

جبر خطی جلسه اول

ماتریس و دترمینان

تعریف: هر آرایه ای از اعداد که دارای m سطر و n ستون باشد یک ماتریس $m \times n$ گویند. که نمایش عمومی چنین ماتریسی به صورت زیر است.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad A = (a_{ij})_{m \times n}$$

هر یک از اعداد a_{ij} را یک عنصر یا درآیه ماتریس می نامیم. که I اندیس سطر و J اندیس ستون است (به عنوان مثال a_{23} یعنی سطر دوم ستون سوم) که در این صورت ماتریس A را به اختصار با نماد $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ نشان می دهیم.

برای مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -5 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1 \times 4}$$

ماتریس A دارای ۳ سطر و ستون است و ماتریس B دارای یک سطر و چهار ستون است.

انواع ماتریسها:

الف) ماتریس سطری: ماتریسی که فقط یک سطر داشته باشد را ماتریس سطری (بردار سطری) می نامیم

$$\text{مانند ماتریس } B \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1 \times 4} \quad \text{که فرم کلی آنها به صورت} \quad [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}]_{1 \times n} = (a_{ij})_{1 \times n}$$

می باشد به عبارتی در $A = (a_{ij})_{m \times n}$ به جای $m=1$ قرار می دهیم

ب) ماتریس ستونی: ماتریسی که فقط دارای یک ستون باشد ماتریس ستونی (بردار ستونی) می نامیم که در

فرم $A = (a_{ij})_{m \times n}$ به جای $n=1$ قرار می دهیم.

$$C = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{m \times 1} = (a_{ij})_{m \times 1}$$

پ) ماتریس صفر: ماتریسی که تمام عناصر آن صفر باشد را ماتریس صفر می نامیم و به صورت

$A = 0$ یا $A = 0_{m \times n}$ صفر نمایش می دهیم.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

ماتریس مربع: ماتریسی که در آن تعداد سطرها و ستونهای آن با هم برابر باشد یک ماتریس می نامیم به عبارتی در فرم $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ یک ماتریس مربع است اگر و فقط اگر $m=n$ باشد

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \quad F = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

نکته: ماتریس مربع $n \times n$ را ماتریس مربع مرتبه n گویند. به عنوان مثال ماتریس F ماتریس مربع مرتبه ۳ است در ماتریس مربع $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ قطری که اندیس سطر و ستون آن برابر باشد را قطر اصلی گویند مانند درایه های $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$

ماتریس واحد (همانی): ماتریس مربع $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ را در صورتی که هر یک از عناصر روی قطر اصلی برابر با یک و سایر عناصر صفر باشد را همانی یا واحد گویند که با I_n نمایش می دهیم که n مرتبه ماتریس مربع

است. $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس قطری: ماتریسی که تمام عناصر خارج قطر اصلی آن صفر باشد را ماتریس قطری گویند.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس اسکالر: ماتریس قطری که تمام عناصر روی قطر اصلی آن برابر باشد را ماتریس اسکالر گویند. و ضربی از ماتریس واحد است یعنی هر ماتریس به صورت KI_n باشد ماتریس اسکالر است.

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 5I_3 \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I_2$$

ماتریس بالا مثلثی: ماتریس مربعی که تمام عناصر زیر قطر آن صفر باشد ماتریس بالا مثلثی گویند. یعنی اگر $j > i$ باشد $a_{ij} = 0$ است و سایر عناصر می تواند عدد یا صفر باشد. مانند

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس پائین مثلثی: ماتریس مربعی که تمام عناصر بالا قطر اصلی آن صفر باشد ماتریس پائین مثلثی گویند. یعنی اگر $i < j$ باشد. $a_{ij} = 0$ است و سایر عناصر می تواند عدد یا صفر باشد مانند

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

نکته: ماتریس های واحد، قطری، اسکالر، صفر هم ماتریس بالا مثلثی و هم ماتریس پائین مثلثی هستند. ماتریس متقارن: فرض کنید A یک ماتریس مربع از مرتبه n باشد در صورتیکه درایه های نسبت به قطر اصلی برابر باشد ماتریس را متقارن گویند به عبارتی اگر $a_{ij} = a_{ji}$ باشد ماتریس A را متقارن گویند.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

ماتریس شبه متقارن (پادمتقارن): فرض کنید A یک ماتریس مربع مرتبه n باشد. در صورتیکه کلیه عناصر قطر اصلی صفر باشد. و سایر عناصر نسبت به قطر قرینه باشد یعنی اگر $i = j$ باشد $a_{ij} = 0$ و اگر $i \neq j$ باشد $a_{ij} = -a_{ji}$ در این صورت ماتریس A شبه متقارن است.

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

ضرب یک عدد در ماتریس: فرض کنید k یک عدد اسکالر $A = (a_{ij})_{m \times n}$ یک ماتریس باشد در این صورت $kA = (ka_{ij})_{m \times n}$ یعنی کلیه اعداد ماتریس در اسکالر ضرب می شود. مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ باشد حاصل $3A$ را بدست آورید.

$$3A = 3 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 12 \end{bmatrix}$$

تساوی دو ماتریس: دو ماتریس A و B را مساوی گویند اگر و فقط اگر دو ماتریس هم مرتبه باشند و درایه های نظیر به نظیر آنها با هم برابر باشد (یعنی $a_{ij} = b_{ij}$) مثال: مقدار x و y را طوری تعیین کنید که دو ماتریس A و B با هم برابر باشند.

$$A = \begin{bmatrix} 2x & 4 \\ -8 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2y & 5 \end{bmatrix}$$

$$2x = 6 \Rightarrow x = 3, 2y = -8 \Rightarrow y = -4$$

جمع دو ماتریس:

جمع دو ماتریس وقتی قابل تعریف است که دو ماتریس هم مرتبه باشند که در این صورت درایه های نظیر به نظیر با هم جمع می شوند و متبه ماتریس تغییر نمی کند به عنوان مثال اگر $A_{m \times n}$ و $B_{m \times n}$ در این صورت اگر $C = A + B$ باشد $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ باشد حاصل جمع دو ماتریس را بدست آورید.

$$C = a + b \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 8 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

قرینه ماتریس: اگر $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ، ماتریس $-A$ را قرینه ماتریس A می نامیم و با $-A = (-a_{ij})_{m \times n}$ نشان می دهیم بنابراین

$$A - B = A + (-B)$$

مثال:

فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ باشد حاصل $2A - 3B$ را بدست آورید.

$$2A - 3B = 2 \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -9 & -12 \\ +3 & -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -14 \\ 3 & -11 \end{bmatrix}$$

قضیه:

اگر A, B, C سه ماتریس $m \times n$ و h, k دو عدد حقیقی باشند آنگاه:

الف) $A+B=B+A$

جمع دو ماتریس خاصیت جابجایی دارد

ب) $A+(B+C)=(A+B)+C$

خاصیت پخششی دارد.

پ) $k(A+B)=kA+kB$

ت) $(k+h)A=kA+hA$

ضرب دو ماتریس:

دو ماتریس $A = (a_{ij})_{m \times p}$ و $B = (b_{ij})_{p \times n}$ را در نظر می گیریم حاصل ضرب دو ماتریس A, B ماتریسی است مانند C که با $C_{m \times n} = A_{m \times p} B_{p \times n}$ نشان می دهیم که دارای m سطر و n ستون است بنابراین برای ضرب دو ماتریس باید تعداد ستون ماتریس اول برابر تعداد سطر ماتریس دوم باشد. برای بدست آوردن درایه C_{ij} ماتریس C کافی است سطر i ام ماتریس A را در ستون j ام C ماتریس B ضرب کنیم و نظیر به نظیر با هم جمع کنیم

$$C_{ij} = \sum a_{ik} b_{kj}, \quad k=1$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m1} & C_{m2} & \dots & C_{mn} \end{bmatrix}$$

نکته: ضرب دو ماتریس در حالت کلی خاصیت جابجایی ندارد $AB \neq BA$

قضیه:

الف) $AI_n = A = I_n A$

ب) $A(BC) = (AB)C$

پ) $C(A+B) = CA + CB$

نکته: در حالت کلی در صورتی که $AB=AC$ باشد نمی توان نتیجه گرفت $B=C$ است.

ضرب دو ماتریس:

دو ماتریس $A = (a_{ij})_{m \times p}$ و $B = (b_{ij})_{p \times n}$ را در نظر می گیریم حاصل ضرب دو ماتریس A, B ماتریسی است مانند C که با $C_{m \times n} = A_{m \times p} B_{p \times n}$ نشان می دهیم که دارای m سطر و n ستون است بنابراین این برای ضرب دو ماتریس باید تعداد ستون ماتریس اول برابر تعداد سطر ماتریس دوم باشد. برای بدست آوردن درایه C_{ij} ماتریس C کافی است سطر i ام ماتریس A را در ستون j ام C ماتریس B ضرب کنیم و نظیر به نظیر با هم جمع کنیم

$$C_{ij} = \sum a_{ik} b_{kj}, \quad k=1$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2j} & & b_{2n} \\ & & & & \\ & & & & \\ b_{p1} & b_{p2} & & & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{i1} & C_{i2} & C_{ij} & C_{in} \\ C_{m1} & C_{m2} & \dots & C_{mn} \end{bmatrix}$$

نکته: ضرب دو ماتریس در حالت کلی خاصیت جابجایی ندارد $AB \neq BA$
قضیه:

$$\text{الف) } AI_n = A = I_n A$$

$$\text{ب) } A(BC) = (AB)C$$

$$\text{پ) } C(A+B) = CA + CB$$

نکته: در حالت کلی در صورتی که $AB=AC$ باشد نمی توان نتیجه گرفت $B=C$ است.

مثال: حاصل ضرب ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

$$C = AB = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 4 \times 2 & 2 \times -1 + 4 \times 0 \\ -1 \times 1 + 2 \times 2 & -1 \times -1 + 2 \times 0 \\ 2 \times 1 + 0 \times 2 & 2 \times -1 + 0 \times 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$C = \begin{bmatrix} 11 & -2 \\ 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

نکته: در این مثال BA تعریف نشده اند چون تعداد ستون ماتریس اول برابر تعداد سطر ماتریس دوم نیست.

ترانهاده ماتریس:

اگر در ماتریس $A = (a_{ij})_{m \times n}$ جای سطرها و ستونها را با هم عوض کنیم ماتریس حاصل را ترانهاده ی ماتریس می نامیم و با A^T یا A' نشان می دهیم به بیان دیگر $A^T = (b_{ij})_{n \times m}$ که در آن $b_{ij} = a_{ji}$ می باشد.

مثال: ترانهاده ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

قضیه:

اگر A و B دو ماتریس $m \times n$ و k عدد حقیقی باشد.

الف) $(A^T)^T = A$ یعنی ترانهاده ترانهاده ماتریس A با ماتریس A برابر است

ب) $(KA^T)^T = K(A^T)^T = KA$ یعنی ترانهاده مضربی از یک ماتریس با همان مضرب ترانهاده ماتریس برابر است

پ) $(A+B)^T = A^T + B^T$ یعنی ترانهاده مجموع دو ماتریس برابر مجموع ترانهاده های دو ماتریس است

ت) $(AB)^T = B^T A^T$ یعنی ترانهاده ضرب دو ماتریس برابر حاصلضرب ترانهاده ماتریس دومی در ترانهاده ماتریس اولی و برای آنکه قابل تعریف باشد باید دو ماتریس مربع باشد.

نکته ۱: در صورتی که ماتریس A متقارن باشد در این صورت $A^T = A$

نکته ۲: در صورتی که ماتریس A شبه متقارن باشد در این صورت $A^T = -A$

ماتریس متعامد: در صورتی که حاصل ضرب ترانهاده یک ماتریس در خود ماتریس برابر ماتریس واحد شود

ماتریس را متعامد گویند. یعنی $A^T A = A A^T = I_n$

و در صورتی امکان پذیر است که ماتریس A مربع باشد مانند ماتریس دوران

$$\text{ماتریس دوران} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

به عنوان مثال ماتریس های زیر متعامد هستند

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

اثر ماتریس: (trac):

مجموع عناصر روی قطر اصلی را اثر ماتریس گویند و اثر ماتریس A را با $\text{tr}(A)$ نشان می دهیم

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn}$$

مثال: اثر ماتریس A را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{tr}(A) = 6 + (-1) + 5 = 10$$

خواص اثر ماتریس:

$$\text{tr}(kA) = k\text{tr}(A) \quad (\text{الف})$$

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) \quad (\text{ب})$$

تعریف دترمینان:

ابعی است که هر ماتریس مربع را به یک عدد حقیقی نسبت می دهد و دترمینان ماتریس A را با $\det A$ یا $|A|$ نشان می دهیم.

(۱) دترمینان ماتریس 1×1 ماتریس 1×1 تنها دارای یک عدد است و دترمینان این نوع ماتریس همان عدد ماتریس است به عنوان مثال اگر $A = [7]$ باشد در این صورت $\det A = 7$ است.

(۲) دترمینان ماتریس 2×2 حاصل ضرب عناصر قطر اصلی منهای حاصل ضرب عناصر قطر فرعی یعنی

اگر $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ باشد در این صورت دترمینان A به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

مثال: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = (3 \times (-1)) - (5 \times 4) = -23$$

مینور یا کهاد:

ماتریسی که از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس $A_{n \times n}$ بدست می آید و با M_{ij} نشان می دهیم
ماتریس M_{ij} ماتریسی $(n-1) \times (n-1)$ است و دترمینان ماتریس M_{ij} را مینور یا کهاد عنصر a_{ij} در ماتریس A می نامیم.

مثال: مینور a_{23} را در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

برای محاسبه M_{23} سطر دوم و ستون سوم را حذف می کنیم . یعنی

$$a_{23} = |M_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (1 \times 2) - (2 \times 0) = 2$$

همسازه یا کوفاکتور:

همسازه عنصر a_{ij} در ماتریس $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ را که عددی حقیقی است با A_{ij} نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

مثال: کوفاکتور عنصر a_{23} را در مثال قبل بدست آورید.

$$A_{23} = (-1)^{2+3} |M_{23}| = -1 \times 2 = -2$$

محاسبه دترمینان به روش بسط سطر i ام

از این روش برای محاسبه دترمینان ماتریسهای با مرتبه بالاتر از 2×2 استفاده می شود به صورت زیر تعریف می شود.

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}$$

لازم به توضیح است که این اعمال نسبت به i ام نیز می توان انجام داد که در این صورت

$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ii} A_{ii}$ بنابراین برای کمتر شدن محاسبات بهتر است سطر یا ستونی انتخاب شود که تعداد صفر بیشتری باشد.

مثال: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید.

توجه: چون در سطر دوم صفر وجود دارد نسبت به سطر دوم بسط می دهیم

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = (-1)^{2+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \times 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \times 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -1 \times (2 - 16) + 0 + (-2) \times (6 - 8) = +10 + (-2) = 8 \end{aligned}$$

مثال: دترمینان ماتریس A را محاسبه کنید

توجه: چون ستون دوم دارای ۲ عدد صفر می باشد نسبت به ستون دوم بسط می دهیم

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (-1)^{1+2} \times 3 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \times 0 \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \times 0 \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$-3 \times (3 - 30) + 0 + 0 = 81$$

مثال: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید. نسبت به سطر اول بسط می دهیم

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \times 3 \times \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times 2 \times \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \times (10 - 6) + (-2)(-2 - 24) + 1 \times (-1 - 20) = 12 + 44 - 21 = 35$$

دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس های 3×3 :

از این دستور فقط برای محاسبه دترمینان ماتریس ها 3×3 استفاده می شود. در این روش دو ستون اول را کنار ماتریس نوشته سپس مجموع حاصل ضرب عناصر قطر اصلی را منهای مجموع حاصل ضرب عناصر قطر فرعی می کنیم.

مثال: دترمینان ماتریس A را محاسبه کنید

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 6 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (3 \times 5 \times 6 + 4 \times 1 \times (-1) + 2 \times 2 \times 2) - (4 \times 2 \times 6 + 3 \times 1 \times 2 + 2 \times 5 \times (-1))$$

$$= (90 + 4 + 8) - (48 + 6 - 10) = 94 - 44 = 50$$

نکته ۱) اگر در یک ماتریس یک سطر یا یک ستون مضرب یک سطر یا یک ستون دیگر باشد دترمینان ماتریس صفر است.

نکته ۲) در صورتی در یک ماتریس یک سطر یا یک ستون برابر یک سطر یا یک ستون دیگر باشد دترمینان صفر است.

مثال: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \\ -4 & -3 & -5 & -2 \\ 7 & 8 & 2 & 9 \\ 6 & 4 & 3 & 10 \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید.

جواب: چون سطر دوم (-1) برابر سطر اول است بنابراین $|A| = 0$ است

نکته ۳) اگر یک سطر یا یک ستون ماتریس صفر باشد دترمینان ماتریس صفر می شود.

مثال: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 10 \\ 6 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید.

جواب: چون ستون دوم صفر است بنابراین $|A| = 0$ است.

(۴) اگر ماتریس A در عدد K ضرب شود دترمینان K^n برابر می شود $|kA| = k^n |A|$
مثال: اگر ماتریس A مرتبه ۴ و $|A| = 8$ باشد دترمینان $3A$ را بدست آورید.

$$|kA| = k^n |A| = 3^4 \times 8 = 648$$

(۵) اگر یک سطر یا ستون ماتریس A را عدد K ضرب کنیم دترمینان ماتریس K برابر می شود
مثال: اگر ماتریس A مرتبه ۵ و $|A| = 12$ باشد در صورتیکه سطر سوم را در عدد ۵ ضرب کنیم دترمینان

$$|kA| = 5 \times 12 = 60 \quad \text{جواب:}$$

(۶) اگر در یک ماتریس جای دو سطریا جای دو ستون عوض شود علامت دترمینان عوض می شود.
(۷) اگر مضربی از یک سطر یا یک ستون را به سطر یا ستون دیگر اضافه کنیم تاثیری در مقدار دترمینان ندارد. از خاصیت برای آن استفاده می شود در سطر یا ستون صفر بدست آوریم تا محاسبه دترمینان ساده تر شود.

(۸) دترمینان ماتریس های مثلثی و قطری برابر حاصل ضرب عناصر روی قطر اصلی می باشد.

$$\text{مثال: دترمینان ماتریس } A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \text{ را محاسبه کنید.}$$

جواب: چون ماتریس مثلثی است دترمینان برابر حاصل ضرب عناصر روی قطر اصلی است.

$$|A| = 2 \times 5 \times 8 = 80$$

(۹) اگر A و B دو ماتریس مربع هم مرتبه باشند.

$$|AB| = |A||B| \quad (10) \text{ دترمینان ماتریس واحد برابر یک است}$$

$$|I| = 1 \quad (11) \text{ دترمینان ماتریس } A \text{ و ترانژاده ماتریس } A \text{ با هم برابر است}$$

(۱۲) دترمینان ماتریس های متعامد برابر ± 1 است

مثال: دترمینان ماتریس های زیر را بدست آورید چون هر دو ماتریس متعامد هستند بنابراین

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = +1, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 1$$

جبر خطی جلسه سوم

وارون ماتریس

ماتریس مربع $A = (a_{ij})_{n \times n}$ را وارون پذیر می نامیم اگر ماتریسی مانند $B = (b_{ij})_{n \times n}$ وجود داشته باشد به طوری که $AB = BA = I_n$ در این صورت ماتریس B وارون ماتریس A است که با A^{-1} نمایش می دهیم. وارون ماتریس در صورت وجود منحصر به فرد است. نکته: در صورتی که $|A| = 0$ باشد ماتریس وارون پذیر نیست. تعریف ماتریس الحاقی:

ترانهاده ماتریس همسازهای ماتریس مربع A را ماتریس الحاقی A نامیده و با $\text{adj}A$ نشان می دهیم. یعنی $\text{adj}A = (A_{ij})^T$ محاسبه وارون ماتریس:

وارون ماتریس را به دو روش به دست می آوریم
الف) با استفاده از ماتریس الحاقی اگر $|A| \neq 0$ باشد در این صورت وارون ماتریس با استفاده از رابطه زیر بدست می آید. $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A$

مثال: وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ را با استفاده از ماتریس الحاقی بدست آورید.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2 \times 2 \times 2 + 1 \times 1 \times 2 + 2 \times 2 \times 0) - (1 \times 2 \times 2 + 2 \times 1 \times 0 + 2 \times 2 \times 2) = 2$$

$$a_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 9 \quad a_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -7 \quad a_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$a_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad a_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad a_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = +2$$

$$a_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -8 \quad a_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = +6 \quad a_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 9 & -7 & -6 \\ -2 & 2 & 2 \\ -8 & 6 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{adj}A = (A_{ij})^T = \begin{bmatrix} 9 & -2 & -8 \\ -7 & 2 & 6 \\ -6 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 9 & -2 & -8 \\ -7 & 2 & 6 \\ -6 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -1 & -4 \\ -\frac{7}{2} & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

نکته: برای محاسبه وارون ماتریس های 2×2 کافی است جای عناصر قطر اصلی را عوض کنیم و قطر فرعی را در (-1) ضرب کنیم تا ماتریس الحاقی بدست آید سپس تقسیم بر دترمینان ماتریس می کنیم به عبارتی اگر ماتریس A به صورت $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، $\text{adj}A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ، $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ می باشد.

مثال: وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید

$$|A| = (4 \times 6) - (3 \times 2) = 18$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

(ب) محاسبه وارون ماتریس با استفاده از اعمال سطری مقدماتی

در صورتی که ماتریس A وارون پذیر باشد ($|A| \neq 0$) به وسیله یک سری اعمال سطری مقدماتی تبدیل به ماتریس واحد می شود آنگاه با انجام همین اعمال سطری مقدماتی بر روی ماتریس واحد وارون ماتریس A بدست می آید. جهت بدست آوردن وارون ماتریس A ابتدا ماتریس A را به صورت $[A | I]$ می نویسیم یعنی ماتریس واحد را کنار ماتریس می نویسیم سپس a_{11} را به یک تبدیل می کنیم سپس با اعمال سطری عناصر ستون اول را به صفر تبدیل می کنیم سپس a_{22} را در ماتریس جدید به یک تبدیل می کنیم سپس اعداد ستون دوم زیر a_{22} را به صفر تبدیل می کنیم الی آخر سپس a_{nn} را به یک تبدیل می کنیم و توسط آن با اعمال سطری مقدماتی اعداد بالا a_{nn} را به صفر تبدیل می کنیم و توسط $a_{(n-1)(n-1)}$ اعداد بالای آن را به صفر تبدیل می کنیم و الی آخر که در این صورت ماتریس A به ماتریس واحد تبدیل می شود و فرم کلی $[I | B]$ تبدیل می شود که B وارون ماتریس A است نمایش اعمال سطری مقدماتی به صورت زیر است.

$$(1) \text{ تعویض جای دو سطر } R_i \leftrightarrow R_j$$

$$(2) \text{ ضرب یک سطر در عدد غیر صفر } kR_i \rightarrow R_i$$

$$(3) \text{ اضافه کردن مضربی از یک سطر به سطر دیگر } kR_i + R_j \rightarrow R_j$$

مثال: وارون ماتریس زیر را به روش اعمال سطری مقدماتی بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 - 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & +4 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\frac{R_3}{3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 - 2R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{array} \right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -2 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

بنابراین

قضیه:

اگر A, B دو ماتریس $n \times n$ و وارون پذیر باشند، آنگاه:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

(۱) ماتریس حاصل ضرب AB وارون پذیر است.

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

(۲) ماتریس ترانهای A وارون پذیر است.

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

(۳) وارون، وارون ماتریس A برابر ماتریس A است

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}$$

(۴) دترمینان وارون ماتریس A برابر معکوس دترمینان ماتریس A است

$$A^{-1} = A^T$$

نکته: در ماتریس متعامد A وارون ماتریس و ترانهاده با هم برابرند

تمرین:

۱- دترمینان ماتریس و وارون ماتریس زیر را بدست آورید

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

۲- دترمینان ماتریس زیر را به روش ساروس بدست آورید

$$\begin{bmatrix} 2 & -7 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

۳- دترمینان ماتریسهای زیر را به روش الحاقی بدست آورید

$$a) \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

۴- دترمینان ماتریس زیر را به روش سطری مقدماتی بدست آورید

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

۵- وارون ماتریس زیر را به روش الحاقی بدست آورید

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ -4 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

۶- دترمینان ماتریس زیر را به روش سطری مقدماتی بدست آورید

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

جبر خطی جلسه چهارم

دستگاه معادلات خطی و توابع خطی

دستگاه معادلات خطی:

یک معادله به صورت $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$ را معادله خطی n مجهولی گویند. که هر n تایی مرتب $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ از اعداد حقیقی را که در این معادله صدق کند یک جواب آن می نامیم و m معادله خطی n مجهولی را دستگاه m معادله n مجهولی گویند. و به صورت زیر

$$\text{دستگاه } m \text{ معادله خطی } n \text{ مجهولی} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

در این دستگاه n تایی $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ از اعداد حقیقی را که در تمام معادله های دستگاه صدق کند. یک جواب دستگاه می نامیم. این دستگاه را می توانیم به صورت معادله ماتریسی زیر بنویسیم.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

معادله ماتریسی را به صورت خلاصه $AX=B$ نمایش می دهیم. که در آن $A=(a_{ij})_{m \times n}$ ماتریس

$$\text{ضرایب و } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ ماتریس مجهولات و } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ ماتریس اعداد ثابت است}$$

مثال: دستگاه $\begin{cases} 2x + 2y = 5 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$ را به فرم ماتریسی نمایش دهید.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A \quad X \quad = B$$

نکته: یک دستگاه معادلات خطی ممکن است دارای یک جواب منحصر به فرد یا بینهایت جواب باشد و یا اصلا جوابی نداشته باشد.

روشهای حل یک دستگاه معادلات خطی

۱- روش حذف گاوس:

در این روش با بکارگیری اعمال سطری مقدماتی روی سطرهای ماتریس مرکب $[A \mid B]$ دستگاه $AX=B$ را حل می کنیم.

مثال: دستگاه سه معادله سه مجهولی زیر را به روش حذفی گaus حل کنید.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 5 \\ x - y - z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} [A \mid B] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{R_3 - R_1 \rightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{-R_2}{3} \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{R_3 + 2R_2 \rightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{3}{4}R_3 \rightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & +3 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{R_2 - \frac{R_3}{3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & +3 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 - R_2 \rightarrow R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & +3 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{R_1 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & +3 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -2 \\ z = +3 \end{cases} \end{aligned}$$

مجهول آزاد: در صورتی که با حل دستگاه جواب به گونه ای بدست آید که بتوان مجهولات را بر حسب یکی از مجهولات نوشت آن مجهول را مجهول آزاد گویند.

مثال: دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} X_1 - 2X_2 - 3X_3 = 2 \\ X_1 - 4X_2 - 13X_3 = 14 \\ -2X_1 + 5X_2 + 4X_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} [A \mid B] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & -13 & 14 \\ -2 & 5 & 4 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & 12 \\ 0 & -1 & -5 & 4 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{2R_3 - R_2 \rightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{-1}{2}R_2 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{2R_3 + R_2 \rightarrow R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 7x_3 = -10 \Rightarrow x_1 = -10 - 7x_3 \\ x_2 + 5x_3 = -6 \Rightarrow x_2 = -6 - 5x_3 \end{cases}$$

اگر $x_3 = a$ را به عنوان مجهول آزاد در نظر بگیریم جوابهای معادله به صورت زیر است به عبارتی جواب مجهولات وابسته به یکدیگر هستند.

$$\begin{cases} x_1 = -10 - 7a \\ x_2 = -6 - 5a \\ x_3 = a \end{cases}$$

چون a هر عدد دلخواهی می تواند باشد بنابراین دستگاه بینهایت جواب دارد.

مثال: دستگاه معادلات زیر را حل کنید

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - 4R_1 \rightarrow R_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -8 \\ 0 & 1 & -6 & -13 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 - R_2 \rightarrow R_1 \\ R_3 - R_2 \rightarrow R_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 13 \\ 0 & 0 & -5 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 7x_3 = 13 \\ x_2 - 5x_3 = -8 \\ 0 = -5 \end{cases}$$

معادله سوم این دستگاه غیر ممکن است زیرا $0 \neq -5$ سپس دستگاه داده شده جوابی ندارد بنابراین برای جوابهای یک دستگاه ۳ حالت مختلف امکان دارد رخ دهد.

الف) جواب منحصر به فرد بدست آید که این وضعیت در حالتی است که دترمینان ماتریس ضرائب مخالف صفر باشد.

ب) بیشمار جواب داشته باشد در صورتی است که مجهولات به یکدیگر وابسته باشند

پ) دستگاه جوابی نداشته باشد.

۲- روش وارون ماتریس:

در صورتی که تعداد مجهولات با تعداد معادلات یک دستگاه معادلات خطی برابر باشد (دستگاه n معادله n مجهولی) و ماتریس ضرائب دستگاه وارون پذیر باشد (دترمینان ماتریس ضرائب مخالف صفر باشد) آنگاه دستگاه همواره دارای یک جواب منحصر به فرد است بنابراین برای بدست آوردن مجهولات کافی است از سمت چپ فرم ماتریسی دستگاه را در وارون ماتریس ضرب کنیم تا مجهولات بدست آید.

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

مثال: دستگاه زیر را به روش وارون ماتریس حل کنید.

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x + 2y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix} \quad |A| = (2 \times 2) - (-1 \times 5) = +14$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A = +\frac{1}{14} \begin{bmatrix} 2 & +1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = +\frac{1}{14} \begin{bmatrix} 2 & +1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

۳-دستور کرامر:

اگر ماتریس ضرایب یک دستگاه وارون پذیر باشد ($|A| \neq 0$) آنگاه تنها جواب دستگاه برابر است با:

$$X_i = \frac{\det A_i}{\det A} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

که در آن A ماتریس ضرایب مجهولات و A_i ماتریسی است که از جایگزین کردن ماتریس

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

در ستون i ام

ماتریس A به دست می آید به عبارتی پاسخها را در ستون مجهول مورد نظر قرار می دهیم.

مثال: دستگاه زیر را به روش کرامر حل کنید

$$\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

A_x : جوابها را در ستون x ها قرار می دهیم

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

A_y : جوابها را در ستون y ها قرار می دهیم

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$X = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{-5}{-5} = 1 \quad y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{5}{-5} = -1$$

توجه: در درس مدارهای الکتریکی بیشتر از روش کرامر استفاده میکنیم

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x + y + z = 3 \\ 3x + 4y + z = 8 \end{cases} \quad \text{دستگاه مقابل را به روش کرامر حل کنید.}$$

با استفاده از روش ساروس یا بسط دترمینان ها را محاسبه کرده ایم

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -9 \quad \Delta x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -9$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -9 \quad \Delta z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -9$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-9}{-9} = 1$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-9}{-9} = 1$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-9}{-9} = 1$$

**جبر خطی جلسه
پنجم**

دستگاه همگن:

دستگاهی که ماتریس اعداد ثابت آن همگی صفر باشد همگن گویند به عنوان مثال $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 2x - 5y = 0 \end{cases}$ یک دستگاه

همگن است و $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$ دستگاه غیر ممکن است.

نکته: همواره $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ یک جواب دستگاه همگن است. که جواب صفر موسوم به جواب بدیهی است.

قضیه:

یک دستگاه n معادله n مجهولی همگن دارای یک جواب غیر بدیهی (غیر صفر) است اگر و فقط اگر دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه برابر صفر باشد.

مثال: دستگاه معادلات همگن زیر را حل کنید

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

با استفاده از دستور ساروس دترمینان را محاسبه می کنیم

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1 + (-2) + 2) - (-4 + 1 - 1) = +2 \neq 0$$

چون دترمینان ضرایب مخالف صفر است بنابراین دارای جواب بدیهی $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ است

نکته: در صورتی که دستگاه همگن دارای m معادله و n مجهول باشد همواره دارای یک جواب غیر بدیهی (غیر صفر) است اگر $(n > m)$ باشد و قطعاً تعداد $n-m$ عدد مجهول آزاد وجود دارد

مثال: دستگاه همگن زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -10 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{5}x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{1}{5}x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}a \\ x_2 = \frac{1}{5}a - 2b \end{cases}$$

چون $m=2$ و $n=4$ است بنابراین قطعاً $n-m=4-2=2$ مجهول آزاد وجود دارد.

قضیه ۱: اگر x_2, x_1 دو جواب دستگاه غیر همگن $AX=B$ باشند آنگاه $x_2 - x_1$ و $x_1 - x_2$ جوابهایی برای دستگاه همگن $AX=0$ خواهند بود. بنابراین دستگاه غیر همگن $AX=B$ دارای یک جواب منحصر به فرد است اگر و فقط اگر دستگاه همگن $AX=0$ جواب منحصر به فرد داشته باشد.

نکته: هر عنصر R^n را یک بردار یک نقطه می نامیم

استقلال و وابستگی خطی

مجموعه m بردار $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_m\}$ از عناصر فضای برداری R^n را مستقل خطی گویند.

اگر هیچ مجموعه ای از اعداد حقیقی $C_1, C_2, \dots, C_m$ بجز $C_1 = C_2 = \dots = C_m = 0$ وجود نداشته باشد به طوری که $C_1 \vec{V}_1 + C_2 \vec{V}_2 + \dots + C_m \vec{V}_m = 0$ به عبارتی مجموعه m بردار $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_m\}$ مستقل خطی است، اگر و فقط اگر جواب معادله $C_1 \vec{V}_1 + C_2 \vec{V}_2 + \dots + C_m \vec{V}_m = 0$ برای هر i ، $C_i = 0$ باشد در غیر این صورت این مجموعه را وابسته خطی می نامیم.

نکته: مجموعه بردارهای $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n\}$ مستقل خطی است اگر و فقط اگر دترمینان ماتریس تشکیل شده از مجموعه بردارها مخالف صفر باشد. البته در صورتی که ماتریس مربع حاصل شود و دترمینان قابل محاسبه باشد بنابراین اگر ماتریس تشکیل شده از مجموعه بردارها A بنامیم اگر $|A| \neq 0$ باشد مستقل خطی و اگر $|A| = 0$ باشد مجموعه بردارها وابسته خطی می باشد.

مثال: آیا مجموعه بردارهای $\{(1, 0, 1), (2, 0, 0), (0, 0, 2)\}$ مستقل خطی است

چون ستون دوم برابر صفر است بنابراین دترمینان برابر صفر است و بردارها وابسته خطی هستند.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

مثال: آیا مجموعه بردارها $\{(1, 2, 1), (3, 0, 1), (1, 0, 2)\}$ مستقل خطی است

با استفاده از دستور ساروس

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 2 + 0) - (12 + 0 + 0) = -10 \neq 0$$

چون دترمینان مخالف صفر است مستقل خطی هستند

رتبه ماتریس:

فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. حداکثر تعداد سطرهای مستقل خطی ماتریس A را رتبه ماتریس A نامیده و با $r(A)$ نشان می دهیم و به عبارتی رتبه ماتریس A برابر با حداکثر تعداد بردارهای مستقل خطی در مجموعه $\{R_1, R_2, \dots, R_m\}$ است.

نکته ۱) رتبه ماتریس A برابر با تعداد سطرهای بزرگترین زیر ماتریس مربع A است که دترمینان آن ناصفر می باشد بنابراین در صورتی که دترمینان ماتریس A مخالف صفر باشد رتبه ماتریس برابر رتبه ماتریس است.

نکته ۲) با توجه به تعریف رتبه ماتریس یک روش برای تعیین رتبه ماتریس در صورتی که دترمینان A برابر صفر شود این است که ماتریس A را به ماتریس بالا مثلثی تبدیل کنیم در این صورت تعداد عناصر مخالف صفر روی قطر اصلی رتبه ماتریس است.

مثال: رتبه ماتریس زیر را تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = (0 + 8 + 60) - (-6 + 5 + 0) = 69 \neq 0$$

بنابراین رتبه ماتریس برابر ۳ است

مثال: رتبه ماتریس را تعیین کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (6 - 4) - (2 - 2) = 0$$

بنابراین رتبه ماتریس کمتر از ۳ است و تبدیل به ماتریس بالا مثلثی میکنیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - R_1 \rightarrow R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \leftrightarrow R_3 \\ R_3 \rightarrow R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

چون ماتریس برابر یک است چون تعداد عناصر روی قطر اصلی یکی است

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

خواص رتبه ماتریس

$$r(I_n) = n$$

(الف) رتبه ماتریس واحد برابر مرتبه ماتریس واحد است

$$r(A) = r(A^T)$$

(ب) رتبه ماتریس A با رتبه ترانزپوز A برابر است یعنی

(پ) اگر A ماتریس $n \times n$ باشد اگر $|A| \neq 0$ باشد $r(A) = n$ و اگر $|A| = 0$ باشد $r(A) < n$ است.

(ت) رتبه حاصل ضرب دو ماتریس همواره نابیشتر از کوچکترین رتبه دو ماتریس است یعنی $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ است.

بررسی تعداد جوابهای دستگاه معادلات خطی $AX=B$ با توجه به مفهوم رتبه ماتریس اگر A ماتریس ضرایب دستگاه m معادله خطی n مجهولی باشد و $[A|B]$ ماتریس مرکب B و A باشد رتبه ماتریس مرکب $[A|B]$ را با $r(A|B)$ نشان می دهیم، داریم.

(الف) اگر $r(A|B) = r(A)$ باشد دستگاه دارای حداقل یک جواب است.

(ب) اگر $r(A|B) = r(A) = n$ باشد دستگاه دارای یک جواب منحصر به فرد است.

(پ) اگر $r(A|B) = r(A) < n$ دستگاه دارای بینهایت جواب و مجموعه سطرهای ماتریس A وابسته خطی است ($|A| = 0$)

(ت) اگر $r(A|B) \neq r(A)$ دستگاه جواب ندارد.

مثال: در مورد حل پذیری دستگاه معادلات خطی زیر تحقیق کنید.

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

ابتدا با استفاده از دستور ساروس دترمینان ماتریس ضرائب را بدست می آوریم

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (2 - 2) - (2 - 1) + (-2 - 2) = -3 \neq 0$$

بنابراین $r(A)=3$ است یا به صورت زیر $r(A)$ تعیین می کنیم برای سهولت در محاسبات جای سطر دوم و اول را عوض می کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_3 - R_1 \rightarrow R_3 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_2 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 3$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & +2 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_3 + R_1 \rightarrow R_3 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 \end{smallmatrix}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & +2 & 2 & 2 \end{array} \right]$$

$$R_3 + 2R_2 \rightarrow R_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right] \quad r(A|B) = 2$$

بنابراین $r(A|B) = r(A) = n = 3$ طبق قسمت (ب) دستگاه یک جواب منحصر به فرد دارد.
در مورد حل پذیری دستگاه زیر تحقیق کنید.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -4 \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 2 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_3 + 2R_1 \rightarrow R_3 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & -6 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 6 & 4 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 6 & 4 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_3 + 2R_1 \rightarrow R_3 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 \end{smallmatrix}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 8 & -4 & -4 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_3 \rightarrow R_2 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} R_2 \leftarrow R_2 \end{smallmatrix}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 8 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{array} \right] \Rightarrow r(A|B) = 2$$

بنابراین $r(A|B) \neq r(A)$ است و دستگاه جواب ندارد.
در مورد حل پذیری دستگاه معادلات خطی زیر تحقیق کنید.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -6 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & +2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 + 2R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - R_1 \rightarrow R_3}]{R_2 + 2R_1 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & +2 & -6 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & -6 & -6 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - R_1 \rightarrow R_3}]{R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

بنابراین $n = 3$ و $r(A) = r(A|B) = 2$ و دستگاه دارای بینهایت جواب است. $r(A|B) = 2$

**جبر خطی جلسه
ششم**

تابع خطی:

تابع n متغیر f از فضای برداری R^n به فضای برداری R^m را که به ازای هر عدد حقیقی r و هر دو تایی

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

از R^n در دو شرط زیر صدق کند را یک تابع خطی می نامیم.

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad ۱-$$

$$f(rx) = rf(x) \quad ۲-$$

مثال: نشان دهید $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 4x_1 \\ 2x_1 + \Delta x_2 \end{bmatrix}$ یک تابع خطی است

فرض $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ دو تایی دلخواه در فضای R^2 باشند.

$$۱) f(x+y) = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2(x_2 + y_2) \\ 4(x_1 + y_1) \\ 2(x_1 + y_1) + \Delta(x_1 + y_1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 4x_1 \\ 2x_1 + \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y_2 \\ 4y_1 \\ 2y_1 + \Delta y_2 \end{bmatrix} \Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$۲) f(rx) = f\left(r\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} rx_1 \\ rx_2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} rx_2 \\ 4rx_1 \\ 2rx_1 + \Delta rx_2 \end{bmatrix}\right) = r\begin{bmatrix} 2x_2 \\ 4x_1 \\ 2x_1 + \Delta x_2 \end{bmatrix}$$

$$rf(x) \Rightarrow f(rx) = rf(x)$$

در نتیجه شرط ۱ و ۲ صادق است و f یک تابع خطی است

قضیه:

تابع $R^n \rightarrow R^m$ خطی است اگر و فقط اگر هر مولفه مقدار تابع f در $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ به صورت یک ترکیب خطی

از اعداد $x_1, x_2, \dots, x_n$ باشد.از این قضیه نتیجه می شود که اگر $f: R^n \rightarrow R^m$ یک تابع خطی باشد آنگاه اعداد حقیقی وجود دارند به طوری که $f(x) = Ax$ که ماتریس A یک ماتریس نمایشگر تابع خطی f است.

نکته: در صورتی که $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ دارای توان غیر یک یا عدد ثابت یا توابع لگاریتمی توابع مثلثاتی و غیره باشد نمی تواند نشانگر یک تابع خطی باشد. مانند

$$1) \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad 2) \begin{bmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 \\ x_3^2 \end{bmatrix}, \quad 3) \begin{bmatrix} \sin x_1 \\ \cos x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad 4) \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

تابع شماره یک چون x_1 دارای توان ۲ است

تابع شماره دو چون دارای عدد ثابت است $x_1 + 1$

تابع شماره سه چون دارای نسبتهای مثلثاتی است

تابع شماره چهار چون ضرب $x_1 x_2$ دارد

مثال: آیا تابع $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک تابع خطی است. در این صورت ماتریس نمایشگر آن را برای هر $x \in \mathbb{R}^3$ بنویسید.

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_3 \\ x_1 - 5x_2 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

تابع خطی است چون فقط جمع و تفریق بین x ها وجود دارد

بنابراین ماتریس آن به صورت زیر است.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

فرض کنید $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$ نمایشگر $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ باشد ضابطه تعریف تابع خطی f را تعیین کنید.

$$f(x) = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ x_1 + 4x_2 \\ -5x_1 \end{bmatrix}$$

تابع صفر:

تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ را که برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ به صورت زیر تعریف می شود را تابع صفر گویند.

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

تابع همانی:

تابعی که هیچ تغییری ایجاد نکند را تابع همانی گویند به عبارتی تابع $I: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ را که برای هر $x \in \mathbb{R}^n$

$$I\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

به صورت زیر می باشد و ماتریس نمایشگر آن ماتریس واحد مرتبه n است.

نکته: جهت انجام اعمال جمع دو تایی و ضرب اسکالر یک تابع خطی کافیت آن اعمال را روی ماتریس نمایشگر آنها انجام دهیم.

$$(f + g)x = f(x) + g(x)$$

$$(kf)(x) = kf(x)$$

مثال: توابع خطی $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ و $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ را به صورت در نظر گرفته ایم توابع $f+g$ و $3f$ را تعیین کنید.

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \quad g\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ 3x_1 \end{bmatrix}$$

$$(f + g)\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) + g\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ 3x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 2x_1 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

$$(3f)\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = 3 \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 - 3x_2 \\ 6x_2 \end{bmatrix}$$

نکته: برای بدست آوردن ترکیب توابع خطی $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ و $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ کافی است ضرب ماتریسهای نمایشگر آنها را بدست آوریم.

مثال: دو تابع خطی $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ و $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ را با ضابطه های تعریف شده زیر در نظر بگیرید.

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_1 - 2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad g\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

تابع مرکب gof را بدست آورید.

$$\text{gof} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 \end{bmatrix}$$

نکته: در صورتی $I(x) = \text{gof} = \text{fog}(x)$ باشد تابع یک به یک است و وارون پذیر است.

مثال: آیا دو تابع خطی زیر وارون یکدیگرند.

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}, \quad g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{fog}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{gof}(x) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین تابع fog وارون یکدیگرند.

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

فرض کنید X و Y دو ماتریس ستونی (بردار) غیر صفر و λ عدد حقیقی غیر صفر باشد. اگر در رابطه $AX=Y$ و $Y=\lambda X$ باشد. λ را یک مقدار ویژه و X را بردار ویژه ماتریس A گویند.

$$\begin{cases} Ax + y \\ y = \lambda x \end{cases} \Rightarrow Ax = \lambda x \Rightarrow Ax - \lambda I_n x = 0 \Rightarrow (A - \lambda I_n)x = 0$$

بنابراین λ مقدار ویژه و X بردار ویژه می باشد در معادله $(A - \lambda I_n)x = 0$ صدق می کند شرط وجود جواب غیربدیهی برای دستگاه معادلات فوق آن است که $|A - \lambda I_n| = 0$ باشد.

مثال: مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

$$A - \lambda I_n = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I_n| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(3-\lambda) - (4 \times 3) = 0$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6 - 12 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 6) = 0$$

$$\lambda = -1, \lambda = 6$$

نکته: $|A - \lambda I_n| = 0$ را معادله مشخصه مقادیر ویژه گویند و می توان نتیجه گرفت مجموع مقادیر ویژه برابر اثر ماتریس A است $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ و حاصل ضرب مقادیر ویژه برابر دترمینان A است $|A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ بنابراین می توان گفت معادله مشخصه ماتریس 2×2 به صورت زیر است.

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + |A| = 0$$

طریقه بدست آوردن بردار ویژه:

برای هر λ می توان یک بردار ویژه بدست آورد این بردارها را بردارهای ویژه A گویند برای بدست آوردن بردارهای ویژه کافیست مقادیر λ را در رابطه معادله مشخصه ماتریس A یعنی $(A - \lambda I_n)x = 0$ قرار دهیم و دستگاه بدست آمده را حل کنیم.

مثال: مقادیر ویژه و بردار ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ را بدست آورید

$$|A - \lambda I_n| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$$

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4-1 & 3 \\ 1 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -y$$

هر بردار به صورت $\begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix}$ بردار ویژه نظیر $\lambda = 1$ است مثلاً $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\lambda_2 = 5 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4-5 & 3 \\ 1 & 2-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + 3y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 3y$$

هر بردار به صورت $\begin{bmatrix} x \\ x/3 \end{bmatrix}$ بردار ویژه نظیر $\lambda = 5$ است مثلاً $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

نکته: همانگونه مشاهده می شود برای هر مقدار λ بردارهای $x \neq 0$ بدست آورد که همگی با هم موازیند

مثال: مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

$$|A - \lambda I_n| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 3 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda + 7 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$$

$$\Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 - 8\lambda + 7) = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 7 \end{cases}$$

$$|A - \lambda I_n| = 0 \Rightarrow \begin{cases} (2-\lambda_1)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + (2-\lambda_1)x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + (4-\lambda_1)x_3 = 0 \end{cases}$$

برای $\lambda_1 = 1$ معادله اول به صورت $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ می شود بنابراین $(1, 0, 1)$ در معادله صدق می کند و یک بردار ویژه برای $\lambda_1 = 1$ است و همچنین برای $\lambda_2 = 1$ می توان $(1, 0, 1)$ را به عنوان یک بردار ویژه در نظر گرفت.

و به ازای $\lambda_3 = 7$

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

دستگاه را به یک روش دلخواه حل کنیم

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Delta R_3 + 2R_2 \rightarrow R_3]{\Delta R_2 + 2R_1 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 0 & -18 & 12 \\ 0 & 18 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 + R_2 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 0 & -18 & 12 \\ 0 & 0 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow -5x_1 + \frac{2}{3}x_3 + x_3 = 0 \Rightarrow 5x_1 = \frac{5}{3}x_3 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}x_3 \\ -18x_2 + 12x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{12x_3}{18} = \frac{2}{3}x_3 \\ 24x_3 = 0 \end{cases}$$

بنابراین $x_1 = \frac{1}{3}x_2 = \frac{1}{3}x_3$ است و می توان نتیجه گرفت $(1, 2, 3)$ یک بردار ویژه برای $\lambda = 7$ است که مستقل از دو بردار ویژه دیگر است.

جبر خطی جلسه پنجم

قضیه:

یک دستگاه n معادله n مجهولی همگن دارای یک جواب غیر بدیهی (غیرصفر) است اگر و فقط اگر دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه برابر صفر باشد.

مثال: دستگاه معادلات همگن زیر را حل کنید

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

با استفاده از دستور ساروس دترمینان را محاسبه می کنیم

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1 + (-2) + 2) - (-4 + 1 - 1) = +3 \neq 0$$

چون دترمینان ضرایب مخالف صفر است بنابراین دارای جواب بدیهی $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ است
 نکته: در صورتی که دستگاه همگن دارای m معادله و n مجهول باشد همواره دارای یک جواب غیر بدیهی (غیر صفر) است اگر (n/m) باشد و قطعاً تعداد $n-m$ عدد مجهول آزاد وجود دارد
 مثال: دستگاه همگن زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -10 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{5}x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{1}{5}x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}a \\ x_2 = \frac{1}{5}a - 2b \end{cases}$$

چون $m=2$ و $n=4$ است بنابراین قطعاً $n-m=4-2=2$ مجهول آزاد وجود دارد.
 قضیه ۱: اگر x_2, x_1 دو جواب دستگاه غیر همگن $AX=B$ باشند آنگاه $x_1 - x_2$ و $x_2 - x_1$ جوابهایی برای دستگاه همگن $AX=0$ خواهند بود. بنابراین دستگاه غیر همگن $AX=B$ دارای یک جواب منحصر به فرد است اگر و فقط اگر دستگاه همگن $AX=0$ جواب منحصر به فرد داشته باشد.

نکته: هر عنصر R^n را یک بردار یک نقطه می نامیم

دستگاه همگن:

دستگاهی که ماتریس اعداد ثابت آن همگی صفر باشد همگن گویند به عنوان مثال $\begin{cases} 2x + 7y = 0 \\ 2x - 5y = 0 \end{cases}$ یک دستگاه

همگن است و $\begin{cases} 7x + 2y = 0 \\ 5x - 4y = 1 \end{cases}$ دستگاه غیر ممکن است.

نکته: همواره $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ یک جواب دستگاه همگن است. که جواب صفر موسوم به جواب بدیهی است.

استقلال و وابستگی خطی

مجموعه m بردار $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_m\}$ از عناصر فضای برداری R^n را مستقل خطی گویند.

اگر هیچ مجموعه ای از اعداد حقیقی $C_1, C_2, \dots, C_m$ بجز $C_1 = C_2 = \dots = C_m = 0$ وجود نداشته باشد به طوری که $C_1 \vec{V}_1 + C_2 \vec{V}_2 + \dots + C_m \vec{V}_m = 0$ به عبارتی مجموعه m بردار $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_m\}$ مستقل خطی است، اگر و فقط اگر جواب معادله $C_1 \vec{V}_1 + C_2 \vec{V}_2 + \dots + C_m \vec{V}_m = 0$ برای هر i ، $C_i = 0$ باشد در غیر این صورت این مجموعه را وابسته خطی می نامیم.

نکته: مجموعه بردارهای $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_x\}$ مستقل خطی است اگر و فقط اگر دترمینان ماتریس تشکیل شده از مجموعه بردارها مخالف صفر باشد. البته در صورتی که ماتریس مربع حاصل شود و دترمینان قابل محاسبه باشد بنابراین اگر ماتریس تشکیل شده از مجموعه بردارها A بنامیم اگر $|A| \neq 0$ باشد مستقل خطی و اگر $|A| = 0$ باشد مجموعه بردارها وابسته خطی می باشد.

مثال: آیا مجموعه بردارهای $\{(1, 2, 1), (3, 0, 0), (0, 0, 3)\}$ مستقل خطی است

چون ستون دوم برابر صفر است بنابراین دترمینان برابر صفر است و بردارها وابسته خطی هستند.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

مثال: آیا مجموعه بردارها $\{(1, 2, 1), (3, 0, 0), (0, 0, 2)\}$ مستقل خطی است

با استفاده از دستور ساروس

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (1 + 2 + 0) - (1 + 0 + 0) = 2 \neq 0$$

چون دترمینان مخالف صفر است مستقل خطی هستند

رتبه ماتریس:

فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. حداکثر تعداد سطرهای مستقل خطی ماتریس A را رتبه ماتریس A نامیده و با $r(A)$ نشان می دهیم و به عبارتی رتبه ماتریس A برابر با حداکثر تعداد بردارهای مستقل خطی در مجموعه $\{R_1, R_2, \dots, R_m\}$ است.

نکته ۱) رتبه ماتریس A برابر با تعداد سطرهای بزرگترین زیر ماتریس مربع A است که دترمینان آن ناصفر می باشد بنابراین در صورتی که دترمینان ماتریس A مخالف صفر باشد رتبه ماتریس برابر رتبه ماتریس است.

نکته ۲) با توجه به تعریف رتبه ماتریس یک روش برای تعیین رتبه ماتریس در صورتی که دترمینان A برابر صفر شود این است که ماتریس A را به ماتریس بالا مثلثی تبدیل کنیم در این صورت تعداد عناصر مخالف صفر روی قطر اصلی رتبه ماتریس است.

مثال: رتبه ماتریس زیر را تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = (1 + 8 + 6) - (-6 + 5 + 0) = 19 \neq 0$$

بنابراین رتبه ماتریس برابر ۳ است

مثال: رتبه ماتریس را تعیین کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (6 - 6 + 0) - (2 + 0 - 2) = 0$$

بنابراین رتبه ماتریس کمتر از ۳ است و تبدیل به ماتریس بالا مثلثی میکنیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 - R_1 \rightarrow R_3 \\ R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2}]{R_2 \leftarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

چون ماتریس برابر یک است چون تعداد عناصر روی قطر اصلی یکی است

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3 \\ R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2}]{R_2 \leftarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

خواص رتبه ماتریس

$$r(I_n) = n$$

(الف) رتبه ماتریس واحد برابر مرتبه ماتریس واحد است

$$r(A) = r(A^T)$$

(ب) رتبه ماتریس A با رتبه ترانپوز A برابر است یعنی

(پ) اگر A ماتریس $n \times n$ باشد اگر $|A| \neq 0$ باشد $r(A) = n$ و اگر $|A| = 0$ باشد $r(A) < n$ است.

(ت) رتبه حاصل ضرب دو ماتریس همواره نابیشتر از کوچکترین رتبه دو ماتریس است یعنی $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ است.

بررسی تعداد جوابهای دستگاه معادلات خطی $AX=B$ با توجه به مفهوم رتبه ماتریس اگر A ماتریس ضرایب دستگاه m معادله خطی n مجهولی باشد و $[A|B]$ ماتریس مرکب A و B باشد رتبه ماتریس مرکب $[A|B]$ را با $r(A|B)$ نشان می دهیم، داریم.

(الف) اگر $r(A|B) = r(A)$ باشد آنگاه دستگاه دارای حداقل یک جواب است.

(ب) اگر $r(A|B) = r(A) = n$ باشد آنگاه دستگاه دارای یک جواب منحصر به فرد است.

(پ) اگر $r(A|B) = r(A) < n$ آنگاه دستگاه دارای بینهایت جواب و مجموعه سطرهای ماتریس A وابسته خطی است ($|A| = 0$)

(ت) اگر $r(A|B) \neq r(A)$ آنگاه دستگاه جواب ندارد.

مثال: در مورد حل پذیری دستگاه معادلات خطی زیر تحقیق کنید.

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

ابتدا با استفاده از دستور ساروس دترمینان ماتریس ضرائب را بدست می آوریم

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (2 + 2 + (-1)) - (4 + (-2) + 1) = 5 \neq 0$$

بنابراین $r(A)=3$ است یا به صورت زیر $r(A)$ تعیین می کنیم برای سهولت در محاسبات جای سطر دوم و اول را عوض می کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_2 - R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - R_1 \rightarrow R_3 \end{smallmatrix}]{R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_2 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 3$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & +2 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_3 + R_1 \rightarrow R_3 \\ R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 \end{smallmatrix}]{R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & +2 & 2 & 2 \end{array} \right]$$

$$R_3 + 2R_2 \rightarrow R_3 \rightarrow R_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{array} \right] \quad r(A|B)=3$$

بنابراین $r(A|B) = r(A) = n = 3$ طبق قسمت (ب) دستگاه یک جواب منحصر به فرد دارد.

در مورد حل پذیری دستگاه زیر تحقیق کنید.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -4 \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 2 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_3 + 2R_1 \rightarrow R_3 \\ R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 \end{smallmatrix}]{R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$$

$$[A|B] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & -6 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 6 & 4 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 6 & 4 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_3 + 2R_1 \rightarrow R_3 \\ R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 \end{smallmatrix}]{R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 8 & -4 & 4 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_3 \leftarrow R_2 \\ R_2 \rightarrow R_2 \end{smallmatrix}]{R_3 \leftarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 8 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{array} \right] \Rightarrow r(A|B) = 3$$

بنابراین $r(A|B) \neq r(A)$ است و دستگاه جواب ندارد.

در مورد حل پذیری دستگاه معادلات خطی زیر تحقیق کنید.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -6 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & +2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 + 2R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - R_1 \rightarrow R_3}]{R_2 + 2R_1 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & +2 & -6 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & -6 & -6 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - R_1 \rightarrow R_3}]{R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

بنابراین $n = 3$ و $r(A) = r(A|B) = 2$ و دستگاه دارای بینهایت جواب است. $r(A|B) = 2$