ولتاژ دو سر هر المان.

پ: رسم دیاگرام برداری ولتاژها و جریان مدار.

۳- در یک مدار $R-C$ سری معادله‌ی ولتاژ و جریان منبع به ترتیب $V = 100 \sin(2500t - \frac{\pi}{6})$

و $i = 2 \sin(2500t + \frac{\pi}{6})$ می‌باشد. اندازه‌ی R و C چه قدر است؟

جواب:

$$R = 25 \Omega \text{ و } C = 9/23 \mu F$$

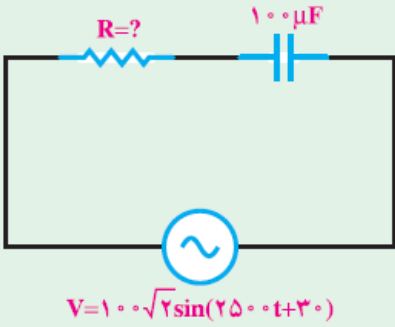
۴- یک خازن با راکتانس $X_C = 5 \Omega$ با یک مقاومت نامشخص به طور سری به هم متصل اند.

اگر جریان به اندازه‌ی $\frac{\pi}{3}$ رادیان از ولتاژ جلو باشد، مقدار R چند اهم است؟

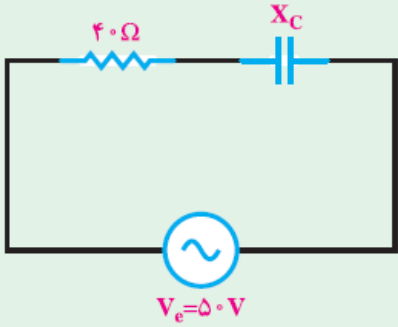
جواب:

$$R = 2/88 \Omega$$

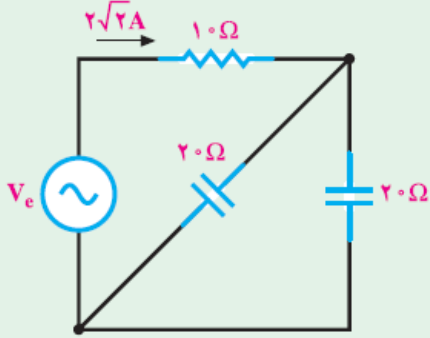
۵- در مدار شکل روبه‌رو اگر $Z = 5\Omega$ باشد، اندازه‌ی R چند اهم است؟
جواب: $R = 3\Omega$



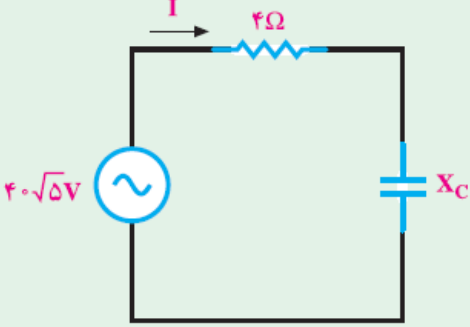
۶- خازنی به ظرفیت $100\mu F$ با یک مقاومت 20Ω سری شده‌اند. در چه فرکانسی ضریب کیفیت مدار $\frac{5}{\pi}$ می‌شود؟
جواب: $f = 50\text{Hz}$



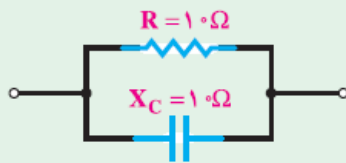
۷- در مدار شکل روبه‌رو، ولتاژ دو سر خازن $V_C = 30\text{V}$ است. ضریب توان و اندازه‌ی X_C چند اهم است؟
جواب: $X_C = 30\Omega$ و $\cos\phi = 0.8$



۸- در مدار روبه‌رو ولتاژ منبع چند ولت است؟
جواب: $V_e = 40\text{V}$



۹- ضریب کیفیت مدار روبه‌رو $Q = 2$ است. جریان مدار چند آمپر است؟
جواب: $I = 10\text{A}$



۱۰- مدار R-C موازی شکل روبه‌رو را به یک مدار R-C سری تبدیل کنید.

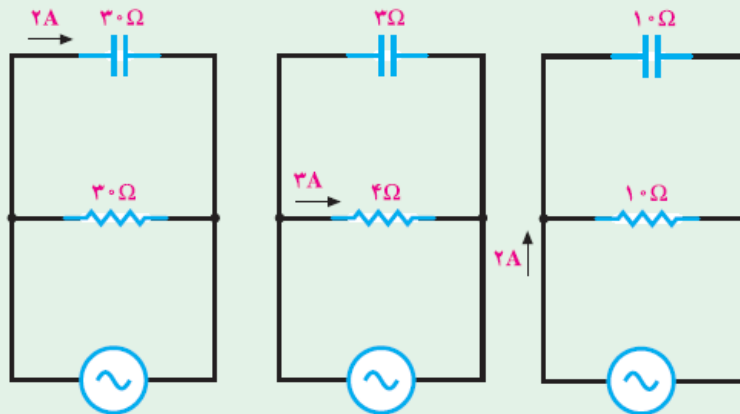
جواب: $R_S = 5\Omega$ و $X_{C_S} = 5\Omega$

۱۱- در هر یک از مدارهای زیر مطلوب است:

الف: معادله‌ی جریان و ولتاژ منبع. ($\theta_V = 0^\circ$)

ب: توان‌های مدار و رسم مثلث توان.

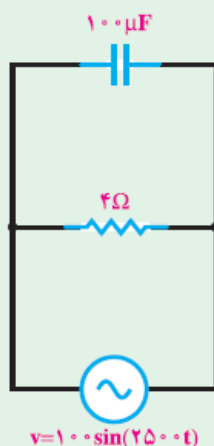
پ: رسم دیاگرام برداری جریان‌ها و ولتاژ مدار.



۱۲- در یک مدار R - C موازی معادله‌ی ولتاژ و جریان به ترتیب $v(t) = 200 \sin 1000t$ و

$i(t) = 10 \sin(1000t + \frac{\pi}{4})$ می‌باشد. اندازه‌ی R و C چه قدر است؟

جواب: $R = 20\sqrt{2}\Omega$ و $C = 3/53 \mu F$



۱۳- در مدار شکل روبه‌رو مطلوب است:

الف: جریان هر شاخه و معادلات زمانی آن‌ها.

ب: در صورت دو برابر شدن فرکانس، بند الف را محاسبه کنید.

پ: در صورت نصف شدن فرکانس، بند الف را محاسبه کنید.

ت: جواب‌های بند الف، ب و پ را مقایسه کنید.

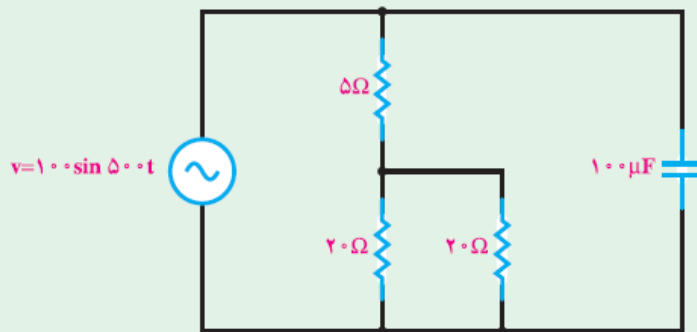
جواب الف: $I_{R(t)} = 25 \sin(2500t + 0^\circ)$

$I_{C(t)} = 25 \sin(2500t + 90^\circ)$

۱۴- در مدار شکل زیر مطلوب است :

الف : امپدانس کل مدار.

ب : ضریب قدرت شبکه.



$$Z = 12 \Omega$$

جواب :

$$\cos \varphi = 0.8$$

مدارهای L - C جریان متناوب

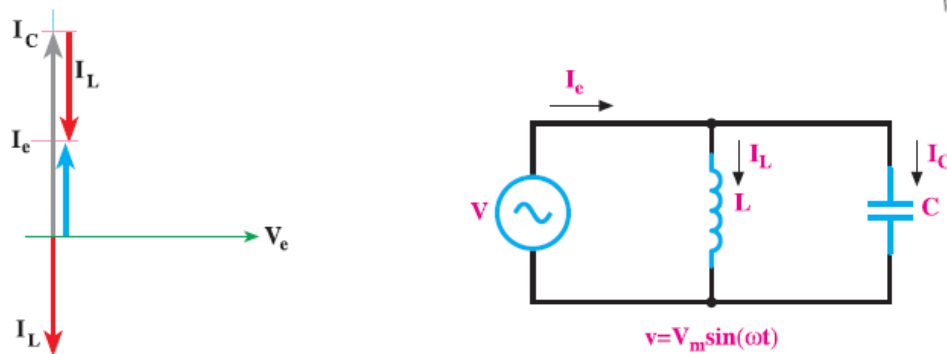
۱-۵- مقدمه

تولید امواج الکتریکی در نوسان‌سازها، تنظیم ایستگاه‌های رادیویی و تلویزیونی بر روی موج فرستنده‌ها، تصحیح ضریب توان شبکه‌های قدرت از جمله موارد کاربرد مدارهای L-C است. در بررسی مدار یک سلف و یک خازن آموختیم که این عناصر رفتار متقابل دارند؛ زیرا در سلف جریان از ولتاژ 90° عقب‌تر است؛ در صورتی که جریان در خازن از ولتاژ 90° جلوتر است. این امر باعث می‌شود رفتار خازن نسبت به رفتار سلف 180° الکتریکی اختلاف فاز پیدا کند و با هم رفتار متقابل داشته باشند. از آن‌جا که هر دو عنصر در شبکه توان راکتیو مبادله می‌کنند، به دلیل اثر متقابل آن‌ها می‌توان توان راکتیو شبکه را کاهش داد و مقدار آن را به صفر رساند. مدارهای L-C در شبکه‌ها به صورت اتصال سری، موازی یا اتصال سری موازی به کار گرفته می‌شوند. در این فصل، اتصال سری و موازی مدارهای L-C را به طور جداگانه بررسی می‌کنیم.

مدار LC سری در جلسه پنجم توضیح داده شده است

۳-۵- مدار L-C موازی

مدار الکتریکی L-C موازی در شکل ۵-۶ نشان داده شده است. در این مدار، ولتاژ دو سر هر دو عنصر C و L با هم برابرند. جریان در داخل مقاومت سلفی (I_L) از ولتاژ منبع به اندازه 90° عقب‌تر و جریان خازنی (I_C) از ولتاژ منبع 90° جلوتر است. جریانی کل I_e از جمع برداری دو جریانی $\vec{I}_C$ و $\vec{I}_L$ به دست می‌آید. چون دو جریانی $\vec{I}_C$ و $\vec{I}_L$ دارای یک راستا هستند و 180° درجه اختلاف فاز دارند، می‌توان جریانی I_e (جریان کل) را از رابطه‌ی $I_e = I_C - I_L$ یا $I_e = I_L - I_C$ به دست آورد. دیاگرام برداری جریانی‌های مدار L-C موازی در مبنای ولتاژ در شکل ۵-۷ با فرض $X_L > X_C$ رسم شده است.



شکل ۵-۶

$$(X_L > X_C)$$

شکل ۵-۷

۱-۳-۵- محاسبه‌ی امپدانس مدار L-C موازی: از شکل‌های ۵-۶ و ۵-۷ برای

محاسبه‌ی امپدانس می‌توان نوشت:

$$I_L = \frac{V_e}{X_L}, \quad I_C = \frac{V_e}{X_C}, \quad Z = \frac{V_e}{I_e}, \quad I_e = \frac{V_e}{Z}$$

$$I_e = I_C - I_L \Rightarrow \frac{V_e}{Z} = \frac{V_e}{X_C} - \frac{V_e}{X_L}$$

با فرض $X_L > X_C$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \rightarrow \text{یا } Z = \frac{X_L \cdot X_C}{X_L - X_C} \quad (5-14)$$

در صورتی که $X_C > X_L$ باشد، در رابطه‌ی ۵-۱۴ جای X_C و X_L در مخرج کسر با هم

عوض می‌شود و به صورت رابطه‌ی ۵-۱۵ نوشته می‌شود.

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \quad \text{یا} \quad Z = \frac{X_L \cdot X_C}{X_C - X_L} \quad (5-15)$$

۵-۳-۲- فرکانس تشدید در مدار L-C موازی: در شکل ۵-۷، دیاگرام برداری اگر $I_C = I_L$ باشد، اندازه‌ی جریان I_e برابر صفر می‌شود. خاصیت سلفی به وسیله‌ی خاصیت خازنی مدار کاملاً خنثی شده و حالت تشدید (رزنانس) برقرار می‌شود. در حالت تشدید می‌توان نوشت:

$$I_L = I_C$$

$$\frac{V_e}{X_L} = \frac{V_e}{X_C} \Rightarrow \frac{1}{X_L} = \frac{1}{X_C} \Rightarrow X_L = X_C$$

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow L\omega^2 C = 1, \quad \omega = 2\pi f_r$$

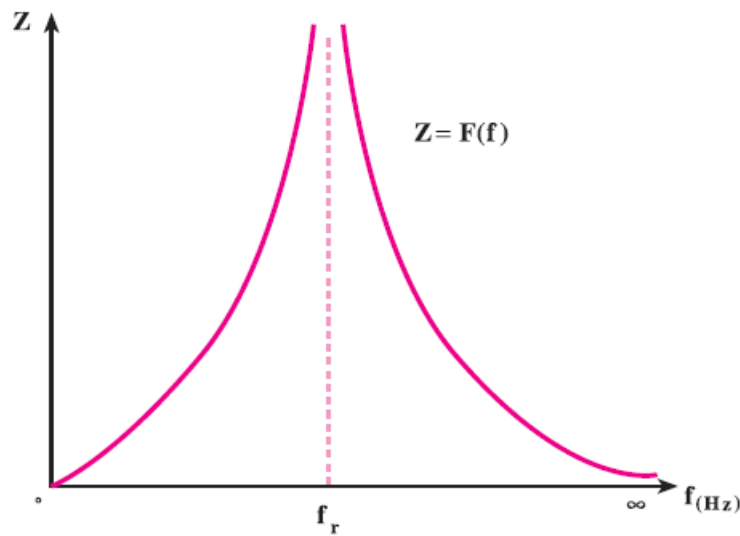
$$L(2\pi f_r)^2 C = 1 \Rightarrow f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (5-16)$$

۵-۳-۳- منحنی تغییرات امپدانس و جریان در فرکانس‌های متغیر: امپدانس مدار

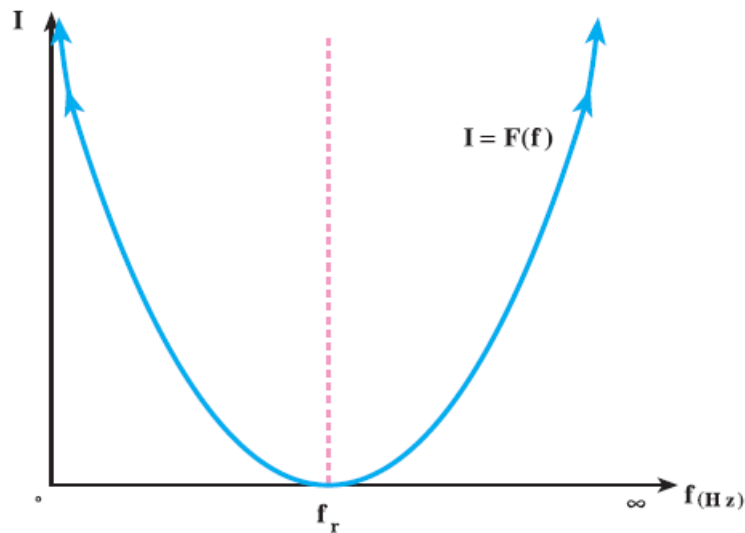
L-C با توجه به رابطه‌ی $\frac{1}{Z} = \frac{1}{2\pi fL} - \frac{1}{2\pi fC}$ وقتی فرکانس مدار صفر است (زمانی که از جریان

DC تغذیه می‌شود) برابر صفر خواهد شد؛ زیرا $X_L = 2\pi fL = 0$ است و مدار را به اتصال کوتاه می‌کشاند. در این حالت، از مدار جریان $I_{S,C}$ (جریان اتصال کوتاه) عبور خواهد کرد. در فرکانس $f = f_r$ (یعنی فرکانس تشدید) $X_L = X_C$ شده و $\frac{1}{Z} = 0$ می‌شود. به عبارت دیگر، امپدانس مدار

بی‌نهایت می‌شود و به عنوان مدار باز عمل می‌کند. در فرکانس‌های خیلی زیاد، زمانی که فرکانس به بی‌نهایت میل می‌کند، خازن به علت تغییرات شدید بار، اتصال کوتاه شده و مدار را به اتصال کوتاه می‌کشاند و $Z = 0$ می‌شود. مجدداً جریان مدار به جریان $I_{S,C}$ می‌رسد. نمودار تغییرات امپدانس و جریان در شکل ۵-۸ رسم شده است.



$f_{(Hz)}$	0	f_r	∞
$Z_{(\Omega)}$	0	∞	0
$I_{(A)}$	∞	0	∞



شکل ۸-۵ — منحنی‌های تغییرات $Z = F(f)$ و $I = F(f)$ در مدار L-C موازی

👉 نتیجه: در حالت رزونانس دو سر مدار L-C سری اتصال کوتاه و دو سر مدار L-C موازی، مدار باز می‌شود.

مثال ۳: در یک مدار L-C موازی، ولتاژ و جریان مدار به صورت $v = 50\sqrt{2} \sin(3000t - 45^\circ)$ و $i = 2\sqrt{2} \sin(3000t + 45^\circ)$ است. اگر شدت جریان در شاخه‌ی C پنج برابر شدت جریان شاخه‌ی

L باشد، مطلوب است:

الف - مقادیر C و L.

ب - فرکانس تشدید.

راه حل:

$$\text{الف: } I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2A \text{ و } V_e = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{50\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 50V \text{ و } I_C = 5I_L$$

$I_C > I_L$ است و مدار پیش فاز می باشد جریان منبع برابر است با

به جای I_C معادل آن $5I_L$ را قرار می دهیم

$$I_e = 5I_L - I_L$$

$$I_e = 4I_L \Rightarrow I_L = \frac{I_e}{4} = \frac{2}{4} = 0.5A$$

$$I_C = 5I_L \Rightarrow I_C = 5 \times 0.5 = 2.5A$$

$$X_L = \frac{V_e}{I_L} = \frac{50}{0.5} = 100\Omega$$

$$X_C = \frac{V_e}{I_C} = \frac{50}{2.5} = 20\Omega$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{100}{3000} = 0.033H$$

$$C = \frac{1 \times 10^{-6}}{X_C \omega} = \frac{1 \times 10^{-6}}{20 \times 3000} = 16.6 \mu F$$

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0.033 \times 16.6 \times 10^{-6}}} = 215.1Hz$$

ب:



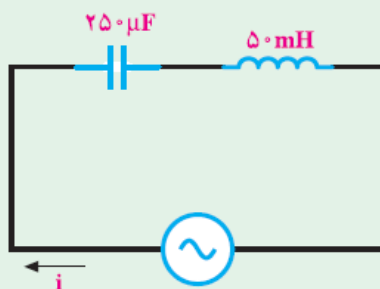
۱- در مدار شکل زیر اگر $i = 5 \sin 40^\circ t$ باشد، مطلوب است:

الف: معادله ولتاژ دو سر L و C ب: معادله ولتاژ منبع

پ: توان های مدار ت: فرکانس رزونانس

ث: رسم دیاگرام برداری ولتاژها و جریان مدار

جواب:



$$v_{L(t)} = 100 \sin(40^\circ t + 90^\circ)$$

$$v_{C(t)} = 50 \sin(40^\circ t - 90^\circ)$$

$$v(t) = 50 \sin(40^\circ t + 90^\circ)$$

$$P_e = 0, P_d = P_s = 125, f_r = 45 \text{ Hz}$$

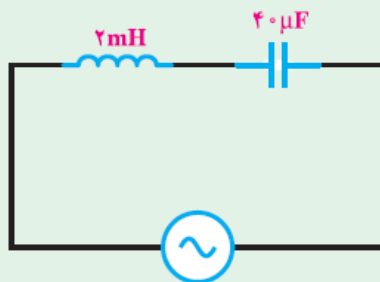
۲- در مدار شکل زیر اگر $v = 10\sqrt{2} \sin 250^\circ t$ باشد، مطلوب است:

الف: معادله جریان منبع ب: معادله ولتاژ دو سر L و C

پ: توان های مدار ت: فرکانس رزونانس

ث: رسم دیاگرام برداری ولتاژها و جریان مدار

جواب:



$$i(t) = 2\sqrt{2} \sin(250^\circ t + 90^\circ)$$

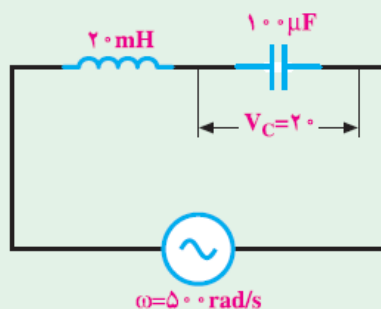
$$v_{L(t)} = 10\sqrt{2} \sin(250^\circ t + 180^\circ)$$

$$v_{C(t)} = 20\sqrt{2} \sin(250^\circ t + 0^\circ)$$

$$P_e = 0, |P_d| = P_s = 20, f_r = 563 \text{ Hz}$$

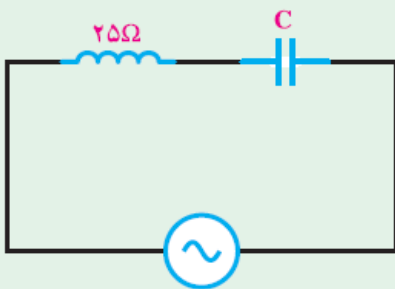
۳- در مدار شکل مقابل معادله ولتاژ و جریان منبع را به دست آورید. ($\theta_V = 0^\circ$ در نظر گرفته شود)

جواب:



$$v(t) = 10\sqrt{2} \sin(50^\circ t + 0^\circ)$$

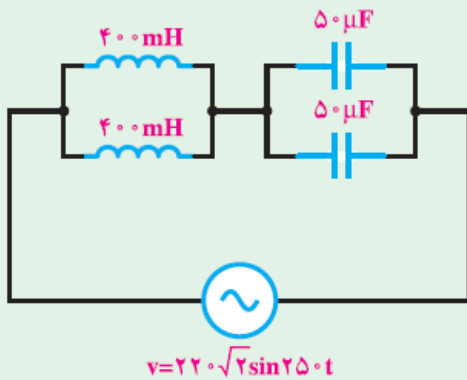
$$i(t) = \sqrt{2} \sin(50^\circ t + 90^\circ)$$



۴- در مدار شکل مقابل اگر معادله ولتاژ و جریان منبع به ترتیب $v = 100 \sin 50^\circ t$ و $i = 2 \sin(50^\circ t + \frac{\pi}{2})$ باشد، مقدار C را محاسبه کنید.

جواب:

$$C = 26.6 \mu F$$



۵- در مدار شکل مقابل مطلوب است:

الف: معادله‌ی جریان منبع

ب: معادله‌ی ولتاژ دو سر هر المان

جواب:

$$i(t) = 22\sqrt{2} \sin(25^\circ t - 9^\circ)$$

$$v_{L(t)} = 110^\circ \sqrt{2} \sin(25^\circ t + 0^\circ)$$

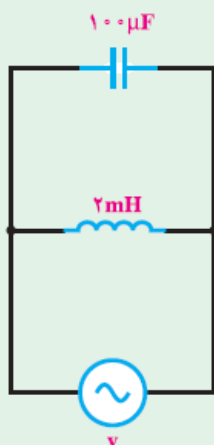
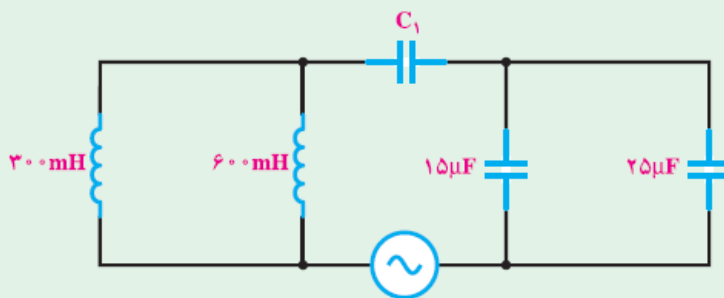
$$v_{C(t)} = 88^\circ \sqrt{2} \sin(25^\circ t - 18^\circ)$$

۶- در مدار شکل زیر با $\omega = 50^\circ \text{ rad/s}$ مدار در حالت تشدید است. ظرفیت C_1 چند

میکروفاراد است؟

جواب:

$$C_1 = 40 \mu f$$



۷- در مدار شکل زیر اگر $v = 100 \sin 250^\circ t$ باشد، مطلوب است:

الف: معادله‌ی جریان هر شاخه

ب: معادله‌ی جریان منبع

پ: توان‌های مدار

ت: فرکانس رزونانس

ج: رسم دیاگرام برداری جریان‌ها

جواب:

$$i_{C(t)} = 25 \sin(250 \cdot t + 90^\circ)$$

$$i_{L(t)} = 20 \sin(250 \cdot t - 90^\circ)$$

$$P_e = 0$$

$$P_d = -250 \text{ VAR} \quad P_s = 250 \text{ VA} \quad i = 5 \sin(250 \cdot t + 90^\circ)$$

$$f_r = 356 \text{ Hz}$$

۸- در مدار شکل زیر اگر $i = 5 \sin 40 \cdot t$ باشد، مطلوب است:

الف: معادله ولتاژ منبع

ب: جریان هر شاخه و معادله آن

پ: توان های مدار

ت: فرکانس رزونانس

جواب:

$$V(t) = 100 \sin(40 \cdot t + 90^\circ)$$

$$i_{L(t)} = 10 \sin(40 \cdot t + 0^\circ)$$

$$i_{C(t)} = 5 \sin(40 \cdot t + 180^\circ)$$

$$P_e = 0$$

$$P_d = 250 \text{ VAR} \quad P_s = 250 \text{ V.A} \quad f_r = 90 \text{ Hz}$$

۹- در مدار شکل مقابل اگر $i_c = 2\sqrt{2} \sin 250 \cdot t$ باشد مطلوب است:

الف: معادله ولتاژ منبع

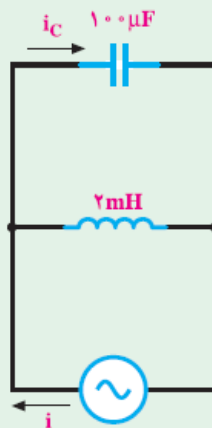
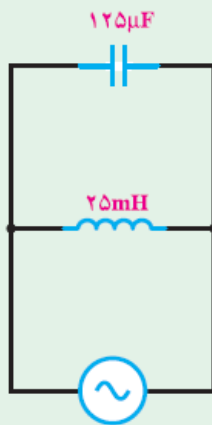
ب: معادله جریان منبع

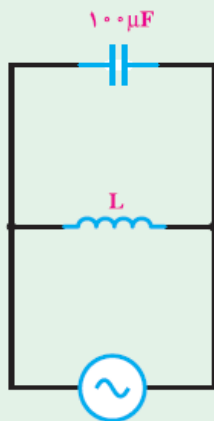
پ: رسم دیاگرام برداری مدار

جواب:

$$V(t) = 8\sqrt{2} \sin(250 \cdot t - 90^\circ)$$

$$i(t) = 0 / 4\sqrt{2} \sin(250 \cdot t + 0^\circ)$$





۱۰- مدار شکل مقابل به ازای $\omega = 4000 \text{ rad/s}$ به حالت
تشدید می‌رود. مقدار L چند میلی‌هائری است؟
جواب:

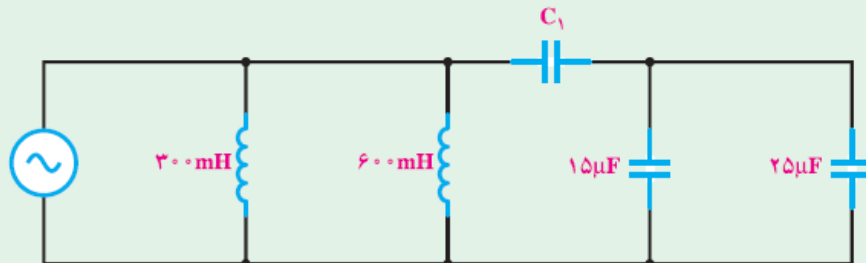
$$L = 0.625 \text{ mH}$$

۱۱- در یک مدار L - C موازی $I_C = 5I_L$ و معادله‌ی ولتاژ و جریان به ترتیب
 $v = 100 \sin 250^\circ t$ و $i = 8 \sin(250^\circ t + \frac{\pi}{4})$ است. اندازه‌ی C و L چه قدر است؟

$$L = 2 \text{ mH}, C = 4 \mu\text{f}$$

۱۲- مدار شکل زیر به ازای $\omega = 500 \text{ rad/s}$ به حالت رزونانس می‌رود. ظرفیت C_1 را محاسبه کنید.

$$C_1 = 4 \mu\text{f} \quad \text{جواب:}$$



۱۳- مدار معادل یک مدار L - C موازی را در دو حالت زیر رسم کنید.

$$\text{الف: } X_L > X_C$$

$$\text{ب: } X_C > X_L$$

۱۴- دو عنصر $L = 1 \text{ mH}$ و $C = 10 \mu\text{F}$ مفروض‌اند. مطلوب است رسم منحنی تابع
تغییرات امپدانس و جریان این دو عنصر در محدوده‌ی فرکانس 5 Hz تا 5 kHz و ولتاژ
 $V_e = 100 \text{ V}$ در دو حالت سری و موازی.

مدارهای R - L - C جریان متناوب

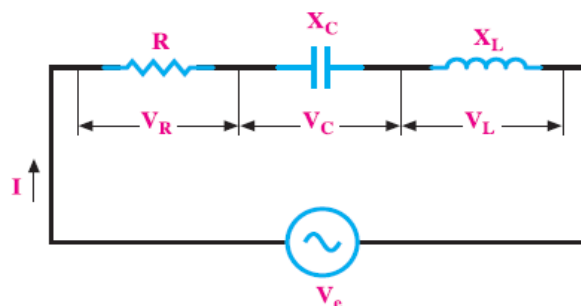
۶-۱- مقدمه

در یک شبکه‌ی الکتریکی، مصرف‌کننده‌های متنوعی تغذیه می‌شوند. این مصرف‌کننده‌ها با توجه به نوع کار در رده‌بندی مقاومت اهمی، سلفی و خازنی یا ترکیب سری یا موازی آن‌ها قرار می‌گیرند؛ مثلاً در یک واحد صنعتی، الکتروموتورهای پر قدرت، انرژی مکانیکی واحد صنعتی را تأمین می‌کنند. می‌دانیم یک الکتروموتور شامل یک یا چند بوبین و سیم‌پیچ است و با یک مدار R-L، مدل می‌شود. در سیستم‌های مخابراتی از قبیل رادیو و تلویزیون، فرستنده‌های رادیویی و تلویزیونی مدارهای مکالمه‌ی تلفن و مدارهای مکالمه‌ی سیستم در بازکن، ترکیب‌های متنوعی از R-L-C در اتصال سری و موازی وجود دارد. در این فصل، ابتدا به بررسی اتصال سری و موازی R-L-C می‌پردازیم. سپس ترکیب‌های مختلط این مدارها را بررسی خواهیم کرد.

۶-۲- مدارهای R-L-C سری

مدار الکتریکی R-L-C سری مطابق شکل ۶-۱ است. در این مدار سه عنصر R، L و C به‌طور متوالی اتصال دارند. اگر جریان سینوسی $i = I_m \sin(\omega t + \theta_i)$ از این مدار سری عبور کند، در دو سر مقاومت اهمی ولتاژی به معادله‌ی $v_R = I_m R (\sin \omega t + \theta_i)$ ایجاد می‌کند که این ولتاژ با جریان هم‌فاز است. در دو سر سلف، ولتاژی به معادله‌ی $v_L = X_L I_m \sin(\omega t + \theta_i + 90^\circ)$ و در دو سر خازن، ولتاژی به معادله‌ی $v_C = X_C I_m \sin(\omega t + \theta_i - 90^\circ)$ پدید می‌آید. به طوری که در شکل ۶-۱ مشاهده می‌شود، این ولتاژها هم‌فاز نیستند و راستای بردار آن‌ها، بر روی هم منطبق نیست. به همین علت، ولتاژ کل مدار از جمع برداری رابطه‌ی ۶-۱ به‌دست می‌آید.

$$\vec{V}_e = \vec{V}_R + \vec{V}_C + \vec{V}_L \quad (6-1)$$



شکل ۶-۱- مدار R-L-C سری

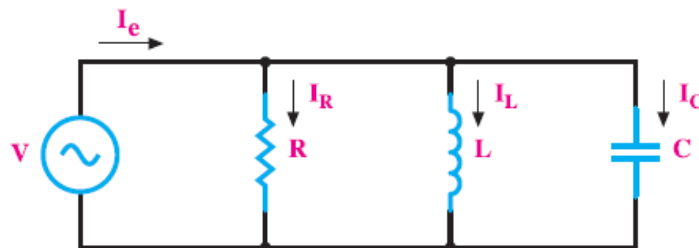
که قبلا در جلسه پنجم توضیح داده شده است

۳-۶- مدارهای R-L-C موازی

در مدارهای R-L-C موازی، ولتاژ عناصر با هم برابرند. برای جریان در هر عنصر، یک مسیر مستقل وجود دارد. مدار الکتریکی و مسیرهای مستقل جریان R-L-C موازی در شکل ۶-۷ نشان داده شده است. اگر یک ولتاژ سینوسی $v = V_m \sin \omega t$ مدار R-L-C موازی را تغذیه کند، جریان i_R با ولتاژ هم فاز، جریان i_C از ولتاژ 90° جلوتر و جریان i_L از ولتاژ 90° عقب تر است، به ترتیب معادله‌ی زمانی $i_R = \frac{V_m}{R} \sin \omega t$ ، $i_C = \frac{V_m}{X_C} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ و $i_L = \frac{V_m}{X_L} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$ را

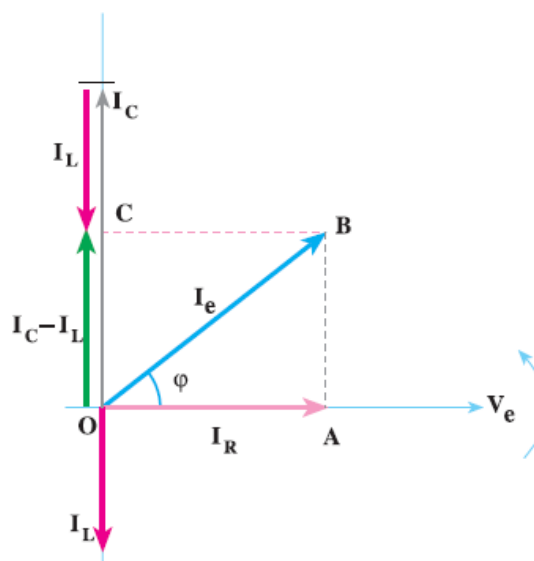
خواهند داشت. جریان کل مدار از جمع برداری جریان‌های $\vec{I}_R$ و $\vec{I}_C$ و $\vec{I}_L$ به دست می‌آید.

$$\vec{I}_e = \vec{I}_R + \vec{I}_L + \vec{I}_C \quad (6-9)$$



شکل ۶-۷- مدار R-L-C موازی

با توجه به مقادیر مؤثر جریان‌های مقاومت اهمی، سلف، خازن از طریق رسم دیاگرام برداری مطابق شکل ۶-۸، جریان کل مدار تعیین می‌شود. در رسم دیاگرام $X_C < X_L$ فرض شده است.



شکل ۶-۸- دیاگرام برداری مدار R-L-C موازی

۱-۳-۶- محاسبه‌ی امپدانس مدار R-L-C موازی: از شکل ۸-۶، دیاگرام برداری

مدار R-L-C در مثلث قائم الزاویه‌ی OBA می‌توان نوشت:

$$\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 \quad (۶-۱۰)$$

$$\overline{OB} = I_e \text{ و } \overline{OA} = I_R \text{ و } \overline{AB} = I_C - I_L \quad (۶-۱۱)$$

با جایگزینی روابط ۶-۱۱ در رابطه‌ی ۶-۱۰ این رابطه به دست می‌آید:

$$I_e^2 = I_R^2 + (I_C - I_L)^2 \quad (۶-۱۲)$$

$$I_e = \frac{V_e}{Z} \text{ و } I_R = \frac{V_e}{R} \text{ و } I_C = \frac{V_e}{X_C} \text{ و } I_L = \frac{V_e}{X_L}$$

با جایگزینی این مقادیر در رابطه‌ی ۶-۱۲ خواهیم داشت:

$$\frac{V_e^2}{Z^2} = \frac{V_e^2}{R^2} + \left(\frac{V_e}{X_C} - \frac{V_e}{X_L} \right)^2$$

$$\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right)^2 \quad (۶-۱۳)$$

۲-۳-۶- محاسبه‌ی اختلاف فاز، ضریب توان‌ها و توان‌های مدار R-L-C موازی:

از دیاگرام برداری شکل ۸-۶ می‌توان نوشت:

$$\tan \varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{I_C - I_L}{I_R} \quad (۶-۱۴)$$

$$\tan \varphi = \frac{\frac{V_e}{X_C} - \frac{V_e}{X_L}}{\frac{V_e}{R}} = \frac{\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}}{\frac{1}{R}} = \tan \varphi = R \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right) \quad (۶-۱۵)$$

بنابراین، اختلاف فاز برابر است با:

$$\varphi = \tan^{-1} R \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right) \quad (۶-۱۶)$$

برای ضریب توان می‌توان نوشت:

$$\cos \varphi = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{I_R}{I} = \frac{\frac{V_e}{R}}{\frac{V_e}{Z}}$$

$$\cos \varphi = \frac{Z}{R} \quad (۶-۱۷)$$

برای تعیین $\sin \varphi$ می‌توان نوشت:

$$\sin \varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{I_C - I_L}{I} \quad (6-18)$$

$$\sin \varphi = \frac{\frac{V_e}{X_C} - \frac{V_e}{X_L}}{\frac{V_e}{Z}} = \frac{\cancel{V_e} \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right)}{\cancel{V_e} \frac{1}{Z}}$$

$$\sin \varphi = Z \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right) \quad (6-19)$$

توان مؤثر را می‌توان به وسیله‌ی روابط زیر محاسبه کرد:

$$P_e = I_R^2 R = \left(\frac{V_e}{R} \right)^2 \times R = \frac{V_e^2}{R} \quad (6-20)$$

اگر از رابطه‌ی ۶-۱۲، $I_e = \frac{V}{Z}$ را جایگزین کنیم، خواهیم داشت:

$$P_e = \frac{V_e^2}{R} = \frac{I_e^2 \times Z^2}{R} = \underbrace{I_e \times Z}_{V_e} \times I_e \times \frac{Z}{R}$$

بنابراین، توان مؤثر را در شکل عام رابطه‌ی ۶-۲۱ خواهیم داشت:

$$P_e = V_e I_e \cos \varphi \quad (6-21)$$

برای محاسبه‌ی توان راکتیو، ابتدا توان‌های سلف و خازن را حساب می‌کنیم و توان راکت را از آن‌ها نتیجه می‌گیریم:

$$P_{dL} = I_L^2 X_L = \frac{V_e^2}{X_L^2} \times X_L = \frac{V_e^2}{X_L}$$

$$P_{dC} = -I_C^2 X_C = -\frac{V_e^2}{X_C^2} \times X_C = -\frac{V_e^2}{X_C}$$

توان راکتیو از جمع جبری توان‌های P_{dL} و P_{dC} به دست می‌آید.

$$P_d = P_{dL} + P_{dC}$$

$$P_d = \frac{V_e^2}{X_L} - \frac{V_e^2}{X_C} = V_e^2 \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right) = V_e \cdot V_e \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right)$$

به جای یکی از V_e ها مقدار $I_e Z = V_e$ را منظور می کنیم.

$$P_d = I_e Z \times V_e \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right)$$

با توجه به رابطه ی ۶-۱۹ می توان نوشت :

$$P_d = \pm I_e V_e \sin \varphi \quad (6-22)$$

توان ظاهری از توان اکتیو و راکتیو به قرار رابطه ی ۶-۲۳ محاسبه می شود.

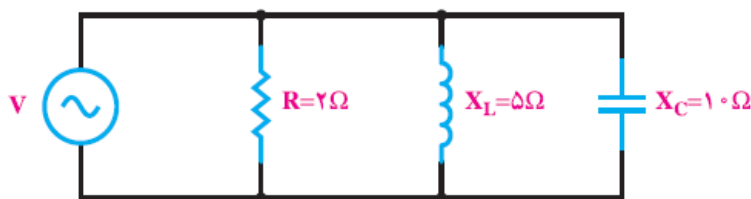
$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = V_e I_e \quad (6-23)$$

مثال ۲: در شکل ۶-۹ مطلوب است :

الف - جریان هر شاخه.

ب - جریان کل و معادله ی زمانی آن.

پ - رسم مثلث توان ها.



$$V = 5\sqrt{2} \sin 30^\circ \cdot t$$

شکل ۶-۹

راه حل:

$$V_e = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5V$$

الف -

$$I_R = \frac{V_e}{R} = \frac{5}{2} = 2.5A$$

هم فاز با ولتاژ V

$$I_C = \frac{V_e}{X_C} = \frac{5}{10} = 0.5A$$

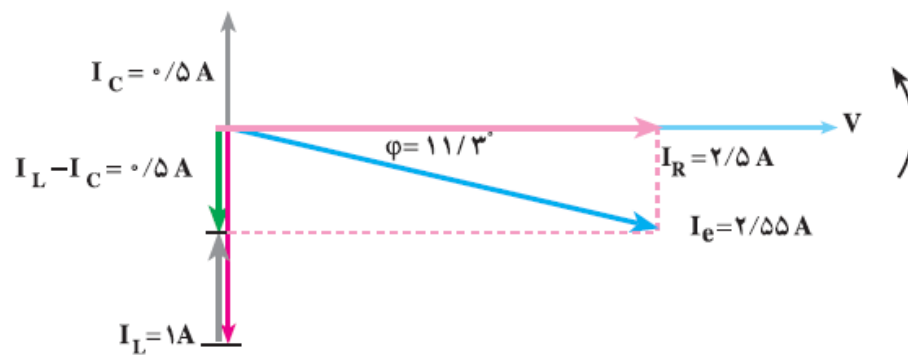
نسبت به ولتاژ 90° پیش فاز

$$I_L = \frac{V_e}{X_L} = \frac{5}{5} = 1A$$

نسبت به ولتاژ 90° پس فاز

ب - برای محاسبه ی جریان کل و معادله ی زمانی آن از دیاگرام برداری جریان ها در مبنای

ولتاژ استفاده می کنیم. بدین منظور، دیاگرام برداری را مطابق شکل ۶-۱۰ رسم می کنیم.



شکل ۱۰-۶

براساس دیاگرام برداری شکل ۱۰-۶، می‌توان محاسبه‌های زیر را انجام داد:

$$I_e^2 = I_R^2 + (I_L - I_C)^2$$

$$I_e^2 = 2/5^2 + (1 - 0.5)^2$$

$$I_e^2 = 6/5 \Rightarrow I = 2/5.5 \text{ A}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{I_L - I_C}{I_R} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{0.5}{2/5} \right) = 11/3^\circ$$

$$I_m = I_e \sqrt{2} = 2/5.5 \times \sqrt{2} = 3/6 \text{ A}$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \theta_i)$$

$$\varphi = \theta_v - \theta_i$$

$$11/3^\circ = 0^\circ - \theta_i$$

$$\theta_i = -11/3^\circ$$

$$i = 3/6 \sin(30^\circ t - 11/3^\circ)$$

پ- برای رسم مثلث توان‌ها، ابتدا توان تک‌تک عناصر را محاسبه می‌کنیم.

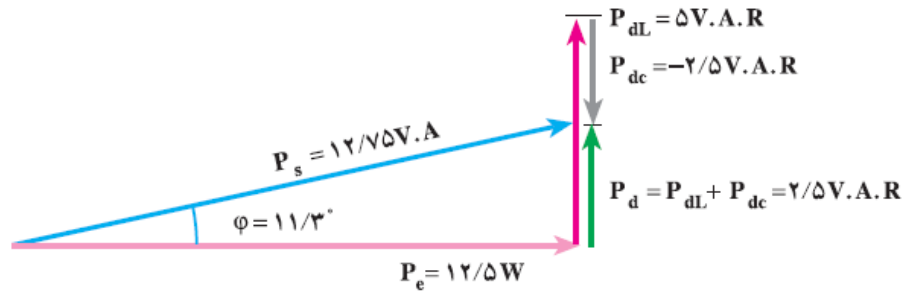
$$P_e = I_R^2 \times R = (2/5)^2 \times 2 = 12/5 \quad \text{W}$$

$$P_{dL} = I_L^2 \times X_L = 1^2 \times 5 = 5 \quad \text{V.A.R}$$

$$P_{dC} = -I_C^2 \times X_C = -0.5^2 \times 10 = -2/5 \quad \text{V.A.R}$$

$$P_d = P_{dL} + P_{dC} = 5 - 2/5 = 2/5 \quad \text{V.A.R}$$

$$P_S = \sqrt{12/5^2 + 2/5^2} = 12/75 \quad \text{V.A}$$



شکل ۶-۱۱

۴-۶- مدارهای R-L-C مختلط (سری، موازی)

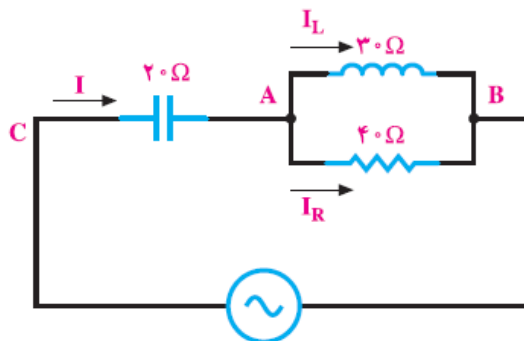
مدارهای R-L-C مختلط از چند مدار ساده R، R-L، R-C یا R-L-C با شاخه‌های موازی یا سری تشکیل می‌شوند. این مدارها پس از ساده کردن شبکه در نهایت به یک مدار R-L یا R-C ساده تبدیل می‌شوند. از آنجا که خواص این مدارها را قبلاً مطالعه کرده‌ایم، مدارهای R-L-C مختلط را با چند مثال دنبال می‌کنیم. در تحلیل مدارهای R-L-C مختلط، برای سهولت تحلیل، ولتاژ شاخه‌ی موازی را به عنوان ولتاژ مرجع (مبنای) در نظر می‌گیرند و سایر کمیت‌های الکتریکی مدار را بر اساس ولتاژ مبنای شاخه‌ی موازی محاسبه می‌کنند.

مثال ۳: در مدار الکتریکی شکل ۶-۱۲

$V_{AB} = 120$ ولت است.

مطلوب است:

الف - جریان هر شاخه و جریان کل.



شکل ۶-۱۲

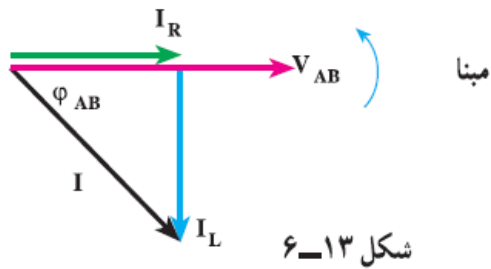
راه‌حل: با فرض اینکه $V_{AB} = 120$ مناسب است محاسبات را دنبال می‌کنیم.

$$I_R = \frac{V_{AB}}{R} = \frac{120}{40} = 3 [A]$$

$$I_L = \frac{V_{AB}}{X_L} = \frac{120}{30} = 4 [A]$$

برای محاسبه‌ی جریان کل، دیاگرام برداری جریان‌ها را در مبنای V_{AB} رسم می‌کنیم و I_R

هم فاز V_{AB} می باشد و I_L به اندازه 90° درجه از V_{AB} عقب تر است.
از شکل ۶-۱۳ می توان نوشت:



شکل ۶-۱۳

این رابطه، همان رابطه ی ۳-۲۷ است.

$$\vec{I} = \vec{I}_R + \vec{I}_L$$

$$I^2 = I_R^2 + I_L^2$$

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 [A]$$

$$\varphi_{AB} = \tan^{-1}\left(\frac{I_L}{I_R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53^\circ$$

ب- ولتاژ منبع.

V_{AC} ولتاژ دو سر خازن است که محاسبه می شود.

$$V_{AC} = X_C \cdot I = 20 \times 5 = 100 [V]$$

برای محاسبه ی ولتاژ منبع باید جمع برداری زیر را انجام داد.

$$\vec{V}_{CB} = \vec{V}_{CA} + \vec{V}_{AB}$$

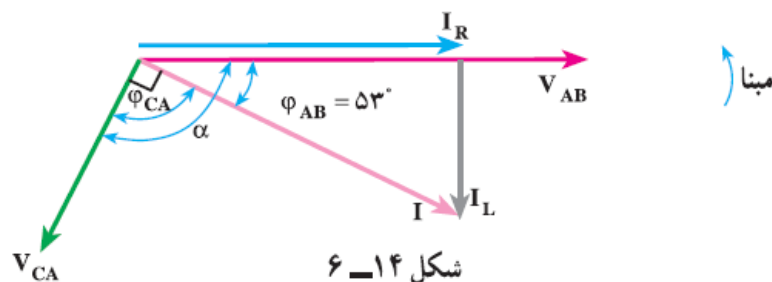
با استفاده از رابطه ی ۲-۵ محاسبه می شود.

$$\vec{V}_e = \vec{V}_{AB} + \vec{V}_{CA} = \sqrt{(V_{AB})^2 + (V_{CA})^2 + 2(V_{AB})(V_{CA})\cos\alpha}$$

که α زاویه ی بین V_{AB} با V_{CA} است و برای محاسبه ی آن باید V_{CA} را در شکل ۶-۱۳ رسم کرد.

V_{CA} ولتاژ دو سر خازن خالص می باشد که از جریان I به اندازه 90° درجه عقب تر است

و با رسم آن در شکل ۶-۱۳ و شکل ۶-۱۴ به دست می آید.



شکل ۶-۱۴

با توجه به شکل ۶-۱۴ داریم:

$$\alpha = \varphi_{AB} + \varphi_{CA}$$

$$\alpha = 53^\circ + 9^\circ = 62^\circ$$

با جاگذاری مقادیر در رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود.

$$V = \vec{V}_{AB} + \vec{V}_{CA} = \sqrt{V_{AB}^2 + V_{CA}^2 + 2V_{AB} \cdot V_{CA} \cos \alpha}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_{AB} + \vec{V}_{CA} = \sqrt{12^2 + 10^2 + 2(12)(10)(-0.8)} = 7.2 / 1 [V]$$

پ- امپدانس کل مدار.

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{7.2 / 1}{5} = 1.44 \Omega$$

است.

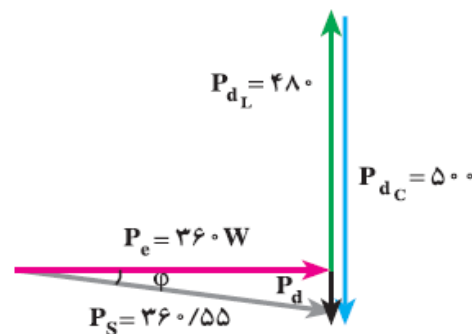
ت- مثلث توان‌ها.

$$P_e = R \cdot I_R^2 = 4 \cdot (3)^2 = 36 [W]$$

$$P_{dL} = X_L \cdot I_L^2 = 3 \cdot (4)^2 = +48 [V.A.R]$$

$$P_{dC} = -X_C \cdot I_C^2 = -X_C \cdot I^2 = -2 \cdot (5)^2 = -50 [V.A.R]$$

$$P_d = P_{dL} + P_{dC} = 48 - 50 = -2 VAR$$

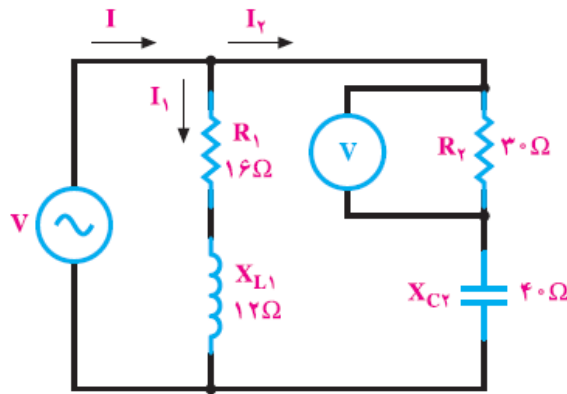


شکل ۶-۱۵

با توجه به شکل ۶-۱۵ می‌توان نوشت:

$$P_S = \sqrt{P_e^2 + (P_{dL} + P_{dC})^2} = \sqrt{36^2 + (48 - 50)^2} = 36.055 V.A$$

در این مسئله می‌توانیم اتصال موازی را به سری تبدیل کنیم و مانند RLC سری حل کنیم



شکل ۱۶-۶

مثال ۴: در مدار الکتریکی شکل

۱۶-۶ اگر مقدار قرائت شده از ولت متر در دو سر مقاومت 30 اهمی 60 ولت باشد، مطلوب است:

الف - جریان دو شاخه.

$$I_2 = \frac{V_R}{R} = \frac{60}{30} = 2A$$

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_{C2}^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50\Omega$$

$$V = Z_2 \cdot I_2 = 50 \times 2 = 100V$$

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_{L1}^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20\Omega$$

$$I_1 = \frac{V}{Z_1} = \frac{100}{20} = 5A$$

ب - رسم دیاگرام برداری I_1 و I_2 .

ابتدا V را به عنوان مبنا اختیار می کنیم و با محاسبه ی اختلاف فاز I_1 و I_2 نسبت به V آن دو را رسم می کنیم (شکل ۱۷-۶).

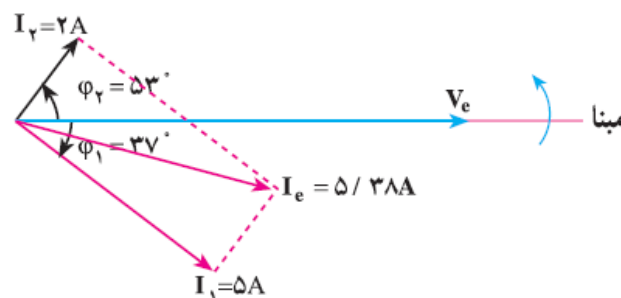
شاخه ی ۱ یک مدار R-L سری است و داریم: $\cos \phi_1 = \frac{R_1}{Z_1} = \frac{16}{20} = 0.8$

I_1 «پس فاز» $\phi_1 = \cos^{-1}(0.8) = 37^\circ$

شاخه ی ۲ یک مدار R-C سری است و داریم: $\cos \phi_2 = \frac{R_2}{Z_2} = \frac{30}{50} = 0.6$

I_2 «پیش فاز» $\phi_2 = \cos^{-1}(0.6) = -53^\circ$

I_1 به اندازه ی $\phi_1 = 37^\circ$ از V عقب تر و I_2 به اندازه ی $\phi_2 = 53^\circ$ از V جلوتر است.



شکل ۱۷-۶

$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2$$

پ- جریان کل I.

$$\alpha = \varphi_1 + \varphi_2 = 37^\circ + 53^\circ = 90^\circ$$

با توجه به شکل ۶-۱۶ داریم:

 α زاویه‌ی بین I_1 و I_2 است.

و با توجه به رابطه‌ی ۵-۲ مقدار I محاسبه می‌شود.

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2 \cos \alpha} = \sqrt{5^2 + 2^2 + 2(5)(2) \cos 90^\circ} = 5.38 \text{ A}$$

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{100}{5.38} = 18.5 \Omega$$

ت- امپدانس مدار.

ث- توان‌های مدار و رسم مثلث توان‌ها.

توان‌های اکتیو و راکتیو را برای هر شاخه محاسبه می‌کنیم.

$$P_{e_1} = V \cdot I_1 \cos \varphi_1 = 100 \times 5 \times 0.8 = 400 \text{ [W]}$$

 P_{d_1} مثبت است؛ زیرا این شاخه پس‌فاز است.

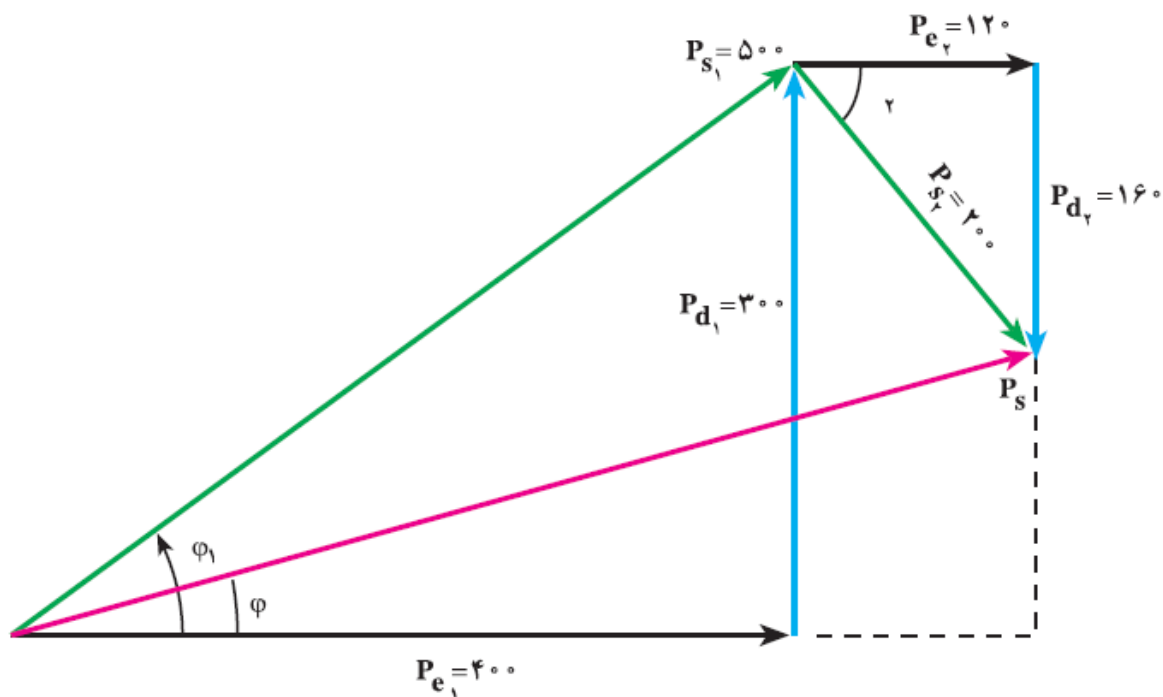
$$P_{d_1} = V \cdot I_1 \sin \varphi_1 = 100 \times 5 \times 0.6 = +300 \text{ [V.A.R]}$$

$$P_{e_2} = V \cdot I_2 \cos \varphi_2 = 100 \times 2 \times 0.6 = 120 \text{ [W]}$$

 P_{d_2} منفی است؛ زیرا این شاخه پیش‌فاز است.

$$P_{d_2} = -V \cdot I_2 \sin \varphi_2 = -100 \times 2 \times (0.8) = -160 \text{ [V.A.R]}$$

مثلث توان‌ها مطابق شکل ۶-۱۸ رسم می‌شود.



شکل ۶-۱۸

توان ظاهری هر شاخه با توجه به مثلث توان هر شاخه در شکل ۶-۱۸ محاسبه می‌شود.

$$P_{S_1} = \sqrt{P_{e_1}^2 + P_{d_1}^2} = \sqrt{400^2 + 300^2} = 500 \text{ [V.A]}$$

$$P_{S_r} = \sqrt{P_{e_r}^2 + P_{d_r}^2} = \sqrt{120^2 + (-160)^2} = 200 \text{ V.A}$$

برای محاسبه‌ی توان ظاهری کل باید به مثلث ABC توجه کرد و نوشت:

$$P_e = P_{e_1} + P_{e_r} = 400 + 120 = 520 \text{ [W]}$$

$$P_d = P_{d_1} - P_{d_r} = 300 - 160 = 140 \text{ [V.A.R]}$$

$$P_s^2 = P_e^2 + P_d^2$$

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = \sqrt{520^2 + 140^2} = 538/5 \text{ [V.A]}$$

ج - ضریب قدرت کل شبکه‌ی $\cos \phi$:

$$\cos \phi = \frac{P_e}{P_s} = \frac{520}{538/5} = 0/96$$

۶-۵ رزنانس در مدار سری قبلاً توضیح داده شده است

۶-۶ رزنانس در مدارهای R-L-C موازی

اگر عناصر R، C و L در مدار R-L-C موازی ثابت باشند، با تغییر فرکانس مدار، امپدانس و جریان مدار تغییر می‌کند. اگر فرکانس مدار صفر باشد، جریان I جریان اتصال کوتاه خواهد بود؛ زیرا $X_L = 2\pi fL$ برابر صفر می‌شود. در مدار موازی R-L-C اگر هر کدام از عناصر R، X_L و X_C صفر شوند، از مدار جریان اتصال کوتاه (∞) عبور خواهد کرد. وقتی فرکانس زیاد می‌شود، $X_L = 2\pi fL$ افزایش و $X_C = \frac{1}{2\pi fc}$ کاهش می‌یابد. در فرکانس f_r (فرکانس تشدید) $X_L = X_C$

می‌شود. در این حالت، با توجه به رابطه‌ی $\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right)^2$ مقدار $Z = R$ و جریان

مدار $I_e = \frac{V_e}{R}$ می‌شود. این مقدار جریان، حداقل جریانی است که در مدار برقرار می‌شود. در حالت تشدید مدار R-L-C موازی (L و C)، دو شاخه‌ی باز شده محسوب می‌شوند. در فرکانس‌های زیاد با این که $X_L = 2\pi fL$ زیاد می‌شود ولی $X_C = \frac{1}{2\pi fc}$ به اتصال کوتاه می‌رود. به گونه‌ای که در

فرکانس $f \rightarrow \infty$ ، $X_C = 0$ ، مدار مجدداً اتصال کوتاه می‌شود و جریان اتصال (∞) از مدار عبور خواهد کرد. چون امپدانس مدار در تغییر فرکانس تغییر می‌کند، کمیت‌های وابسته به آن — یعنی، I ، P_e ، P_d ، $\cos \phi$ و $\sin \phi$ نیز تغییر می‌کنند.

در فرکانس تشدید می توان نوشت:

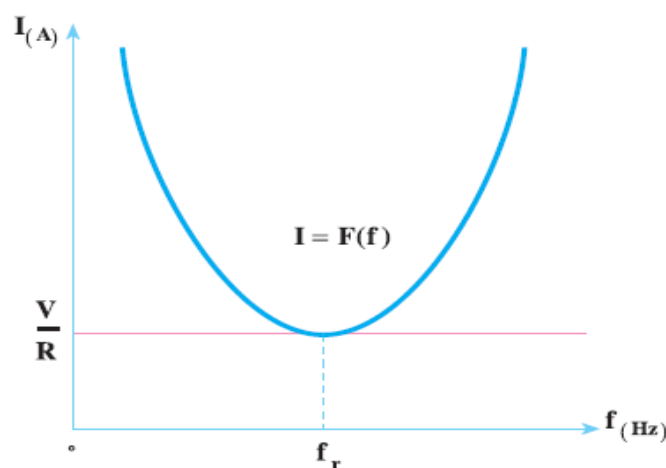
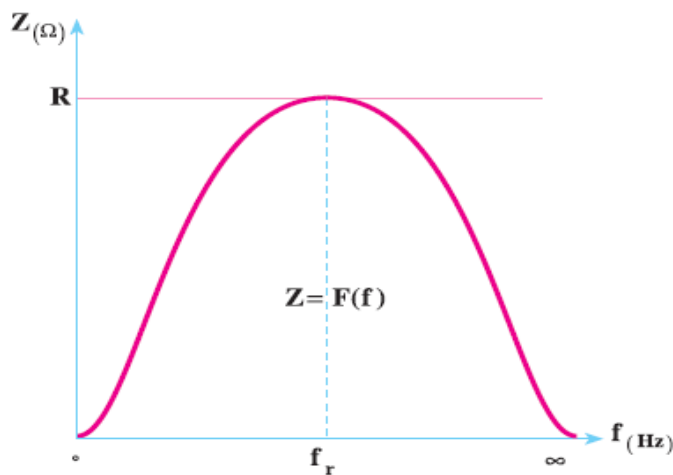
$$X_L = X_C$$

$$2\pi f_r L = \frac{1}{2\pi f_r C}$$

$$(2\pi f_r)^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (6-35)$$

با مقایسه‌ی رابطه‌ی ۶-۲۶ و ۶-۳۵ نتیجه می‌گیریم که فرکانس تشدید در حالت R-L-C سری و موازی یکسان هستند.

تابع تغییرات $Z = F(f)$ و $I = F(f)$ در شکل‌های ۶-۲۲ رسم شده‌اند.

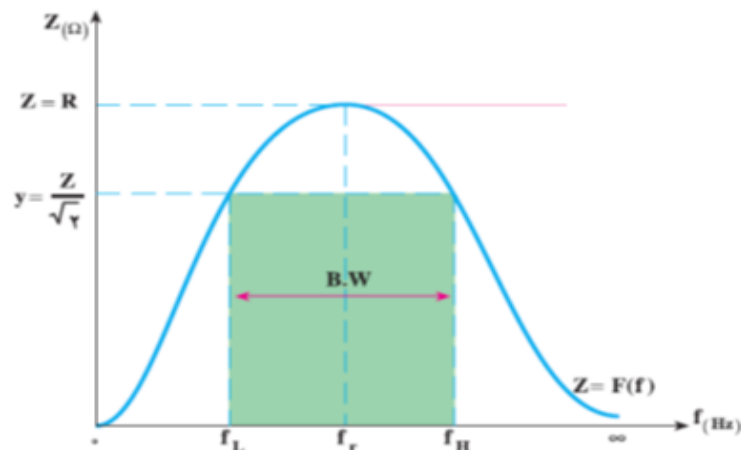


$f_{(Hz)}$	۰	f_r	∞
$Z_{(\Omega)}$	۰	R	$\frac{V}{R}$
$I_{(A)}$	۰	$\frac{V}{R}$	∞

شکل ۶-۲۲ — منحنی‌های تغییرات $Z = F(f)$ و $I = F(f)$ در مدار R-L-C سری

۱-۶-۶- پهنای باند و ضریب کیفیت مدار R-L-C موازی: برای تعیین پهنای باند،

منحنی $Z = F(f)$ را با خط $y = \frac{Z}{\sqrt{2}}$ شکل ۶-۲۳ قطع می‌دهیم. با بررسی شکل ۶-۲۰ و ۶-۲۳ می‌توان نتیجه گرفت که مدار R-L-C سری برای فرکانس‌های محدوده‌ی پهنای باند، امپدانس ورودی کم ولی مدار R-L-C موازی در این محدوده‌ی فرکانسی، امپدانس ورودی زیادی نشان می‌دهد. از این لحاظ مدار R-L-C موازی به عنوان فیلترهای میان‌گذر مورد استفاده قرار می‌گیرد.



شکل ۶-۲۳- پهنای باند مدار R-L-C موازی

برای محاسبه‌ی پهنای باند می‌توان نوشت:

$$B.W = f_H - f_L$$

با توجه به رابطه‌ی ضریب کیفیت (Q) و تحلیلی مشابه مدارهای R-L-C سری (قسمت ۲-۵-۶) می‌توان رابطه‌ی ۶-۳۶ را نوشت.

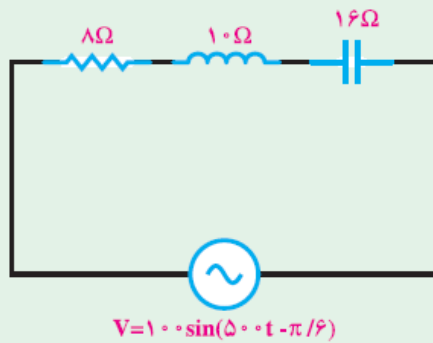
$$Q = R.C.\omega \quad \text{یا} \quad Q = \frac{R}{L\omega} \quad (6-36)$$

اگر ω را برای فرکانس تشدید به ω نشان دهید ضریب کیفیت مدار در فرکانس تشدید از رابطه‌ی ۶-۳۷ محاسبه می‌شود.

$$Q_s = R.C.\omega_s = \frac{R}{X_C} \quad (6-37)$$

پهنای باند در فرکانس رزونانس از رابطه‌ی ۶-۳۸ به دست می‌آید.

$$B.W = \frac{f_r}{Q_s} = \frac{1}{2\pi R.C} \quad (6-38)$$



۱- در مدار شکل مقابل مطلوب است :

الف - امپدانس مدار.

ب - جریان منبع و معادله‌ی زمانی آن.

پ - ولتاژ دوسر هر المان.

ت - رسم دیاگرام برداری جریان و ولتاژها.

جواب :

$$Z = 10\Omega$$

$$I_e = 5\sqrt{2} \text{ A}$$

$$i(t) = 10 \sin(500t + 7^\circ)$$

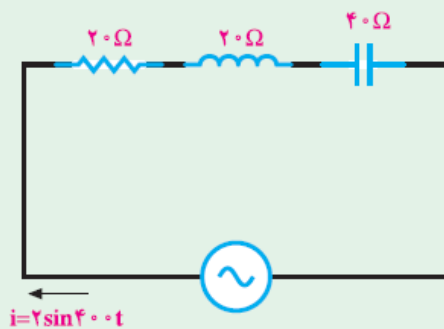
$$V_R = 40\sqrt{2}, V_L = 50\sqrt{2}, V_C = 80\sqrt{2}$$

۲- در مدار شکل مقابل مطلوب است :

الف - امپدانس مدار.

ب - معادله‌ی ولتاژ منبع.

پ - محاسبه‌ی توان‌ها و رسم مثلث توان‌ها.



$$Z = 20\sqrt{2}, V_{(t)} = 40\sqrt{2} \sin(400t - 45^\circ)$$

جواب :

$$P_e = 40 \text{ W}, P_d = 40 \text{ VAR}, P_s = 40\sqrt{2} \text{ VA}$$

۳- در یک مدار R-L-C سری $v = 100\sqrt{2} \sin(2000t + 53^\circ)$ و $i = 20\sqrt{2} \sin 2000t$

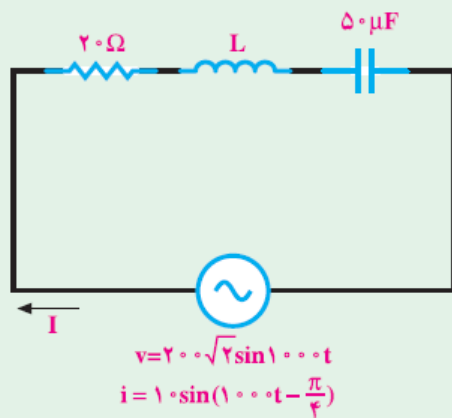
مطلوب است اندازه‌ی R ، L و C . $v_L = 180\sqrt{2} \sin(2000t + \frac{\pi}{4})$ است.

جواب :

$$R = 3\Omega$$

$$L = 4/5 \text{ mH}$$

$$C = 10 \mu\text{f}$$



۴- در مدار شکل مقابل مطلوب است:
الف- اندازه‌ی L .

ب- اختلاف پتانسیل دوسر هر المان.

جواب: $L = 0.04H$

$$V_R = 100\sqrt{2}\Omega$$

$$V_L = 200\sqrt{2}\Omega$$

$$V_C = 100\sqrt{2}\Omega$$

۵- یک مدار R-L-C سری با $L = 0.01H$ و معادله‌ی ولتاژ و جریان منبع به ترتیب

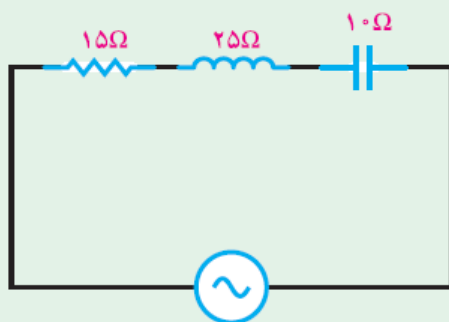
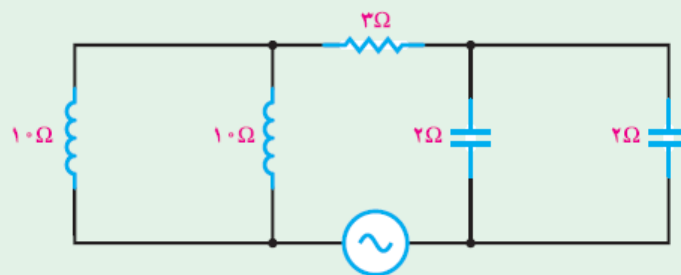
$v = 100\sqrt{2} \sin(1000t + \frac{\pi}{3})$ و $i = 10 \sin(1000t + 105^\circ)$ است. اندازه‌ی R و C چه قدر است؟

جواب: $R = 10\Omega$, $C = 50\mu f$

۶- در مدار شکل زیر معادله‌ی ولتاژ منبع $v = 50\sqrt{2} \sin 400t$ است. مطلوب است معادله‌ی

زمانی جریان منبع.

جواب: $i(t) = 10\sqrt{2} \sin(400t - 53^\circ)$

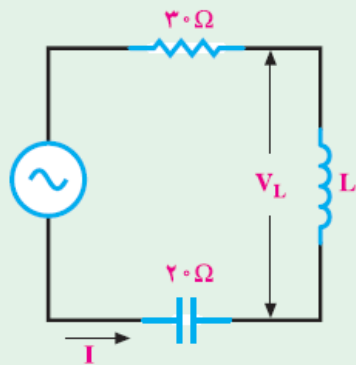


۷- در مدار مقابل $V_R = 45$ ولت است.

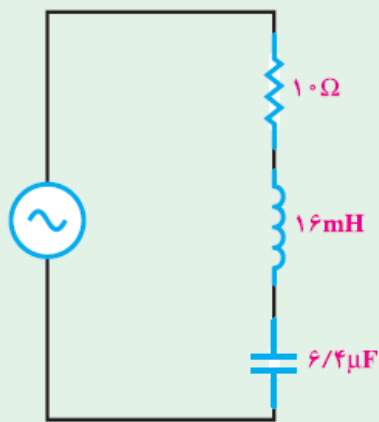
معادله‌ی ولتاژ و جریان منبع را به دست آورید.

جواب: $v(t) = 9 \sin \omega t$

$$i(t) = 3\sqrt{2} \sin(\omega t - 45^\circ)$$



۸- در مدار مقابل $V_L = 600V$ و $I = 10A$ است.
ولتاژ منبع چند ولت است؟
جواب: $V = 500V$



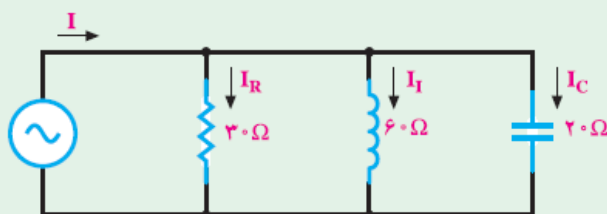
۹- فرکانس رزونانس و نیم توان بالای مدار مقابل را
به دست آورید.

$$f_r = 498 \text{ Hz}$$

$$f_L = 448 \text{ Hz}$$

$$f_H = 548 \text{ Hz}$$

۱۰- در مدار شکل زیر اگر $v = 120 \sin 40^\circ t$ باشد مطلوب است :



الف - جریان شاخه ها و معادلات
آن ها.

ب - جریان منبع و معادله ی آن.

پ - امپدانس مدار.

ت - رسم دیاگرام برداری جریان ها و ولتاژ.

جواب :

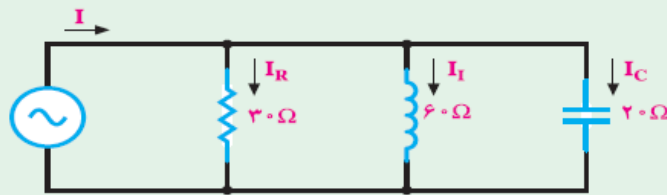
$$i_R = 4 \sin 40^\circ t$$

$$i_L = 2 \sin(40^\circ t - 90^\circ)$$

$$i_C = 6 \sin(40^\circ t + 90^\circ)$$

$$i = 4\sqrt{2} \sin(40^\circ t + 45^\circ)$$

$$Z = 15\sqrt{2} \Omega$$



۱۱- در مدار شکل مقابل
 $i_R = 6 \sin 1000t$ است. مطلوب
 است:

الف - ولتاژ منبع و معادله آن.

ب - جریان منبع و معادله آن.

پ - محاسبه توان های مدار و رسم مثلث توان.

ت - ضریب قدرت کل شبکه.

جواب:

$$v(t) = 180 \sin 1000t$$

$$P_e = 540W \quad \cos \phi = 0.7$$

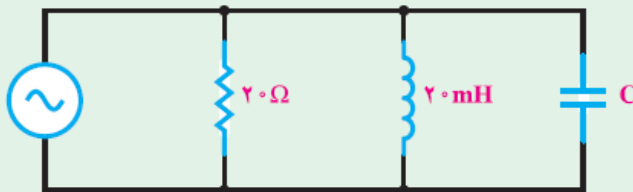
$$i(t) = 6\sqrt{2} \sin(1000t + 45^\circ)$$

$$P_d = 540VAR \quad P_s = 540\sqrt{2}VA$$

۱۲- در مدار شکل زیر $v = 200 \sin 500t$ و $i = 10\sqrt{2} \sin(500t + \theta_i)$ است. مطلوب

است اندازه ی C برحسب میکرو فاراد و θ_i برحسب رادیان. ($X_C > X_L \Rightarrow \phi > 0$)

جواب:



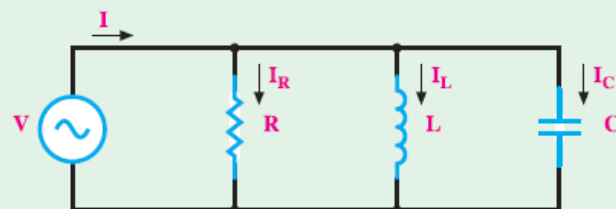
$$C = 100 \mu F$$

$$\theta_i = -\frac{\pi}{4} \text{ Rad}$$

۱۳- در مدار زیر $v = 100 \sin 2500t$ ، $i = 5 \sin(2500t + \frac{\pi}{4})$ و $i_C = 10 \sin(2500t + \frac{\pi}{4})$

می باشد. مطلوب است:

الف - اندازه ی R، L و C.



جواب:

$$R = 20\sqrt{2} \Omega, \quad C = 40 \mu F, \quad L = 6/19 \text{ mH}$$

۱۴- در مدار R-L-C موازی روبه‌رو مطلوب است:

الف - فرکانس رزونانس.

ب - ضریب کیفیت.

پ - پهنای باند.

ت - فرکانس‌های نیم‌توان.

جواب:

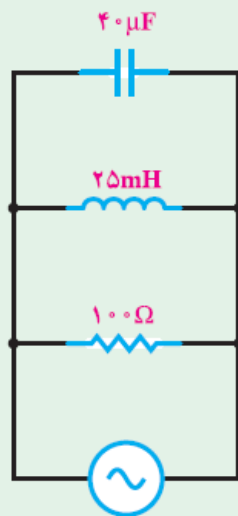
$$f_r = 160 \text{ Hz}$$

$$Q_s = 4$$

$$BW = 40 \text{ Hz}$$

$$f_L = 140 \text{ Hz}$$

$$f_H = 180 \text{ Hz}$$

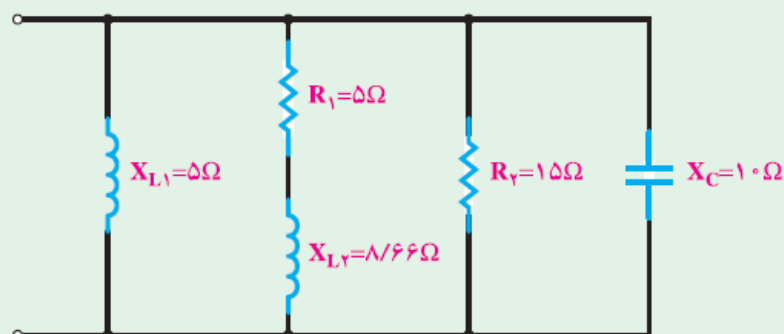


۱۵- یک مدار R-L-C موازی را به یک مدار سری در حالت زیر تبدیل کنید.

الف - $X_L > X_C$

ب - $X_C > X_L$

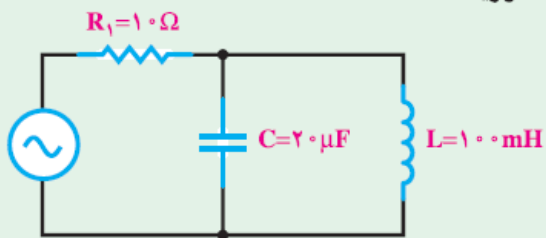
۱۶- امپدانس و ضریب توان مدار شکل زیر را با استفاده از تبدیل عناصر به‌دست آورید.



۱۷- فرکانس تشدید شکل زیر را به دست آورید.

جواب :

$$f_r = 112.6 \text{ Hz}$$



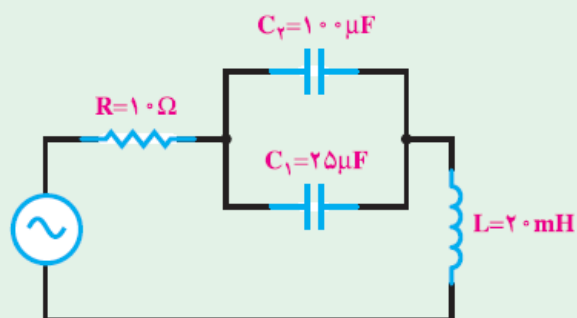
۱۸- در مدارات شکل های زیر مطلوب است :

الف - فرکانس تشدید.

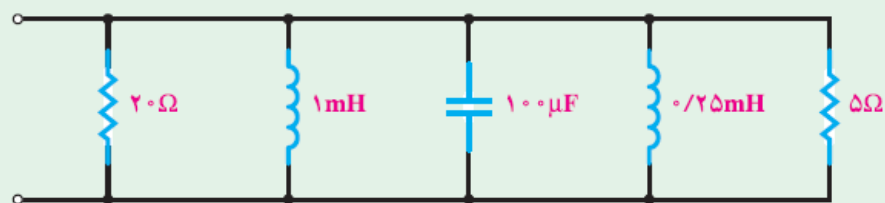
ب - ضریب کیفیت در حالت رزونانس.

پ - پهنای باند.

ت - فرکانس های نیم توان.



(الف)



(ب)

مدار الکتریکی جلسه نهم

تحلیل شبکه های الکتریکی یک فاز با استفاده از اعداد مختلط

اعداد موهومی و ابراتور: j عمل کننده ای است که اگر به یک عدد حقیقی ضرب شود موقعیت آنرا در عکس عقربه های ساعت روی محورهای مختصات 90° درجه تغییر مکان می دهد مثلاً اگر عدد 5 را یک بار در ابراتور j ضرب کنیم عدد 5 در روی محور y ها قرار می گیرد. ر جزو اعداد حقیقی نخواهد شد چون روی محور اعداد حقیقی یعنی x ها نمی باشد به این گونه اعداد، اعداد موهومی یا غیر حقیقی می گویند. اگر عدد 5 را دوبار در j ($5 \times j$) ضرب کنیم یعنی آنرا دوتا 90° درجه یا 180° درجه در جهت عکس عقربه های ساعت چرخانیم که همان (-5) خواهد شد پس می توان نوشت:

$$j^2 = -1 \Rightarrow j = \sqrt{-1} \Rightarrow j^3 = -j \Rightarrow j^4 = 1 \Rightarrow j^5 = j \Rightarrow j^6 = -1 \Rightarrow j^7 = -j \Rightarrow j^8 = 1 \Rightarrow j^9 = j \Rightarrow j^{10} = -1 \Rightarrow j^{11} = -j \Rightarrow j^{12} = 1$$

ضرب عدد 5 را در ابراتور j ادامه می دهیم و آنرا سه بار در j ضرب می کنیم یعنی 270° درجه می چرخانیم و می توان نوشت:

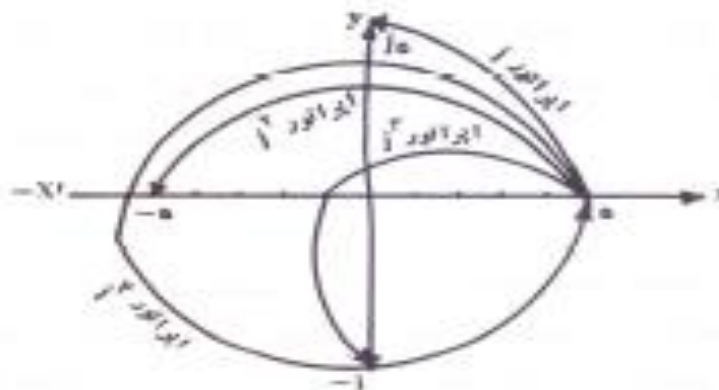
$$j^3 = -j \Rightarrow j^4 = 1 \Rightarrow j^5 = j \Rightarrow j^6 = -1 \Rightarrow j^7 = -j \Rightarrow j^8 = 1 \Rightarrow j^9 = j \Rightarrow j^{10} = -1 \Rightarrow j^{11} = -j \Rightarrow j^{12} = 1$$

پس برای این می توان گفت اگر عددی را در j ضرب کنیم عدد 90° درجه در جهت موافق عقربه های ساعت دوران می کند و ضرب عدد 5 چهار بار در j ($5 \times j^4$) عدد 5 را $360^\circ = 4 \times 90^\circ$ در محورهای مختصات بر می گرداند پس می توانیم بگوییم که $j^4 = 1$ و این را می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$j^4 = 1 \Rightarrow j^3 = -j \Rightarrow j^2 = -1 \Rightarrow j = \sqrt{-1}$$

$$j^2 = (j \times j) = (-1)(-1) = 1$$

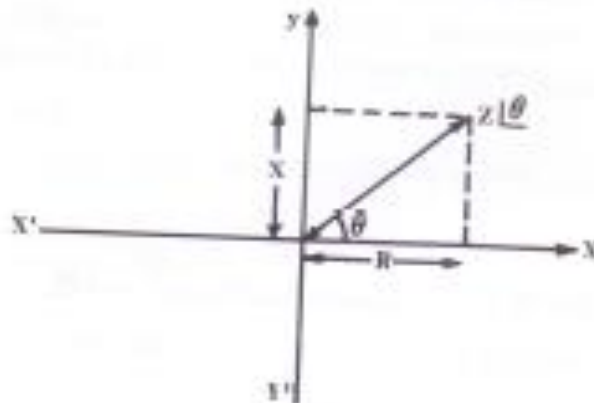
مطالب فوق را در محورهای مختصات می توان به طریق زیر نشان داد.



اعداد مختلط: اعداد مختلط ترکیبی از اعداد حقیقی و موهومی می باشند بطور کلی می توان آنرا بصورت زیر نوشت:

$$Z = R + jX$$

R را مقدار حقیقی و X را مقدار موهومی اعداد مختلط می نامند بنابراین هر بردار را می توان بصورت یک عدد مختلط مطابق شکل زیر نشان داد.



شکل ۱

بردار Z که با محور X زاویه θ می سازد برآیند دو بردار R و X می باشد بطوریکه می توان نوشت

$$\vec{Z} = \vec{R} + \vec{X}$$

$$Z = R + jX$$

نمایش قطبی بردار Z بصورت $Z \angle \theta$ می باشد (بطورالید بردار Z با زاویه θ) نمایش برداری Z را در سباحث فوق بررسی کردیم. اکنون نمایش اعداد مختلط و نمایش قطبی بردار Z را مورد بررسی قرار می دهیم.

۱- نمایش Z بصورت اعداد مختلط

$$Z = R + jX$$

$$|Z| = r = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{X}{R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right)$$

پس برای تعیین زاویه θ کافی است زاویه ای را پیدا کنیم که تانژانت زاویه آن برابر

$$\frac{X}{R} = \frac{\text{مقدار موهومی بردار}}{\text{مقدار حقیقی بردار}}$$

۳- تعایش قطبی بردار Z :

$$Z \angle \theta$$

با توجه به شکل ۹ و روابط مثلثاتی می‌توانیم روابط زیر را بنویسیم:

$$R = r \cos \theta \quad \text{مقدار حقیقی بردار } Z \text{ یا تصویر آن روی محور } x \text{ ها}$$

$$X = r \sin \theta \quad \text{مقدار موهومی بردار } Z \text{ یا تصویر آن روی محور } y \text{ ها}$$

قضیه اولر (Euler's Formula) اجازه می‌دهد بردار Z را بصورت زیر نوشت:

$$e^{j\theta} = (\cos \theta + j \sin \theta) \quad \text{و} \quad e^{-j\theta} = (\cos \theta - j \sin \theta) \quad \text{قضیه اولر (e عدد لایبر می باشد و تقریباً برابر است}$$

$$(e = 2.71828 \dots \dots))$$

پس یک بردار مثل Z را می‌توان بطور خلاصه در شکلهای مختلف زیر نشان داد:

$$Z = R + jX = r(\cos \theta + j \sin \theta) = r e^{j\theta} = r \angle \theta$$

$$r = \sqrt{R^2 + X^2} \quad \text{قدر مطلق یا مدول بردار } Z$$

$$\theta = \arctan \frac{X}{R}$$

چهار عمل اصلی بر روی اعداد مختلط

در جمع یا تفریق اعداد مختلط، قسمت‌های حقیقی با هم و قسمت‌های موهومی با هم جمع یا منهای می‌شوند. حاصل جمع یا تفریق ممکن است یک عدد حقیقی خالص یا یک عدد موهومی خالص یا یک عدد مختلط باشد.

مثال ۳

حاصل عبارت زیر را بنویسید

$$Z = 3 + j2 - 4 + j10 + j6 - j5 + j^2 3 + j^2 7 + j^2 6$$

حل: ابتدا عبارت را به ساده‌ترین شکل خود درمی‌آوریم

$$Z = 3 + j2 - 4 + j10 + j6 - (-1)5 + (1) \times 3 + (-1) \times 7 + (1) \times 6$$

$$Z = 3 + j2 - 4 + j10 + j6 + 5 + 3 - 7 + 6$$

اکنون مقادیر حقیقی را با هم و مقادیر موهومی را با هم جمع می‌کنیم

$$Z = (3 - 4 + 5 + 3) + (j2 + j10 + j6 - j7 + j6) = 7 + j19$$

$$|Z| = r = \sqrt{7^2 + 19^2} = 20.1$$

$$\theta = \arctan \frac{19}{7} = 69.77^\circ$$

در ضرب و تقسیم اعداد مختلط بهتر است عدد مختلط را به صورت قطبی درآورد تا عملیات آن ساده شود البته بصورت تعایش $Z = R + jX$ نیز می توان اعمال ضرب و تقسیم را اجرا کرد ولی عملیات جبری در این حالت از تعداد عمل بیشتری تشکیل خواهد شد.
در ضرب دو یا چند عدد مختلط در تعایش قطبی آن، برای بدست آوردن قدر مطلق حاصلضرب قدر مطلق ها را در هم ضرب می کنیم و برای بدست آوردن آرگومان حاصلضربها تمام زوایا را با هم جمع جبری می کنیم.

مثال ۴: حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$50 \angle 60^\circ \times 30 \angle -30^\circ \times 10 \angle -90^\circ$$

حل:

$$r = r_1 \times r_2 \times r_3 \dots \times r_n = 50 \times 30 \times 10 = 15000$$

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \dots + \theta_n = 60 - 30 - 90 = -60^\circ$$

$$Z = 15000 \angle -60^\circ = 15000 (\cos(-60^\circ) + j \sin(-60^\circ))$$

$$Z = 7500 - j12997.5$$

در تقسیم اعداد مختلط، به همدیگر مانند ضرب سعی می شود اعداد را بصورت قطبی درآورد و پس از این مرحله ابتدا قدر مطلق اعداد را به هم تقسیم می کنیم خارج قسمت حاصل، قدر مطلق عمل تقسیم خواهد شد. برای تعیین آرگومان تقسیم، زاویه مخرج را از زاویه صورت کم می کنیم.
مثال ۵: اگر $Z_1 = 3 + j4$ و $Z_2 = 12 + j16$ باشد حاصل $\frac{Z_1}{Z_2}$ را بدست آورید.

حل:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{3 + j4}{12 + j16} \frac{\sqrt{3^2 + 4^2} \angle \arctan \frac{4}{3}}{\sqrt{12^2 + 16^2} \angle \arctan \frac{16}{12}}$$

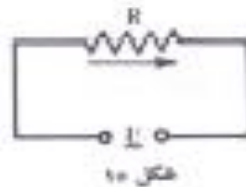
$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{5 \angle 53.7^\circ}{20 \angle 53.7^\circ} = \frac{1}{4} \angle 53.7^\circ - 53.7^\circ = \frac{1}{4} \angle 0 = 0.25$$

نمایش مدارات R.L.C بصورت اعداد مختلط

اگر یک مدار سری یا موازی از R یا L یا C با ترکیبی از آنها تشکیل شود ایدئالیس مدار را می توان بصورت اعداد مختلط نشان داد.

الف: مدار فقط از یک مقاومت اهمی تشکیل می شود:

این مدار را بصورت شکل ۱۰ می توان نشان داد.



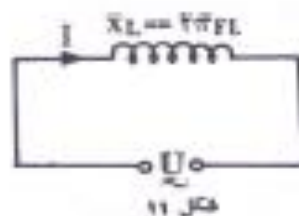
باترسیم دیاگرام برداری این مدار به هم فاز بودن جریان و ولتاژ پی خواهیم برد و اگر ولتاژ را به عنوان دهیم ($U \angle 0^\circ$) جریان بصورت $I \angle \theta$ در خواهد آمد یعنی جریان مولفه موافقی روی محور y هاندارد و می توان نوشت:

$$Z = R = \frac{U \angle 0^\circ}{I \angle \theta} = \frac{U}{I} \angle -\theta$$

بنابراین مقاومت های اهمی در سیستم اعداد مختلط در نمایش ایدئالیسها قسمت حقیقی اعداد را بیان خواهند نمود.

ب: مدار فقط از یک سلف خالص تشکیل می شود.

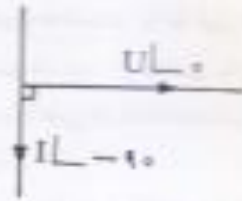
در شکل ۱۱ مدار سلف خالص مشاهده می شود.



$$I = \frac{U}{Z} \text{ و } Z = X_L$$

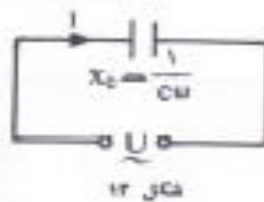
چون مقاومت مدار یکسلف خالص می باشد لذا جریان از ولتاژ 90° درجه پس فاز می باشد پس اگر

ولتاژ را با $U \angle 0^\circ$ نشان دهیم جریان با $I \angle -90^\circ$ نشان داده خواهد شد.



$$X_L = \frac{U_{L0}}{I_{-90}} = \frac{|U|}{|I|} \angle -(-90) = \frac{|U|}{|I|} \angle 90 = +jX_L$$

پس مقاوت‌های خالص سلفی را با $+jX_L$ در اعداد مختلط نشان خواهیم داد.
 چ: مدار فقط از یک مقاوت خالص خازنی مطابق شکل ۱۲ تشکیل می‌شود:



$$I = \frac{U}{X_C} \Rightarrow X_C = \frac{U}{I}$$

چون مدار خاصیت خازنی دارد لذا جریان از ولتاژ 90° درجه پیش‌فاز است و اگر U باشد
 آنگاه I خواهد شد و دی‌گرام برداری آن قرار زیر خواهد بود.



$$X_C = \frac{U_0}{I_{+90}} = \frac{U}{I} \angle -90 \Rightarrow X_C \angle -90 = -jX_C$$

بنابراین مقاوت‌های خازنی را در اعداد مختلط بصورت $-jX_C$ نشان خواهیم داد. لازم به توضیح

است که در محاسبات فوق $\angle U$ منظور شده است و روابط فوق با فرض $\angle U$ صادق می باشند و در غیر این صورت زاویه $\angle U$ نیز دخالت داده خواهد شد. از مطالب بالا نتایج زیر را می توان گرفت:

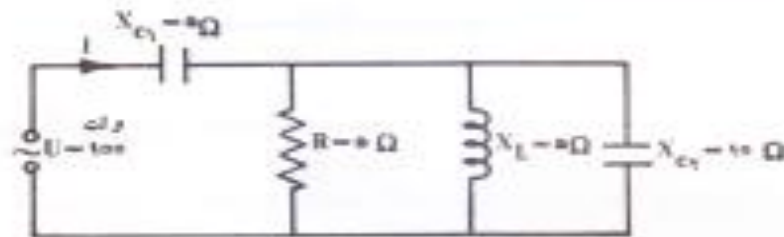
۱- اگر مدار از یک مقاومت اهمی و یک مقاومت سری تشکیل شود امپدانس مدار بصورت $Z = R + jX_L$ نوشته می شود.

۲- اگر مدار از یک مقاومت اهمی و یک خازن تشکیل شود امپدانس مدار بصورت $Z = R - jX_C$ نوشته می شود.

۳- اگر مدار از یک مقاومت اهمی و یک مقاومت سری و یک مقاومت خازنی تشکیل شود امپدانس مدار بصورت $Z = R + j(X_L - X_C)$ یا $Z = R + jX_L - jX_C$ نوشته خواهد شد.

۴- اگر امپدانس کل یک شبکه یا یک شاخه را بصورت $Z = R + jX$ نشان دهیم وقتی شبکه یا شاخه در حال تشدید یا رزونانس خواهد بود که مقدار موهومی امپدانس، یعنی $jX = 0$ باشد.

مثال ۵: جریان کل شبکه زیر چند آمپر است؟



$$I = \frac{U}{Z} \text{ و } Z = -jX_C + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{jX_L} - \frac{1}{jX_C}}$$

حل:

$$Z = -j5 + \frac{1}{\frac{1}{5} + \frac{1}{j2} - \frac{1}{j10}} = -j5 + \frac{1}{\frac{2j+2-1}{j10}} = -j5 + \frac{j10}{2j+1}$$

صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم.

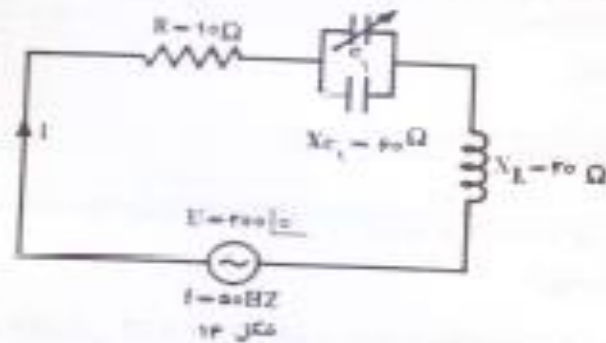
$$Z = -j5 + \frac{j10(2j-1)}{(2j+1)(2j-1)}$$

$$Z = -j5 + \frac{-20 - j10}{-4 - 1} = -j5 + 2 + j2 = 2 - j3$$

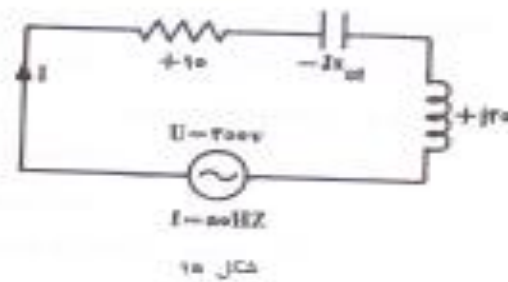
$$Z = 2 - j3 = 5 \angle -36.86^\circ \text{ پس } \varphi = \arctan \frac{-3}{2} = -36.86^\circ$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{100 \angle 0^\circ}{5 \angle -36.87^\circ} = 20 \angle 36.87^\circ$$

مثال ۷: در مدار الکتریکی شکل ۱۴ ظرفیت خازن C_1 را چنان انتخاب کنید که ماکزیمم جریان الکتریکی در مدار برقرار شود.



حل: اگر مدار را به دو بخش C_1 و R و X_{CL} تقسیم کنیم خواهیم داشت یا توجه به اینکه مقاومت R بصورت 10 و $X_{CL} = -jX_{CL}$ بصورت $+j20$ منظور می شوند.



$$Z = 10 - jX_{CL} + j20 = 10 + j(20 - X_{CL})$$

$$I = \frac{U}{Z}$$

بطوریکه مشاهده می شود وقتی جریان ماکزیمم می شود که امپدانس مدار (Z) با امپدانس متقابل مقدار خود را داشته باشد. عوامل تعیین کننده مقدار Z اندازه ثابت 10 اهمی و مقدار متغیر $j(20 - X_{CL})$ می باشد بنابراین اگر قسمت موهومی Z برابر صفر شود امپدانس Z حداقل مقدار خود را خواهد داشت

$$j(20 - X_{CL}) = 0 \Rightarrow 20 - X_{CL} = 0$$

$$X_{CL} = 20 \Omega$$

$$X_{C1} = \frac{X_{C1} \times X_{C2}}{X_{C1} + X_{C2}}$$

$$20 = \frac{X_{C1} \times 60}{X_{C1} + 60}$$

$$20X_{C1} + 1200 = 60X_{C1}$$

$$40X_{C1} = 1200$$

$$X_{C1} = 30 \Omega$$

$$C_1 = \frac{1}{X_{C1} \times \omega} = \frac{1}{X_{C1} \times 2\pi F}$$

$$C_1 = \frac{1}{30 \times 2 \times 3.14 \times 50} = 53.07 \times 10^{-6} F$$

$$C_1 = 53.07 \mu F$$

نتیجه: در مدارات الکتریکی که از اجزاء سلف و خازن و مقاومت تشکیل می‌شوند، اثرات آنها در مجموع در حکم R, L, C سری عمل می‌کنند. وقتی حداکثر جریان در مدار برقرار می‌شود که نسبت موهومی امپدانس کل صفر باشد که این حالت را تشدید یا رزونانس مداسری می‌گویند.

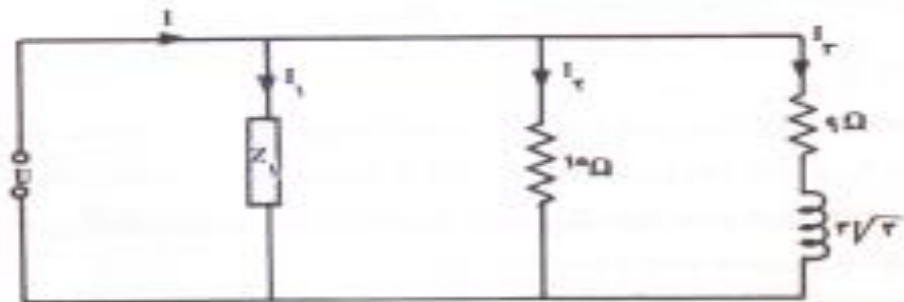
سؤال: اگر در شکل ۱۴ مقاومت اهمی برابر C_1 باشد و خازن C_1 برابر $53.07 \mu F$ انتخاب شود جریان مدار چقدر است؟ این وضع در الکتریسته بدیهه معروف است؟

مثال ۸: در شبکه زیر معادلات جریان و ولتاژ کل عبارتند از:

$$U = 50\sqrt{2} \sin(\omega t + 60^\circ) \text{ و } I = 20\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ)$$

خواسته‌های زیر را بدست آورید.

- ۱- امپدانس Z_1 چقدر است؟
- ۲- دیاگرام برداری جریانها چگونه ترسیم می‌شوند؟
- ۳- توان اکتیو و راکتیو شبکه چقدر است؟



شکل ۱۴

حل:

محاسبه Z_1 : با توجه به مقدار مؤثر جریان و ولتاژ و اختلاف فاز بین آنها می توان نوشت:

$$U_R = \frac{U_M}{\sqrt{2}} \angle \theta = \frac{50\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \angle 60^\circ = 50 \angle 60^\circ$$

$$\text{جریان کل } I_1 = \frac{I_M}{\sqrt{2}} \angle \theta = \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \angle 30^\circ$$

$$I_1 = 30 \angle 30^\circ$$

$$Z_1 = 10 + j0 = 10 \Omega$$

$$Z_2 = 1 + j\sqrt{2} \times 2 \rightarrow Z_2 = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{2})^2} \angle \arctan \frac{2\sqrt{2}}{1}$$

$$Z_2 = 10.7 \angle 30^\circ$$

$$\vec{I}_1 = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 = \frac{\vec{U}}{Z_1} + \frac{\vec{U}}{Z_2} + \frac{\vec{U}}{Z_3}$$

$$30 \angle 30^\circ = \frac{50 \angle 60^\circ}{Z_1} + \frac{50 \angle 60^\circ}{10} + \frac{50 \angle 60^\circ}{10.7 \angle 30^\circ} = \frac{50 \angle 60^\circ}{Z_1} + 5 \angle 60^\circ + 4.7 \angle 30^\circ$$

$$\frac{50 \angle 60^\circ}{Z_1} = 30 \angle 30^\circ - 5 \angle 60^\circ - 4.7 \angle 30^\circ$$

$$\frac{50 \angle 60^\circ}{Z_1} = 30 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{1}{2} \right) - 5 \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - 4.7 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{1}{2} \right)$$

$$\frac{50 \angle 60^\circ}{Z_1} = 15\sqrt{2} + j15 - 2.5 - j2.5\sqrt{2} - 3.3\sqrt{2} - j2.35 = 19.32 + j8.15$$

با استفاده از جدول مثلثاتی $\varphi_1 = \arctan \frac{8.15}{19.32} = 23/2^\circ$ درمی آید.

$$Z_1 = \frac{50 \angle 60^\circ}{19.32 + j8.15} = \frac{50 \angle 60^\circ}{21.23 \angle 23/2^\circ} = 2.38 \angle 36/8^\circ$$

از جدول مثلثاتی $\sin(36/8^\circ) = 0.6$ $\cos(36/8^\circ) = 0.8$

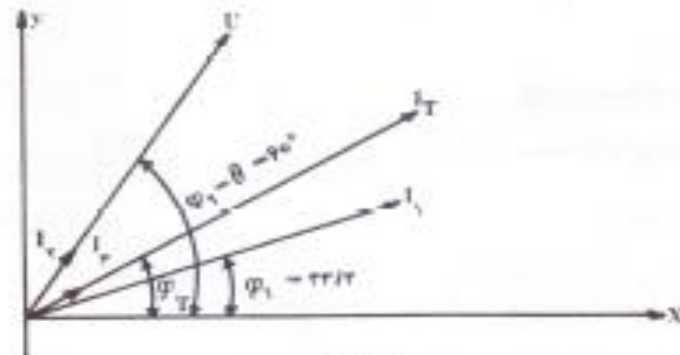
$$Z_1 = 2.38 (\cos(36/8^\circ) + j\sin(36/8^\circ)) = 1.92 + j1.29$$

یعنی Z_1 از یک مقاومت اهمی 1.92Ω و یک مقاومت سلفی 1.29Ω تشکیل می شود.۲- برای ترسیم دیاگرام برداری جریانهای I_1 و I_2 و I_3 را محاسبه می کنیم.

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{50 \angle 60^\circ}{2.38 \angle 36/8^\circ} = 21 \angle 23/2^\circ \text{ A}$$

$$I_r = \frac{U}{Z_r} = \frac{50 \angle 60^\circ}{10 \angle 0^\circ} = 5 \angle 60^\circ \text{ A}$$

$$I_r = \frac{U}{Z_r} = \frac{50 \angle 60^\circ}{10 \angle 23^\circ} = 5 \angle 37^\circ \text{ A}$$



شکل ۱۲

۳- برای محاسبه توانهای راکتیو و اکتیو ابتدا اختلاف بین جریان کل و ولتاژ کل را بدست می آوریم زاویه ولتاژ 60° درجه می باشد و زاویه جریان کل 37° درجه است بنابراین اختلاف فاز بین I_T و U برابر زیر محاسبه می گردد.

$$\varphi = 60^\circ - 37^\circ = 23^\circ$$

توان اکتیو $P_w = UI \cos \varphi$

$$P_w = 50 \times 30 \cos(23^\circ) = 1299 \text{ وات}$$

توان راکتیو $P_d = UI \sin \varphi$

$$P_d = 50 \times 30 \times \sin(23^\circ) = 750 \text{ (ولت آمپر راکتیو)}$$

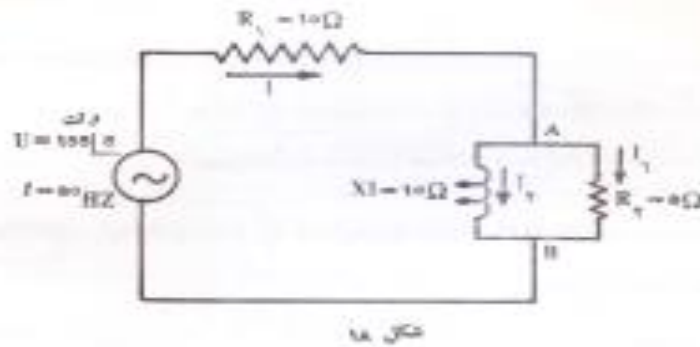
مثال ۹: در مدار شکل ۱۸ مطلوب است.

۱- جریان هر شاخه ۲- ولتاژ بین دو نقطه A و B ۳- اختلاف فاز V_{AB} با ولتاژ منبع

۲- دیاگرام برداری جریانها و ولتاژهای U و U_{AB}

۳- آیا می توان بین دو نقطه A و B، بارانی قرار داد تا ضریب توان شبکه را به یک رساند

بدون آنکه جریان مقاومتهای R_1 و R_2 تغییر کنند در صورت امکان ظرفیت خازن چند میکرو فاراد است در صورت عدم امکان راه عملی آن چیست؟



حل : ۱

$$I = \frac{U}{Z_t}$$

$$Z_t = R_1 + Z_{A,B}$$

$$Z_{A,B} = \frac{(R_2)(jX_L)}{R_2 + jX_L} = \frac{5 \times j10}{5 + j10} = \frac{50j}{5 + j10} \Omega$$

صورت و مخرج کسر $Z_{A,B}$ را برای گویا کردن مخرج در مزدوج مخرج ضرب می کنیم و خواهیم داشت.

$$Z_{A,B} = \frac{50j(5 - j10)}{(5 - j10)(5 + j10)} = \frac{250j + 500}{25 + 100} = 2 + j2 \Omega$$

$$Z_t = 10 + 2 + j2 = 12 + j2 = 12.17 \angle 9.46^\circ \Omega$$

$$I_t = \frac{100 \angle 0^\circ}{12.17 \angle 9.46^\circ} = 8.21 \angle -9.46^\circ \text{ A}$$

جریان I_t به دو جریان I_1 و I_2 توزیع می شود. می توان از توزیع جریانها در مقاومت های موازی I_1 و I_2 را به دست آورد یا می توان افت پتانسیل در مقاومت R_2 را از ولتاژ کل کم نمود تا ولتاژ V_A و V_B را تعیین کرد از تقسیم ولتاژ V_A و V_B بر R_2 و X_{L1} مقدار I_1 و I_2 را به دست آورد.

$$I_1 = \frac{I_t \times j10}{5 + j10} = \frac{8.21 \angle -9.46^\circ \times 10 \angle 90^\circ}{\sqrt{5^2 + 10^2} \angle \arctan \frac{10}{5}} = 4.32 \angle 18.43^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = 8.21 \angle -9.46^\circ - 4.32 \angle 18.43^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{I_t \times 5}{5 + j10} = \frac{8.21 \angle -9.46^\circ \times 5}{\sqrt{5^2 + 10^2} \angle \arctan \frac{10}{5}} = 2.16 \angle -56.31^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = 2.16 \angle -56.31^\circ \text{ A}$$

۲- محاسبه ولتاژ دو نقطه A و B

$$V_{A,B} = \vec{U} - I \times R = 100 \angle 0^\circ - 7.07 \angle -\frac{\pi}{4} \times 10 \angle 0^\circ$$

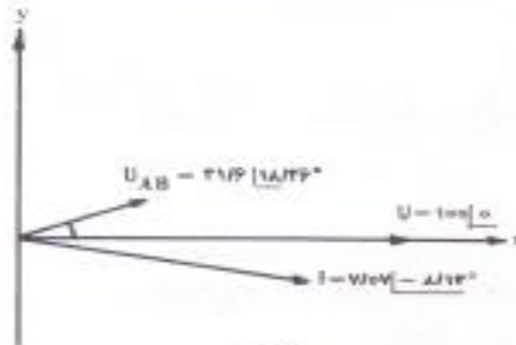
$$V_{A,B} = 100 - 70.7 \angle -\frac{\pi}{4} = 100 - 70.7 (\cos(-\frac{\pi}{4}) + j \sin(-\frac{\pi}{4}))$$

$$V_{A,B} = 100 - 70 + j9.9 = 30 + j9.9 = \sqrt{30^2 + 9.9^2} \angle \arctan \frac{9.9}{30}$$

$$V_{A,B} = 31.6 \angle \frac{\pi}{2.6} \text{ ولت}$$

۳- اختلاف فاز بین $U_{A,B} = 31.6 \angle \frac{\pi}{2.6}$ و $U = 100 \angle 0$ بطوریکه ملاحظه می‌شوددرجه $\frac{\pi}{2.6}$ می‌باشد و عبارت دیگر ولتاژ $U_{A,B}$ از ولتاژ منبع $\frac{\pi}{2.6}$ درجه پیش‌فاز می‌باشد.

$$U = 100 \angle 0 \text{ و } U_{A,B} = 31.6 \angle \frac{\pi}{2.6} \text{ و } I = 7.07 \angle \frac{\pi}{4.3} \text{ -۳}$$



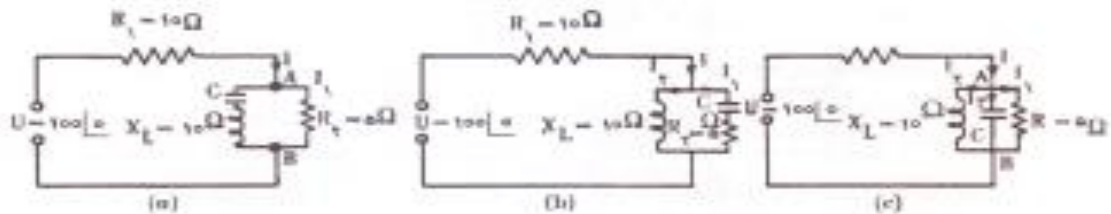
شکل ۱۹

۴- برای پاسخ به سؤال ۵ لازم است مجموعه اتصالات عازن C را در این دو نقطه A و B

آزمایش کنیم و درباره هر قسمت بحث کنیم این اتصالات مطابق شکل ۲۰ می‌باشد. باید توجه

نمود که برای ثابت‌شدن توان‌های حقیقی لازم است جریان در مقاومتهای R_p و R_1 باید ثابت

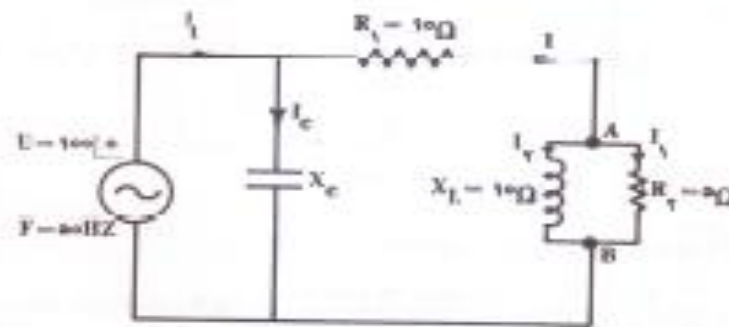
بماند :-



شکل ۲۰

با توجه به شکل ۱۸، ثابت ماندن جریانهای I_1 و I_2 مقدار قدرت اکتیو شبکه را ثابت می‌کند زیرا تغییرات I_1 و I_2 سبب تغییر مقدار توان مؤثر یعنی $P_w = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2$ خواهد شد. اگر خازن را مطابق $X_c = -90$ قرار دهیم امپدانس شاخه‌ای که جریان I_2 در آن جاری است کم می‌شود در صورت ثابت ماندن U_{AB} جریان I_2 افزایش پیدا می‌کند افزایش I_2 در افزایش I مؤثر واقع می‌شود و P_w کل تغییر می‌کند و اگر U_{AB} تغییر نکند I_1 ثابت باشد I_2 تغییر خواهد کرد به این طریق در هر حالت P_w تغییر می‌کند با استدلال مشابه می‌توان نتیجه گرفت در هر صورت از اتصالات شکل ۲۰ توان اکتیو شبکه تغییر می‌کند اگرچه ضریب توان تغییر می‌کند و ممکن است به یک هم برسد در قسمت (C) شکل ۲۰ اگر مقاومت X_c را برابر X_L بگیریم خاصیت راکتیو شبکه از بین می‌رود (رزتانس‌سوازی) و ضریب توان برابر یک می‌شود ولی توان اکتیو دیگر مقدار اولیه خود را دارا نمی‌باشد در شکل ۲۰ حالت (b) اگر $I_{d1} = I_{d2}$ منظور شود باز ضریب توان برابر یک خواهد شد در این حالت توان اکتیو نیز تغییر خواهد نمود.

پس امکان اینکه خازن در بین دو نقطه A و B قرار گیرد و ضریب توان را اصلاح کند به شرط آنکه توان اکتیو ثابت بماند وجود ندارد. برای اینکه بتوانیم ضریب توان شبکه را به یک برسانیم و توان اکتیو هم ثابت بماند مداری مطابق شکل ۲۱ تشکیل می‌دهیم و مقدار C را محاسبه می‌کنیم. این روش به اصلاح ضریب توان شبکه موسوم است.



شکل ۲۱

$$I = 7/0.7 \angle -8.13$$

$$I_1 = \vec{I}_c + I = \frac{100 \angle 0}{-jX_c} + 7/0.7 \angle -8.13 = \frac{100 \angle 0}{X_c \angle -90} + 7/0.7 \angle -8.13$$

$$I_1 = \frac{100}{X_c} \angle 90 + 7/0.7 \angle -8.13 = \frac{100}{X_c} (\cos 90 + j \sin 90) + 7/0.7 (\cos(-8.13) + j \sin(-8.13))$$

$$I_1 = \frac{100}{X_c} \times 0 + j \frac{100}{X_c} + (6/9999 \approx 7) - j(0/9999 \approx 1)$$

$$I_1 = 7 + j\left(\frac{100}{X_c} - 1\right)$$

برای اینکه اختلاف فاز I_1 با U برابر شود لازم است زاویه I_1 با U برابر شود تا ضریب توان شبکه برابر یک شود. عبارت دیگر قسمت موهومی جریان I_1 برابر صفر شود پس می توان نوشت:

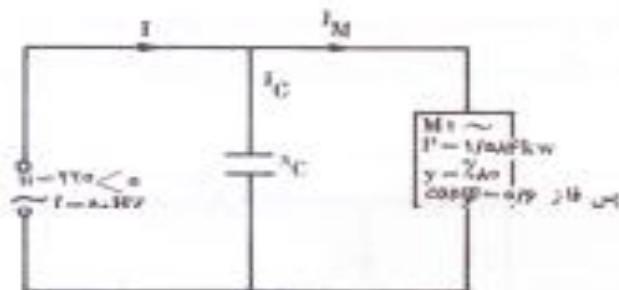
$$j\left(\frac{100}{X_c} - 1\right) = 0 \Rightarrow \frac{100}{X_c} - 1 = 0 \Rightarrow X_c = 100 \Omega$$

$$X_c = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow 100 = \frac{1}{2\pi \times 50 \times C} \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi \times 50 \times 100} F$$

$$C_{\mu F} = 31.8 \mu F$$

مثال ۹۰: در شکل ۲۲ ظرفیت خازن C را چنان انتخاب کنید که ضریب توان شبکه به 0.8

برسد.



شکل ۲۲

حل:

$$I = \vec{I}_C + \vec{I}_M \text{ و } \arccos(0.6) = 53.13^\circ$$

$$I_M = \frac{P}{Z \times U \times \cos \phi} = \frac{1500}{200 \times 220 \times 0.6} = 11.5 A \Rightarrow I_M = 11.5 \angle -53.13^\circ$$

$$I = \frac{220}{X_c} [1 + 11.5 \angle -53.13^\circ]$$

$$I = \frac{220}{X_c} \cos(90^\circ) + j \frac{220}{X_c} \sin(90^\circ) + 11.5 (\cos(-53.13^\circ) + j \sin(-53.13^\circ))$$

$$I = j \frac{220}{X_c} + 11.5 \times 0.6 - j 11.5 \times 0.8$$

$$I = 7 + j\left(\frac{220}{X_c} - 9.2\right)$$

ولتاژ U را مستقر می‌دهیم و آنرا بصورت $U = 220 \angle 0^\circ$ نشان می‌دهیم

$$U = 220 \angle 0^\circ$$

برای اینکه اختلاف فاز U و I برابر 50° باشد باید ولتاژ بین کتله $220 \angle 0^\circ$ و $220 \angle 50^\circ$ باشد.

$$\varphi = \arctg \left(\frac{220}{X_C - 12} \right) = -36/86^\circ$$

$$\arctg \left(\frac{220}{X_C - 12} \right) = -36/86^\circ$$

$$\tan(\arctg \left(\frac{220}{X_C - 12} \right)) = \tan -36/86^\circ$$

$$\frac{220}{X_C - 12} = -0/75 \Rightarrow \frac{220 - 12X_C}{X_C} = -0/75$$

$$220 - 12X_C = -0/75 X_C \Rightarrow 0/25 X_C = 220$$

$$X_C = \frac{220}{0/25} = 880 \Omega \text{ و } X_C = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega X_C}$$

$$C_{\mu F} = \frac{10^6}{\omega X_C} = \frac{10^6}{2 \times 3/14 \times 880 \times 50} = 76 \mu F$$

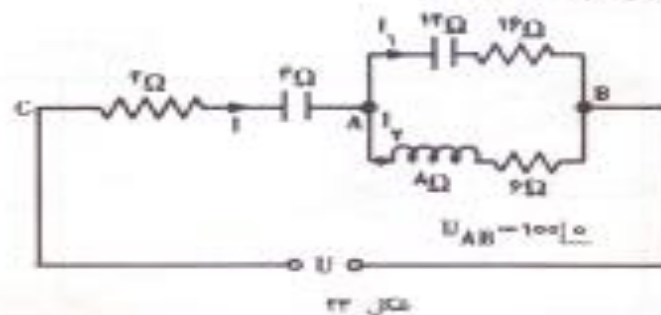
مثال ۱۱: در مدار شکل ۲۳ مطلوب است:

۱- جریان کل

۲- ولتاژ کل

۳- ضریب توان شبکه

۴- دیاگرام برداری جریانها و ولتاژ



حل:

$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_r$$

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{100 \angle 0^\circ}{16 - j12} = \frac{100(16 + j12)}{(16 - j12)(16 + j12)} = \frac{1600 + j1200}{200}$$

$$I_1 = 8 + j6$$

$$I_r = \frac{U}{Z_r} = \frac{100 \angle 0^\circ}{8 + j4} = \frac{100(8 - j4)}{8^2 + 4^2} = 8 - j4$$

$$I = I_1 + I_r = 8 + j6 + 8 - j4 = 16 - j2 = 16.124 \angle -7.125^\circ$$

$$U = U_{AB} + \vec{I}(2 - j4)$$

$$U = 100 \angle 0^\circ + (16 - j2)(2 - j4) = 100 + 20 - j20 - j10 - 20 = 100 - j20$$

$$U = \sqrt{100^2 + 20^2} \angle \arctan \frac{20}{100}$$

$$U = 101.98 \angle -11.07^\circ$$

$$U = 101.98 \angle -11.07^\circ \Rightarrow \varphi_U = -11.07^\circ$$

$$I = 16.124 \angle -7.125^\circ \Rightarrow \varphi_I = -7.125^\circ$$

$$\varphi_{U,I} = \varphi_U - \varphi_I = -11.07^\circ - (-7.125^\circ)$$

$$\varphi_{U,I} = -3.945^\circ$$

$$\cos \varphi = \cos 3.945^\circ = 0.998$$

۴- رسم دیاگرام برداری جریانهها و ولتاژها.

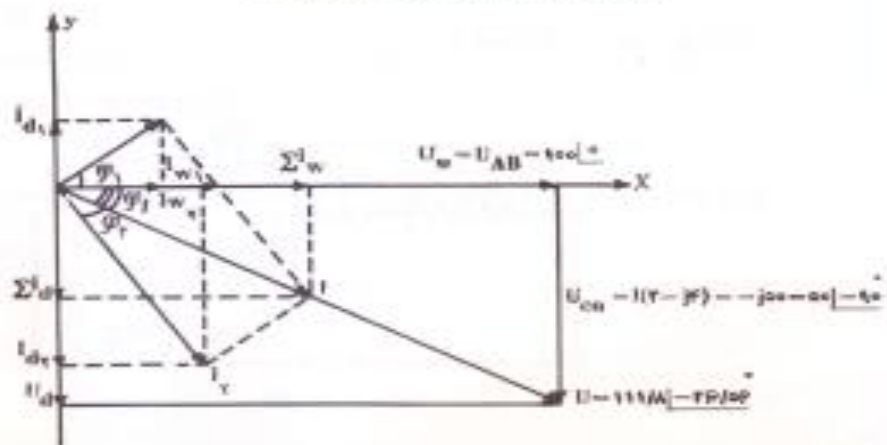
$$I_1 = 8 + j6$$

$$I_r = 8 - j4$$

$$I = 16 - j2$$

$$U_{AB} = 100 \angle 0^\circ$$

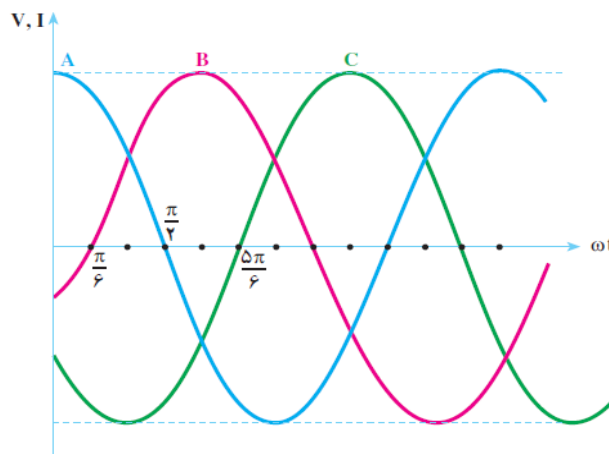
$$U = 100 - j20$$



جلسه دهم مدارهای سه فاز

جریان یا ولتاژ سه فاز از امواج سینوسی تشکیل می شوند که به طور هم زمان تولید می شوند و نسبت به هم 120° الکتریکی اختلاف فاز زمانی دارند. در شکل ۱-۷ الف منحنی جریان یا ولتاژ سه فاز را مشاهده می کنید. در این شکل موج A به اندازه 120° از موج B و موج B به اندازه 120° از موج C جلوتر است.

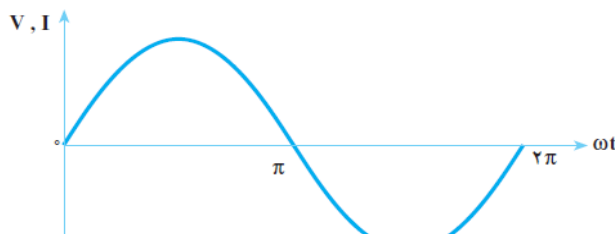
ساختمان ساده‌ی مولدهای جریان متناوب سه فاز موجب شده است که انرژی الکتریکی سه فاز، راحت تر و ارزان تر تولید شود. جریان متناوب سه فاز، علاوه بر سادگی تولید و ارزان بودن و برخورداری از کلیه‌ی خواص جریان یک فاز، مزایای دیگری نیز دارد.



الف: جریان یا ولتاژ متناوب سه فاز

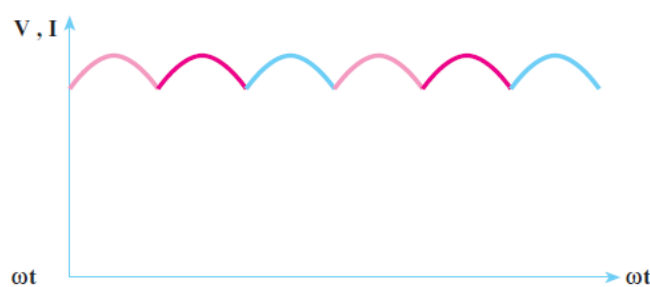
مزایای جریان سه فاز نسبت به جریان یک فاز را می توان به صورت زیر دسته بندی کرد:

- ۱- توان الکتریکی در مصرف کننده های سه فاز هیچ وقت صفر نمی شود؛ زیرا با توجه به شکل ۱-۷، وقتی در یکی از فازها دامنه‌ی جریان یا ولتاژ صفر می شود، مصرف کننده از دو فاز دیگر انرژی می گیرد. بدین علت، مصرف کننده های سه فاز نسبت به مصرف کننده های یک فاز ضریب بهره یا راندمان بالایی دارند.



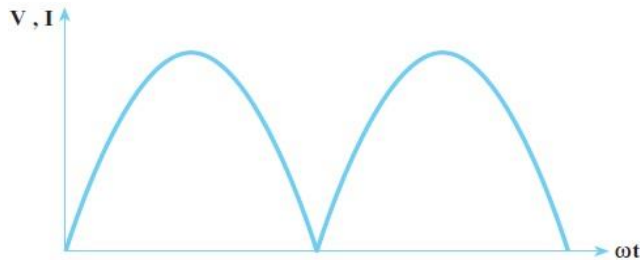
ب: جریان یا ولتاژ متناوب یک فاز

شکل ۱-۷



موج یکسو شده‌ی تمام موج سه فاز

- ۲- ضریب موج یکسو شده‌ی سه فاز نسبت به موج یکسو شده‌ی یک فاز، بسیار کم تر است. به عبارت دیگر، جریان سه فاز نسبت به جریان یک فاز پس از یکسو سازی، موج صاف تری ایجاد می کند. در شکل های



موج یکسو شده‌ی تمام موج یک فاز

شکل ۷-۲

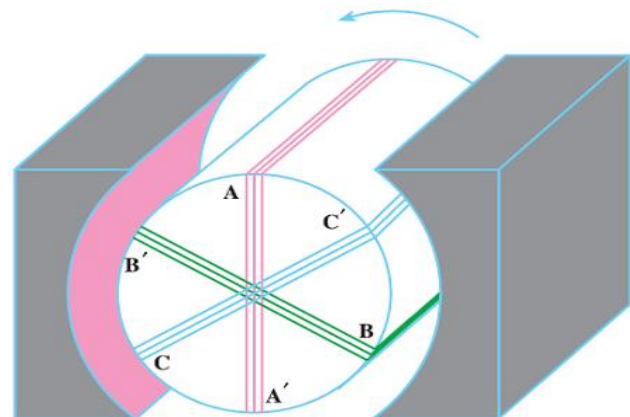
۷-۲ دو جریان یکسو شده‌ی سه فاز و یک فاز
تمام موج نشان داده شده است.

۳- جریان متناوب سه فاز در
مصرف کننده‌های سه فاز مانند موتورهای

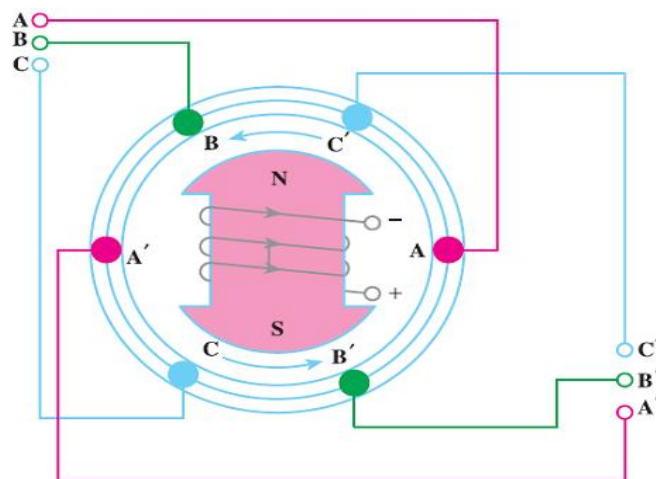
الکتریکی سه فاز، حوزهی دوار مغناطیسی ایجاد می‌کند. این حوزهی دوار، قسمت متحرک را به دنبال خود می‌کشد. در صورتی که در جریان متناوب یک فاز حوزهی دوار تشکیل نمی‌شود و این موتورها مشکل راه اندازی خواهند داشت و برای راه اندازی نسبت به موتورهای سه فاز به اجزایی اضافی نیاز دارند که قیمت تمام شده‌ی موتورهای یک فاز را نسبت به موتورهای سه فاز بالا می‌برد.

۷-۲-۲ تولید جریان متناوب سه فاز

شکل های ۷-۳، دو نمونه مولد سه فاز جریان متناوب را به طور شماتیک نشان می‌دهند.



الف: مولد سه فاز القا کننده استاتور



ب: مولد سه فاز القا کننده رتور

شکل ۷-۳

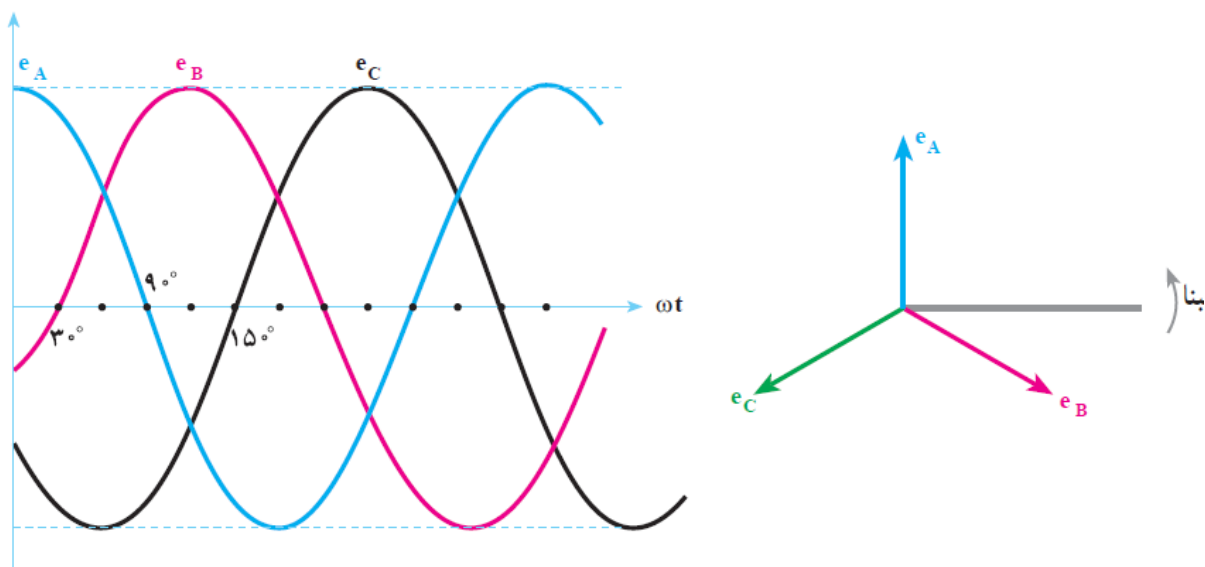
در هر دو شکل ۳-۷، وقتی رتور در جهت مثلثاتی (عکس عقربه‌های ساعت) به گردش درمی‌آید، خطوط قوای مغناطیسی، در هر یک از سیم‌پیچ‌های AA' ، BB' و CC' یک نیروی محرکه‌ی سینوسی القا می‌کند. با توجه به موقعیت مکانی سیم‌پیچ‌ها، ولتاژ القایی در سیم‌پیچ نسبت به ولتاژ القایی در سیم‌پیچ AA' به اندازه‌ی 120° الکتریکی پس‌فاز است. هم‌چنین ولتاژ القایی در سیم‌پیچ CC' به اندازه‌ی 240° الکتریکی نسبت به ولتاژ سیم‌پیچ AA' پس‌فاز است. معادلات زمانی نیروهای محرکه‌ی القایی در سیم‌پیچ‌ها به قرار زیر است.

$$e_A = E_m \sin(\omega t + 90^\circ) \quad (7-1)$$

$$e_B = E_m \sin(\omega t - 30^\circ) \quad (7-2)$$

$$e_C = E_m \sin(\omega t + 210^\circ) = E_m \sin(\omega t - 150^\circ) \quad (7-3)$$

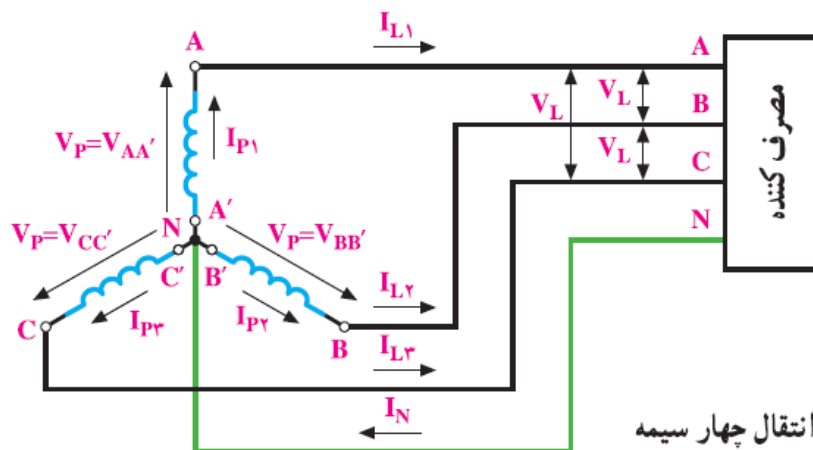
دیاگرام برداری و منحنی تغییرات نیروهای محرکه‌ی الکتریکی القا شده در سیم‌پیچ‌ها به صورت شکل ۴-۷ رسم می‌شوند. همان‌طور که در شکل‌های ۳-۷ مشاهده می‌کنید، در مولدهای سه فاز، سه گروه سیم‌پیچ AA' ، BB' و CC' وجود دارد که در داخل ماشین 120° درجه نسبت به یک‌دیگر



شکل ۴-۷- منحنی تغییرات نیروهای محرکه‌ی القایی در سیم‌پیچ‌ها و دیاگرام برای آن‌ها

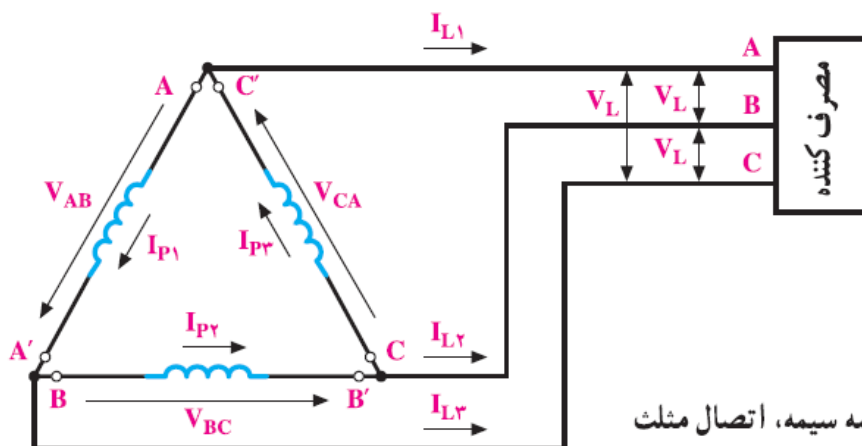
اختلاف فاز مکانی دارند. انرژی الکتریکی تولید شده در این سیم‌پیچ‌ها با دو روش اتصال سیم‌پیچ‌ها به شبکه‌ی مصرف انتقال می‌یابد. به عبارت دیگر، به دو روش می‌توان انرژی تولیدی را از مولد به مصرف‌کننده انتقال داد. در روش اول سه سیم انتهایی $A'B'C'$ با هم یکی شده و با یک سیم به بیرون مولد هدایت می‌شوند. در تولید صنعتی برق در نیروگاه‌ها، با زمین کردن این سیم، اختلاف

سپیل آن را با زمین یکی می کنند و آن را سیم نول می نامند و با MP یا N نشان می دهند. سیم N به سه سیم A، B و C مطابق شکل ۷-۵ انرژی را از مولد به مصرف کننده انتقال می دهد. سیم های A، B و C را به ترتیب R، S و T یا Y، R و B یا L_1 ، L_2 و L_3 نیز نام گذاری می کنند و نوا سیم های فاز A، فاز B و فاز C می گویند. این سیستم انتقال را انتقال چهار سیمه و نوع مال سیم پیچ های مولد را **اتصال ستاره** گویند و آن را با نماد (سمبل) Y یا λ (لاندا) نشان دهند. اگر در انتقال سیم نول حذف شود، انتقال را انتقال ستاره ی سه سیمه گویند.



شکل ۷-۵- اتصال ستاره، انتقال چهار سیمه

در روش دوم انتقال انرژی، انتهای سیم پیچ AA' یعنی A' را به ابتدای سیم پیچ BB' یعنی B، سیم پیچ BB' را یعنی B' را به ابتدای سیم پیچ CC' یعنی C و انتهای سیم پیچ CC' یعنی C' به ابتدای سیم پیچ AA' یعنی A وصل می کنند و انرژی تولیدی مولد را با سه سیم A، B و C یا S، R، به مصرف کننده ها مطابق شکل ۷-۶ انتقال می دهند. این روش انتقال را **انتقال سه سیمه** و نوع مال سیم پیچ های مولد را **اتصال مثلث** می گویند و با نماد D یا Δ (دلتا) نشان می دهند.



شکل ۷-۶- انتقال سه سیمه، اتصال مثلث

۷-۲-۱- ولتاژ و جریان فازی:

تعریف ولتاژ فازی: ولتاژ دو سر هر یک از سیم پیچ‌های AA' ، BB' و CC' را **ولتاژ فازی** گویند و آن را با V_P نشان می‌دهند.

در مولدهای سه فاز به علت این که همه‌ی مشخصات سیم پیچ‌ها یکسان است، ولتاژ مؤثر سیم پیچ‌ها برابرند.

تعریف جریان فازی: جریان عبوری از داخل هر سیم پیچ را **جریان فازی** گویند و آن را با I_P نشان می‌دهند.

۷-۲-۲- ولتاژ و جریان خطی:

تعریف ولتاژ خطی: ولتاژ بین خطوط A با B (V_{AB}) یا B با C (V_{BC}) یا C با A (V_{CA}) را **ولتاژ خطی** گویند و آن را با V_L نشان می‌دهند. در واقع ولتاژ خطی، اختلاف پتانسیل بین دو فاز مختلف است.

تعریف جریان خطی: جریانی را که در خطوط انتقال R ، S و T جاری می‌شود، **جریان خطی** می‌گویند و آن را با I_L نشان می‌دهند.

جریان خطی و فازی و ولتاژهای خطی و فازی شکل ۷-۵ به قرار زیرند:

$$V_{AA'} = V_P = V_{AN} \quad \text{ولتاژ فازی}$$

$$V_{BB'} = V_P = V_{BN} \quad \text{ولتاژ فازی}$$

$$V_{CC'} = V_P = V_{CN} \quad \text{ولتاژ فازی}$$

$$I_{P1}, I_{P2}, I_{P3} = I_P \quad \text{جریان‌های فازی}$$

$$V_{AB} = V_L \quad \text{ولتاژ خطی}$$

$$V_{BC} = V_L \quad \text{ولتاژ خطی}$$

$$V_{CA} = V_L \quad \text{ولتاژ خطی}$$

جریان‌های خطی و فازی و ولتاژهای خطی و فازی شکل ۷-۶ به ترتیب زیر هستند:

$$V_{AB} = V_P = V_L \quad \text{ولتاژ خطی = ولتاژ فازی}$$

$$V_{BC} = V_P = V_L \quad \text{ولتاژ خطی = ولتاژ فازی}$$

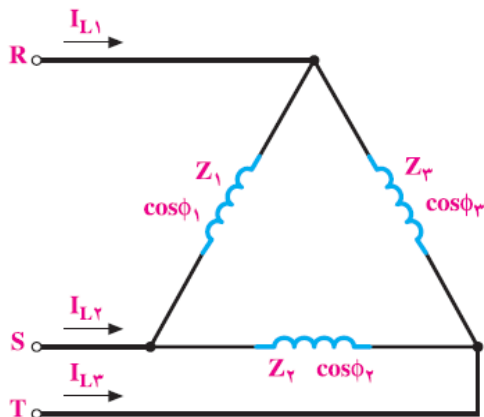
$$V_{CA} = V_P = V_L \quad \text{ولتاژ خطی = ولتاژ فازی}$$

$$I_{AA'} = I_{P1} = \text{جریان فازی} \quad I_{L1} = \text{جریان خطی}$$

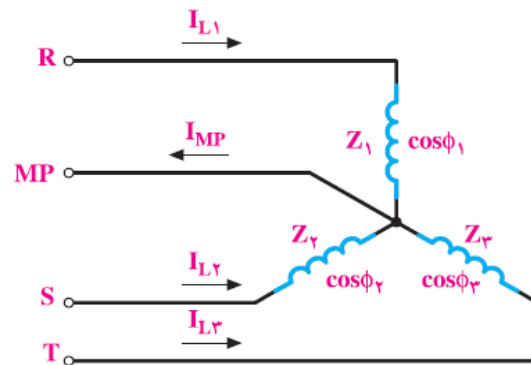
$$I_{BB'} = I_{P2} = \text{جریان فازی} \quad I_{L2} = \text{جریان خطی}$$

$$I_{CC'} = I_{P3} = \text{جریان فازی} \quad I_{L3} = \text{جریان خطی}$$

۷-۲-۳ بار متعادل و بار نامتعادل: سه امپدانس Z_1 ، Z_2 و Z_3 را با اتصال ستاره یا اتصال مثلث مطابق شکل ۷-۷ به شبکه‌ی سه فاز وصل می‌کنیم. اگر همه‌ی مشخصه‌های امپدانس‌های Z_1 ، Z_2 و Z_3 از قبیل دامنه، زاویه‌ی فاز، پس فاز و پیش فاز بودن با هم برابر باشند، آن وقت بار شبکه‌ی سه فاز را **بار متعادل** می‌گویند. اگر یکی از مشخصه‌ها - مثلاً دامنه یا زاویه یا پس فاز یا پیش فاز بودن - در هر کدام از امپدانس‌ها تفاوت داشته باشد، بار شبکه‌ی سه فاز را **بار نامتعادل** می‌گویند.



ب: اتصال مثلث بار سه فاز به شبکه‌ی سه فاز

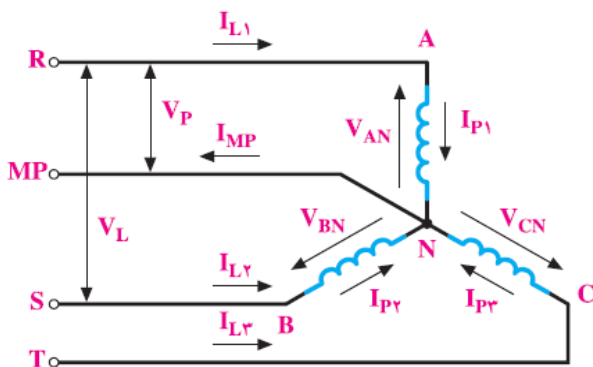


الف: اتصال ستاره‌ی بار سه فاز به شبکه‌ی سه فاز

شکل ۷-۷

۷-۳ اتصال ستاره

بارهای سه فاز را می‌توان با اتصال ستاره مطابق شکل ۷-۷-الف به شبکه‌ی سه فاز اتصال داد و آن را تغذیه کرد. این بارها ممکن است متعادل یا نامتعادل باشند.



شکل ۷-۸

۷-۳-۱ اتصال ستاره و بار

متعادل: سه امپدانس مساوی Z با زاویه‌ی فاز ϕ که تمام مشخصات آن‌ها با هم برابر است، مطابق شکل ۷-۸ به شبکه‌ی سه فاز اتصال دارد. چون بارها متعادل‌اند، جریان‌های دریافتی آن‌ها از

شبکه نیز با هم برابر خواهد بود. بنابراین $I_{P1} = I_{P2} = I_{P3} = I_P$ است. به طوری که در شکل ۷-۸ مشاهده می‌کنید، جریان‌های خطوط همان جریان‌های فازهاست. پس در اتصال ستاره می‌توان نوشت:

$$I_L = I_P$$

$$(7-4)$$

در اتصال ستاره در بار متعادل اندازه‌ی جریان فازی یا خطی از رابطه‌ی ۷-۵ به دست

د.

$$I_L = I_P = \frac{V_P}{Z}, \quad V_P = V_{AN} = V_{BN} = V_{CN} \quad (7-5)$$

و با استفاده از دیاگرام برداری ولتاژها می‌توان رابطه‌ی ۷-۶ را نتیجه گرفت.

$$V_L = \sqrt{3} V_P \quad (7-6)$$

نتیجه: در اتصال ستاره، بار متعادل جریان خطی با جریان فازی برابر و ولتاژ خطی $\sqrt{3}$ برابر ولتاژ فازی است.

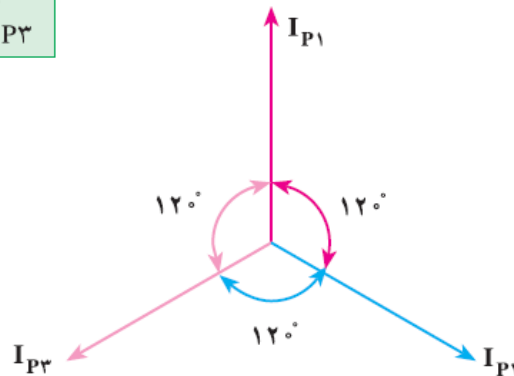
$$\lambda \rightarrow \begin{cases} I_P = I_L \\ V_L = \sqrt{3} V_P \end{cases}$$

۷-۳-۲- محاسبه‌ی جریان نول در بار متعادل اتصال ستاره: در شکل ۷-۸ با استفاده

از قانون کیرشهف در گره N می‌توان نوشت:

$$\vec{I}_N = \vec{I}_{MP} = \vec{I}_{P1} + \vec{I}_{P2} + \vec{I}_{P3}$$

شکل ۷-۹



جریان‌های $\vec{I}_{P1}$ ، $\vec{I}_{P2}$ و $\vec{I}_{P3}$ ، به علت متعادل بودن بار از نظر دامنه، یکسان‌اند ولی 120° درجه‌ی الکتریکی اختلاف فاز دارند. برای محاسبه‌ی $\vec{I}_N$ دیاگرام برداری جریان‌های $\vec{I}_{P1}$ ،

$\vec{I}_{P2}$ و $\vec{I}_{P3}$ را مطابق شکل ۷-۹ رسم می‌کنیم. در فصل دوم اثبات کردیم که برآیند سه بردار مساوی که با هم زاویه‌ی 120° درجه می‌سازند، صفر است. پس، از سیم MP در بار متعادل، جریانی عبور نمی‌کند و می‌توان این سیم را در بار متعادل حذف کرد. در موتورهای الکتریکی به علت مساوی بودن سیم‌پیچ‌های فازها، از سیم MP در اتصال موتور به شبکه استفاده نمی‌شود؛ زیرا در نقطه‌ی N صفر مصنوعی به وجود می‌آید.

۷-۳-۳- محاسبه توان اتصال ستاره‌ای با بار متعادل: توان مصرفی در هر فاز، در مقاومت

اهمی مصرف و توان غیر مفید در راکتانس القایی یا خازنی آن فاز وجود دارد. به دلیل متعادل بودن بار، توان مصرفی و غیر مصرفی در هر فاز برابر است. از جمع توان مصرفی فازها، توان مصرفی کل سه فاز به دست می‌آید. از جمع توان‌های غیر مفید (راکتیو) فازها، توان راکتیو کل سه فاز معلوم می‌شود.

$$\begin{cases} P_{e1} = I_{P1} V_{P1} \cos \varphi_1 = I_{P1}^2 R_1 & (7-7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{e2} = I_{P2} V_{P2} \cos \varphi_2 = I_{P2}^2 R_2 & (7-8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{e3} = I_{P3} V_{P3} \cos \varphi_3 = I_{P3}^2 R_3 & (7-9) \end{cases}$$

$$P_e = P_{e1} + P_{e2} + P_{e3} = 3 V_P I_P \cos \varphi \quad (7-10)$$

از روابط ۷-۴ و ۷-۶ مقادیر $I_L = I_P$ و $V_L = \sqrt{3} V_P$ را در رابطه‌ی ۷-۱۰ جایگزین می‌کنیم.

$$P_e = 3 \times \frac{V_L}{\sqrt{3}} \times I_L \cos \varphi$$

$$P_e = \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi \quad W \quad (7-11)$$

$$\begin{cases} P_{d1} = I_{P1} V_{P1} \sin \varphi_1 = I_{P1}^2 X_1 & (7-12) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{d2} = I_{P2} V_{P2} \sin \varphi_2 = I_{P2}^2 X_2 & (7-13) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{d3} = I_{P3} V_{P3} \sin \varphi_3 = I_{P3}^2 X_3 & (7-14) \end{cases}$$

$$P_d = P_{d1} + P_{d2} + P_{d3} = 3 V_P I_P \sin \varphi \quad (7-15)$$

در رابطه‌ی ۷-۱۵ $I_L = I_P$ و $V_P = \frac{V_L}{\sqrt{3}}$ را جایگزین می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$P_d = 3 I_L \times \frac{V_L}{\sqrt{3}} \sin \varphi = \sqrt{3} V_L I_L \sin \varphi \quad V.A.R \quad (7-16)$$

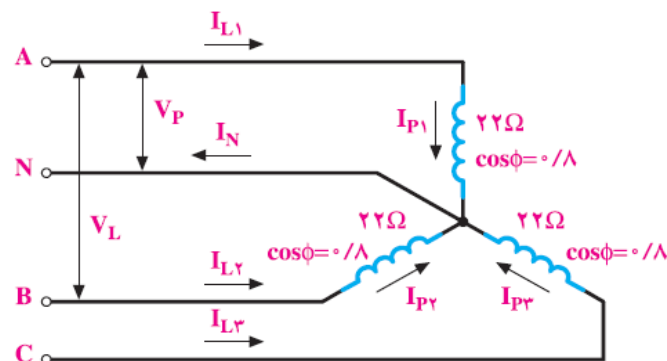
از روابط ۷-۱۱ و ۷-۱۶ می‌توان نوشت:

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = \sqrt{(\sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi)^2 + (\sqrt{3} V_L I_L \sin \varphi)^2}$$

بدین ترتیب، توان ظاهری برابر خواهد بود با:

$$P_s = \sqrt{3} V_L I_L \quad V.A \quad (7-22)$$

مثال ۱: یک بار متعادل سه فاز با اتصال ستاره به شبکه‌ی سه فاز با ولتاژ 380° ولت مطابق شکل ۱-۷ متصل است. مطلوب است: $(V_L = 380V)$



شکل ۱-۷

الف - جریان هر فاز و هر خط.
از رابطه‌ی ۷-۶ داریم:

$$V_P = \frac{V_L}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} \approx 220V$$

بار متعادل است؛ پس داریم:

$$I_{L1} = I_{L2} = I_{L3} = I_L$$

$$I_{P1} = I_{P2} = I_{P3} = I_P$$

از رابطه‌ی ۷-۵ می‌توان نوشت:

$$I_P = \frac{V_P}{Z} = \frac{220}{22} = 10A$$

چون اتصال ستاره است:

$$I_P = I_L$$

$$I_L = 10A$$

ب - دیاگرام برداری ولتاژها و جریان‌های فازی.

از آنجایی که ولتاژهای V_{AN} ,

V_{BN} و V_{CN} با هم برابرند، اندازه‌ی

بردارهای V_{AN} ، V_{BN} و V_{CN}

مساوی رسم می‌شوند. از طرفی چون

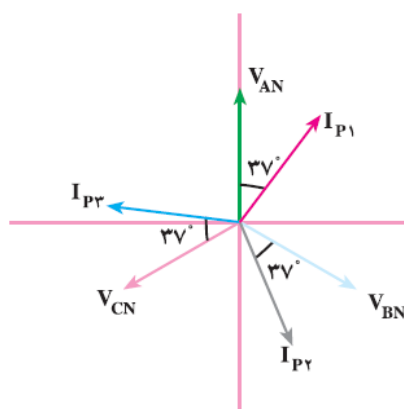
اختلاف فاز بین جریان هر فاز با ولتاژ

مربوطه یکسان است (بار متعادل)،

اندازه‌ی بردار جریان‌های فازی I_{P1} ،

I_{P2} و I_{P3} نیز مساوی رسم می‌شوند

(شکل ۱۱-۷).



شکل ۱۱-۷

جهت گردش
مبتنا

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 37^\circ$$

یعنی I_{P1} نسبت به V_{AN} ، I_{P2} نسبت به V_{BN} و I_{P3} نسبت به V_{CN} به اندازه 37° پس فاز است.

پ- توان های مصرفی.

$$P_e = \sqrt{3} V_L I_L \cos \phi \quad \text{بار متعادل است و از رابطه ی ۷-۱۱ داریم:}$$

$$P_e = \sqrt{3} \times 380 \times 10 \times 0.8 = 5259.2 \text{ [W]}$$

$$P_d = \sqrt{3} V_L I_L \sin \phi \quad \text{از رابطه ی ۷-۱۶ داریم:}$$

$$P_d = \sqrt{3} \times 380 \times 10 \times 0.6 = 3994.4 \text{ [V.A.R]}$$

$$P_s = \sqrt{3} V_L I_L = \sqrt{3} \times 380 \times 10 = 6574 \text{ [V.A]} \quad \text{و از رابطه ی ۷-۱۷ داریم:}$$

۷-۳-۴- اتصال ستاره و بار نامتعادل: بار نامتعادل را در اتصال ستاره با فرض این که

سیم نول دایر است، مطالعه می کنیم. وجود سیم نول باعث می شود بارهای موجود در هر فاز از ولتاژ

$$\text{فازی } V_P = \frac{V_L}{\sqrt{3}} \text{ تغذیه کند.}$$

سؤال: اگر سیم نول در سیستم سه فازه ی اتصال ستاره قطع شود، آیا ولتاژ دو سر بارها برابر ولتاژ فازی خواهد بود؟ چرا؟

در اتصال ستاره ی بارهای نامتعادل، چون جریان بارها مساوی نیست، در سیم نول جریان الکتریکی برقرار می شود و بردار جریان آن از جمع برداری جریان های فازها به دست می آید. برای تعیین جریان سیم نول با توجه به ولتاژهای فازی و اختلاف هر فاز، جریان های هر فاز رسم می شود. براینکه سه بردار جریان فازها، جریان سیم نول را معین می کند. برای محاسبه ی توان های اکتیو، راکتیو و ظاهری مدار سه فاز، ابتدا توان اکتیو و راکتیو هر فاز را به دست می آوریم. توان اکتیو (مؤثر) مدار سه فاز از جمع توان های اکتیو هر سه فاز به دست می آید. توان راکتیو از جمع جبری توان های غیر مؤثر هر فاز محاسبه می شود.

$$P_{e1} = I_{P1} V_{P1} \cos \phi_1 = I_{P1}^2 R_1$$

$$P_{e2} = I_{P2} V_{P2} \cos \phi_2 = I_{P2}^2 R_2$$

$$P_{e3} = I_{P3} V_{P3} \cos \phi_3 = I_{P3}^2 R_3$$

$$P_e = P_{e1} + P_{e2} + P_{e3}$$

توان مؤثر کل سه فاز

$$P_e = I_{P1} V_{P1} \cos \phi_1 + I_{P2} V_{P2} \cos \phi_2 + I_{P3} V_{P3} \cos \phi_3 \quad (7-18)$$

بدین ترتیب، توان غیر مؤثر را به قرار زیر به دست می آوریم:

$$P_d = \pm P_{d1} \pm P_{d2} \pm P_{d3}$$

$$P_d = \pm I_{P1} V_{P1} \sin \phi_1 \pm I_{P2} V_{P2} \sin \phi_2 \pm I_{P3} V_{P3} \sin \phi_3 \quad (7-19)$$

در رابطه ی ۷-۱۹، علامت منفی برای خاصیت خازنی و علامت مثبت برای خاصیت سلفی مدار هر فاز منظور می شود. با معلوم بودن توان مؤثر و غیر مؤثر کل مدار سه فاز، توان ظاهری مطابق رابطه ی ۷-۲۰ محاسبه می شود.

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} \quad (7-20)$$

۷-۴- اتصال مثلث

اتصال مثلث سه فاز را زمانی که بار متعادل است، بررسی می‌کنیم.

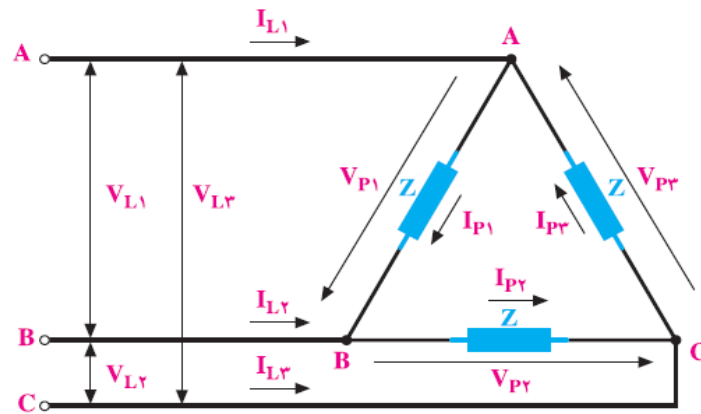
۷-۴-۱- محاسبه‌ی جریان و ولتاژ خطی در اتصال مثلث با بار متعادل: سه بار

متعادل به امیدانس Z و زاویه‌ی فاز هر کدام ϕ مطابق شکل ۷-۱۲ با اتصال مثلث در نظر می‌گیریم. ولتاژهای فازی V_{P1} ، V_{P2} و V_{P3} با ولتاژهای خطی V_{L1} ، V_{L2} و V_{L3} یکی هستند. بنابراین، در اتصال مثلث، ولتاژ بین خطوط با ولتاژ دو سر مصرف‌کننده‌ها در هر فاز یکی است. پس:

$$V_L = V_P \quad (7-21)$$

چون بار متعادل است، پس، جریان‌های فازی با هم برابرند.

$$|\vec{I}_{P1}| = |\vec{I}_{P2}| = |\vec{I}_{P3}| = I_P \quad \text{و} \quad |\vec{I}_{L1}| = |\vec{I}_{L2}| = |\vec{I}_{L3}| = I_L$$



شکل ۷-۱۲

در گره‌های A، B و C شکل ۷-۱۲ با استفاده از قانون جریان‌های کیرشهف می‌توان

نوشت:

$$\vec{I}_{L1} = \vec{I}_{P1} - \vec{I}_{P3} \quad (7-22)$$

$$\vec{I}_{L2} = \vec{I}_{P2} - \vec{I}_{P1} \quad (7-23)$$

$$\vec{I}_{L3} = \vec{I}_{P3} - \vec{I}_{P2} \quad (7-24)$$

چون $|\vec{I}_{L2}| = |\vec{I}_{L1}| = |\vec{I}_{L3}| = I_L$ است، با استفاده از دیاگرام برداری جریان‌ها می‌توان

رابطه‌ی ۷-۲۵ را برای به‌دست‌آوردن I_L استفاده کرد.

$$I_L = \sqrt{3} I_P \quad (7-25)$$

از روابط ۷-۲۱ و ۷-۲۵ می‌توان نتیجه گرفت:

👉 نتیجه: در اتصال مثلث در بار متعادل، جریان خطی، $\sqrt{3}$ برابر جریان فازی و ولتاژ خطی برابر ولتاژ فازی است.

۷-۴-۲ محاسبه توان‌ها در اتصال مثلث با بار متعادل: در بار متعادل، توان مؤثر

و غیر مؤثر تمام فازها با هم برابرند. به طوری که توان مؤثر کل را می‌توان سه برابر توان مؤثر هر فاز در نظر گرفت. هم‌چنین توان غیر مؤثر کل، سه برابر توان غیر مؤثر هر فاز است.

$$P_{e1} = P_{e2} = P_{e3} \Rightarrow P_e = P_{e1} + P_{e2} + P_{e3}$$

$$P_{e1} = I_{P1}^2 R_1 = I_P^2 R = V_P I_P \cos \varphi$$

$$P_{d1} = I_{P1}^2 X = I_P^2 X = V_P I_P \sin \varphi$$

$$\text{توان مؤثر کل} \quad P_e = 3P_{e1} = 3I_P^2 R = 3V_P I_P \cos \varphi \quad (7-26)$$

$$\text{توان غیر مؤثر کل} \quad P_d = 3P_{d1} = 3I_P^2 X = 3V_P I_P \sin \varphi \quad (7-27)$$

اگر مقادیر محاسبه شده در روابط ۷-۲۱ و ۷-۲۵ را در روابط ۷-۲۶ و ۷-۲۷ منظور کنیم، خواهیم داشت:

$$\Delta \begin{cases} V_L = V_P \\ I_L = \sqrt{3} I_P \Rightarrow I_P = \frac{I_L}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$P_e = 3V_P I_P \cos \varphi$$

$$P_e = 3V_L \times \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cos \varphi$$

$$P_e = \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi \quad [W] \quad (7-28)$$

$$P_d = 3I_P V_P \sin \varphi$$

$$P_d = 3 \times \frac{I_L}{\sqrt{3}} \times V_L \sin \varphi$$

$$P_d = \sqrt{3} I_L V_L \sin \varphi \quad [V.A.R] \quad (7-29)$$

$$P_S = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = \sqrt{3} V_L I_L \quad [V.A] \quad (7-30)$$

توان مصرفی در حالت اتصال مثلث متعادل چند برابر حالت اتصال ستاره متعادل است؟

$$\Rightarrow \text{اتصال ستاره } \lambda \left\{ \begin{array}{l} I_P = \frac{V_P}{Z} = I_L \\ V_P = \frac{V_L}{\sqrt{3}} \Rightarrow P_{e\lambda} = \sqrt{3} V_L \times I_L \cos \varphi = \sqrt{3} I_P \times \sqrt{3} V_P \times \frac{R}{Z} \\ \cos \varphi = \frac{R}{Z} \\ P_{e\lambda} = 3 \frac{V_P^2 R}{Z^2} \end{array} \right. \quad (7-31)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I_L = \sqrt{3} I_P = \sqrt{3} \frac{V_L}{Z} \\ V_L = V_P \Rightarrow P_{e\Delta} = \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \frac{V_L}{Z} \times V_L \times \frac{R}{Z} \\ \cos \varphi = \frac{R}{Z} \\ P_{e\Delta} = 3 \frac{V_L^2 R}{Z^2} \end{array} \right. \quad (7-32)$$

از تقسیم رابطه ی ۷-۳۲ به رابطه ی ۷-۳۱ می توان نوشت :

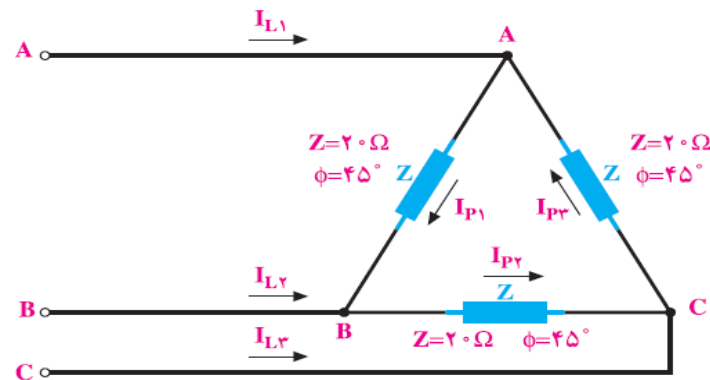
$$\frac{P_{e\Delta}}{P_{e\lambda}} = \frac{\frac{3V_L^2 R}{Z^2}}{\frac{3V_P^2 R}{Z^2}} = \frac{V_L^2}{V_P^2} = \frac{(\sqrt{3}V_P)^2}{V_P^2} = 3$$

$$P_{e\Delta} = 3P_{e\lambda} \quad (7-33)$$

👉 نتیجه: اگر بتوانیم یک موتور سه فاز را به صورت ستاره و مثلث به شبکه وصل کنیم. موتور در حالت مثلث با توان نامی و در حالت ستاره با $\frac{1}{3}$ توان نامی کار می کند و از شبکه $\frac{1}{3}$ جریان نامی را دریافت می کند. وجود این شرایط، زمینه ی مساعدی را برای راه اندازی موتورهای سه فاز آسنکرون فراهم می کند.

مثال ۳: سه امپدانس (مطابق شکل ۷-۱۳) به شبکه‌ی سه سیمه با ولتاژ خطی 100 ولت به صورت مثلث اتصال دارند. مطلوب است:

- ۱- جریان فازی و خطی.
- ۲- توان مصرفی، غیر مفید و ظاهری.
- ۳- اگر سه امپدانس به صورت ستاره وصل شوند، چه توانی مصرف می‌کنند؟ اندازه‌ی این توان چه نسبتی از حالت مثلث است؟



شکل ۷-۱۳

۱- می‌توان نوشت:

$$\Delta \{ V_P = V_L = 100, \text{ بار متعادل } |I_{P1}| = |I_{P2}| = |I_{P3}| \text{ و}$$

$$|I_{L1}| = |I_{L2}| = |I_{L3}| = I_L$$

$$I_{P1} = \frac{V_{P1}}{Z_1} = \frac{100}{20} = 5A$$

برای به دست آوردن جریان خطی می‌توان از رابطه‌ی ۷-۲۵ استفاده کرد.

$$|I_{L1}| = |I_{L2}| = |I_{L3}| = I_L = \sqrt{3} I_P = \sqrt{3} \times 5 = 8.66 [A]$$

$$V_L = 100, \phi = 45^\circ, I_L = 5\sqrt{3} \quad \text{—۲}$$

$$P_e = \sqrt{3} V_L I_L \cos \phi$$

$$P_e = \sqrt{3} \times 100 \times 5\sqrt{3} \cos 45^\circ$$

$$P_e = \sqrt{3} \times 100 \times 5\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1060.6 [W]$$

$$P_d = \sqrt{3} V_L I_L \sin \phi = \sqrt{3} \times 100 \times 5\sqrt{3} \times \sin 45^\circ$$

$$P_d = 1060.6 [V.A.R]$$

$$P_S = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = \sqrt{3} V_L I_L = \sqrt{3} \times 100 \times 5\sqrt{3} = 1500 [V.A]$$

$$P_{e\lambda} = \sqrt{3} I_L V_L \cos \phi \quad \text{—۳}$$

$$V_P = \frac{V_L}{\sqrt{3}} = \frac{100}{\sqrt{3}} [V]$$

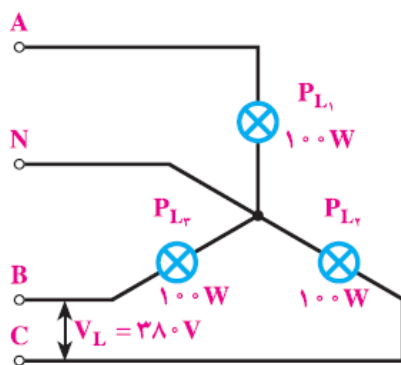
$$I_L = I_P = \frac{V_P}{Z} = \frac{100/\sqrt{3}}{20} = \frac{5}{\sqrt{3}} [A]$$

$$P_{e\lambda} = \sqrt{3} \times \frac{5}{\sqrt{3}} \times 100 \times \cos 45^\circ = 353/55 [W]$$

$$P_{e\lambda} / P_{e\Delta} = \frac{353/55}{1060/6} = \frac{1}{3}$$

۷-۵- اثر قطع یک فاز از خطوط انتقال بر مصرف کننده‌ها

۷-۵-۱- اتصال ستاره: فرض می‌کنیم سه لامپ ۱۰۰ وات (مطابق شکل ۷-۱۴) به یک



شکل ۷-۱۴

شبکه‌ی سه فاز به چهار سیمه با اتصال ستاره وصل باشند. اگر فاز A قطع شود یا مصرف کننده‌ی P_{L1} از مدار خارج گردد، در صورتی که سیم نول وصل شده باشد، دو مصرف کننده‌ی دیگر یعنی لامپ‌های P_{L2}, P_{L3} با توان نامی به کار خود ادامه می‌دهند. در نتیجه، توان سیستم سه فاز $P_{L2} + P_{L3} = 200W$ خواهد بود؛ یعنی، مدار سه فاز به $\frac{2}{3}$ قدرت نامی به کار خود ادامه می‌دهد.

اگر سیم نول و فاز A قطع شود، دو بار P_{L2} و P_{L3} با هم سری می‌شوند و تحت ولتاژ خطی V_{BC} قرار می‌گیرند. چنانچه اثر حرارت را در مقاومت‌های مصرف کننده‌ها نادیده بگیریم، می‌توانیم بگوییم مقاومت در این وضعیت دو برابر شده است ولی ولتاژ $V_P = \frac{V_L}{\sqrt{3}}$ برابر می‌شود. بنابراین، تغییر ولتاژ از تغییر مقاومت‌ها در مدار V_{BC} کمتر است. در نتیجه، جریان کاهش می‌یابد و به دنبال آن، نور و توان لامپ کمتر می‌شود. در این حالت، توان مدار برابر است با:

$$P_e = \frac{V_L^2}{2R} = \frac{3V_P^2}{2R} = \frac{3}{2} \times \frac{V_P^2}{R}$$

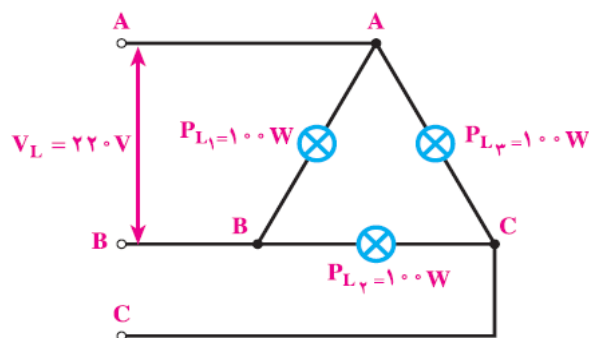
$$P_{L1} = P_{L2} = P_{L3} = \frac{V_P^2}{R} = 100 \text{ [W]}$$

$$P_e = \frac{3}{2} \times 100 = 150 \text{ [W]}$$

توان مدار به نصف کاهش می‌یابد. در موتورهای سه فاز وقتی یک فاز قطع می‌شود، موتور دو فاز کار می‌کند و توان آن به نصف توان نامی می‌رسد. علاوه بر کاهش توان، حوزه‌ی دوار در سطح استاتور از شکل سه فاز خارج می‌شود. در صورتی که موتور زیر بار باشد، امکان غلبه‌ی بار بر قدرت موتور زیاد است. در نتیجه، موتور زیر بار می‌خوابد. اگر سیستم حفاظتی موتور عمل نکند، سوختن موتور حتمی است.

۲-۵-۷- اتصال مثلث: فرض می‌کنیم سه لامپ ۱۰۰ واتی به شبکه‌ی سه فازیه سه سیمه

(مطابق شکل ۷-۱۵) با اتصال مثلث به هم وصل باشند. اگر سه فاز سالم باشد و فقط یکی از مصرف‌کننده‌ها



شکل ۷-۱۵

— مثلاً P_{L1} — از شبکه خارج شود، دو لامپ باقی‌مانده — یعنی P_{L2} و P_{L3} — با توان نامی به کار خود ادامه خواهند داد و در کیفیت نور آن‌ها تغییری به وجود نمی‌آید و مدار سه فاز با $\frac{2}{3}$ توان نامی کار خواهد کرد. اگر مصرف‌کننده‌ها سالم باشند و فقط یکی از فازها — مثلاً A — قطع شود، لامپ L_2 چون ولتاژ نامی را از دو فاز B و C دریافت می‌کند، با نور طبیعی و توان نامی خود به کار ادامه می‌دهد. دو لامپ P_{L1} و P_{L3} سری شده و از ولتاژ خطی بین B و C تغذیه می‌کنند. در نتیجه، این دو مصرف‌کننده به اندازه‌ی نصف ولتاژ نامی از شبکه تغذیه می‌شوند. اگر از اثرات حرارتی در مصرف‌کننده‌های P_{L1} و P_{L3} صرف‌نظر کنیم، خواهیم داشت:

$$P_e = \frac{V_L^2}{2R} + P_{L2}$$

(۷-۳۴)

$$P_{L1} = P_{L2} = P_{L3} = \frac{V_L^2}{R} = 100$$

$$P = 50 + 100 = 150 \text{ [W]}$$

توان مدار سه فاز به برابر نصف توان نامی قبل از قطع یک فاز می‌شود. اگر مصرف‌کننده‌های P_{L1} ، P_{L2} و P_{L3} سیم‌پیچ‌های یک الکتروموتور باشند، به هنگام بارداری مورد تهدید قرار می‌گیرند و احتمال از بین رفتن و سوختن سیم‌پیچ‌ها زیاد است.

۶-۷- اثر تعویض دو فاز بر کمیت‌های الکتریکی مصرف‌کننده‌ها

تعویض دو فاز در شبکه‌های سه فاز، وقتی مصرف‌کننده‌ها متعادل‌اند، هیچ اثر نامطلوبی در مقادیر جریان‌های فازی، خطی، توان‌های مفید، غیرمفید و ضریب توان ندارد. فقط در موتورهای یا مصرف‌کننده‌هایی که گردش مکانیکی دارند، جهت گردش عوض می‌شود. در بارهای نامتعادل تعویض جای دو فاز در کمیت‌های الکتریکی آثاری برجای می‌گذارد و سبب تغییر جریان فازها می‌شود. بنابراین، باید به این نکته توجه داشت و از جابه‌جایی ناخواسته در فازها خودداری کرد.

۷-۷- اثر قطع سیم نول در بار نامتعادل سه فاز اتصال ستاره

در اتصال ستاره‌ای بارهای نامتعادل، وجود سیم نول موجب برقراری ولتاژ فازی $V_P = \frac{V_L}{\sqrt{3}}$

در هر فاز می‌شود. در صورت قطع سیم نول، ولتاژهای دو سربارها در هر فاز برابر $\frac{V_L}{\sqrt{3}}$ نخواهد شد. به بعضی از فازها، ولتاژ کم‌تر و به بعضی دیگر ولتاژ بیش‌تری اعمال می‌شود. این پدیده مصرف‌کننده‌های نامتعادل را تهدید می‌کند. در حالت یاد شده، مرکز بارها از پتانسیل صفر خارج می‌شود و به عبارت دیگر، نسبت به زمین اختلاف پتانسیل پیدا می‌کند. این تغییر پتانسیل مرکز بارها را **تغییر مکان نقطه‌ی صفر** می‌گویند.