

آمار و کاربرد آن در مدیریت ۱

جهت آزمون کارشناسی ارشد در گرایش های رشته مدیریت و حسابداری

شامل آموزش دروس

تستهای آمار رشته های مدیریت از سال ۱۳۹۸ الی ۱۴۰۲

مؤلف : علی زارعی

۶	مقدمه
۷	فصل اول
۸	آمار توصیفی
۸	تعریف آمار
۸	مقیاس ها
۱۰	فراوانی مطلق
۱۰	فراوانی تجمعی
۱۱	نمودارهای آماری
۱۴	معیارهای پراکندگی
۲۱	مراحل محاسبه میانه در جدول توزیع فراوانی
۲۳	محاسبه‌ی مد (نما)
۲۸	تبدیل‌های خطی
۲۸	تشخیص چولگی (کجی)
۳۱	فصل دوم
۳۲	تعریف احتمال
۳۳	اصول شمارش
۳۴	ترتیب
۳۴	ترکیب
۳۶	متمم یک پیشامد
۳۶	پیشامدهای ناسازگار
۳۶	پیشامدهای مستقل
۳۹	احتمال شرطی
۴۲	قضیه بیز (احتمال پسین)
۴۵	فصل سوم
۴۶	متغیرهای تصادفی و توزیع‌های احتمال
۴۶	تابع احتمال
۴۶	امید ریاضی
۵۳	توزیع‌های احتمال گسسته
۶۸	توابع چگالی پیوسته خاص
۷۰	توزیع نمایی
۷۱	تابع چگالی احتمال خی دو
۷۲	توزیع نرمال
۷۹	فصل چهارم

نمونه گیری.....	۸۰
روشهای نمونه گیری برآوردها.....	۸۰
مصاحبه ساختار یافته.....	۸۱
فصل پنجم.....	۸۵
توزیع های نمونه گیری.....	۸۶
توزیع دو جمله ای.....	۸۹
تقریب نرمال بر توزیع دو جمله ای.....	۸۹
توزیع نسبت:.....	۹۰
توزیع اختلاف میانگینها.....	۹۰
توزیع نمونه ای اختلاف بین میانگینهای دو جامعه نرمال مستقل وقتی واریانس جامعه معلوم باشد.....	۹۰
برآورد فاصله ای میانگین واقعی جامعه وقتی واریانس جامعه معلوم باشد.....	۹۱
چون حجم نمونه بیشتر از ۳۰ است از توزیع نرمال استفاده می کنیم.....	۹۳
برآورد فاصله ای یکطرفه.....	۹۳
برآورد فاصله ای نسبتها.....	۹۴
برآورد فاصله ای واریانس و انحراف معیار.....	۹۴
برآورد فاصله ای اختلاف میانگین دو جامعه نرمال مستقل وقتی واریانس جوامع معلوم باشد.....	۹۵
برآورد فاصله اختلاف میانگین دو جامعه نرمال مستقل وقتی واریانس جوامع نامعلوم باشد.....	۹۵
برآورد فاصله ای نسبت دو واریانس.....	۹۶
آزمون فرض های آماری.....	۹۹
آزمون فرض میانگین با مقدار ثابت از جامعه نرمال و واریانس جامعه معلوم باشد.....	۱۰۰
P_ مقدار (P-VALUE).....	۱۰۰
آزمون فرض میانگین با مقدار ثابت از جامعه نرمال وقتی واریانس جامعه نامعلوم باشد.....	۱۰۱
حجم نمونه بیشتر از ۳۰ باشد.....	۱۰۲
آزمون فرض نسبت.....	۱۰۳
آزمون فرض واریانس با مقدار ثابت.....	۱۰۴
آزمون فرض اختلاف میانگین دو جامعه نرمال مستقل وقتی واریانس جوامع معلوم باشد.....	۱۰۵
آزمون فرض اختلاف میانگین دو جامعه نرمال مستقل وقتی واریانس جوامع نامعلوم باشد.....	۱۰۵
مقایسه های زوج شده.....	۱۰۷
فصل ششم.....	۱۱۳
ضریب همبستگی.....	۱۱۴
ضریب تعیین.....	۱۱۴
رگرسیون خطی.....	۱۱۸
مراحل نوشتن معادله خط رگرسیون.....	۱۱۹
پیش فرض های رگرسیون.....	۱۲۱
متغیر تعدیل کننده.....	۱۲۹

ضریب رگرسیون تفکیکی استاندارد د شده	۱۲۹
فرض های رگرسیون چند متغیری	۱۳۸
محاسبات رگرسیون چند متغیری	۱۳۸
ضرایب استاندارد شده	۱۳۸
ضریب تعیین تعدیل شده	۱۳۸
آماره آزمون F	۱۳۹
انواع روش های ورود داده ها در رگرسیون	۱۳۹
رگرسیون سلسله مراتبی	۱۳۹
تحلیل مسیر	۱۳۹
فصل هفتم	۱۴۱
تحلیل واریانس	۱۴۲
تحلیل واریانس یک عامله	۱۴۲
تحلیل واریانس دو عامله یک مشاهده به ازای هر ترکیب (بدون تاثیر متقابل)	۱۴۴
تحلیل واریانس دو عامله یا m مشاهده به ازای هر ترکیب (طرح فاکتوریل)	۱۴۶
متغیر کنترل	۱۵۰
فصل هشتم	۱۵۱
ضریب توافقی C	۱۵۵
ضریب فی	۱۵۵
ضریب کریمر	۱۵۵
آزمون رتبه علامتدار	۱۵۹
آزمون مجموع رتبه ها	۱۶۰
آزمون مجموع رتبه ها آزمون H	۱۶۰
تجزیه و تحلیل فریدمن	۱۶۱
آزمون ردیف	۱۶۲
ضریب همبستگی رتبه ای اسپیرمن	۱۶۳
آزمون کولموگروف اسمیرنوف	۱۶۳
منابع	۱۶۶

مقدمه

با توجه به توسعه روز افزون علم و آشنایی با روش های آماری و محاسبات آماری از جمله نیازهای علوم تجربی است. این کتاب بر اساس تجربه ی سال ها تدریس در دروس مختلف جهت سهولت در درس آموزش آمار و کاربرد آن در مدیریت نوشته شده است. این مجموعه شامل تدریس کلیه مطالبی است که در سالهای متفاوت در آزمون های مختلف مطرح شده می باشد و با توضیح ساده هر مطلب درسی به همراه مثال های کاربردی و نکات مهم می باشد. در این اثر سعی شده است تا پاسخ هر مثال به صورت کاملاً ساده و روان بیان شود تا کلیه دانشجویانی که نیاز به منبعی در مورد آمار و کاربرد آن در مدیریت دارند بتوانند از مطالب آن استفاده کنند. خواهشمند است هر گونه پیشنهاد در مورد بهبود این کتاب را به اینجانب با شماره ۰۹۱۲۳۲۱۱۰۷۸ اطلاع دهید.

با تشکر

علی زارعی

فصل اول

آمار توصیفی

آمار توصیفی

تعریف آمار: آمار مجموعه‌ای از روش‌ها را برای جمع‌آوری و خلاصه کردن داده‌ها، طبقه‌بندی آن‌ها و روش‌های تحلیلی برای پیش‌بینی، برآورد و تصمیم‌گیری در شرایط مختلف ارائه می‌دهد.

تعریف آمار کاربردی: آمار کاربردی علم مستقلی است که موضوع آن را تهیه و تنظیم مفاهیم روش‌ها و الگوهای ریاضی مورد نیاز تشکیل می‌دهد. همچنین طرح مسئله جمع‌آوری داده‌های آماری، پردازش و استخراج آن‌ها، به منظور تعبیر و استنتاج علمی و عملی.

تعریف داده‌ها: داده‌ها واقعیت‌ها یا ارقامی هستند که می‌توان از آن‌ها نتایجی را بیرون کشید، در واقع داده‌ها مواد خام آماری هستند و داده‌هایی که برای مطالعه خاصی گردآوری شود مجموعه‌ی داده‌ها می‌نامیم.

تعریف مورد: اطلاعات مربوط به تمام متغیرها برای یک عنصر از مجموعه‌ی داده‌ها را یک مورد می‌نامیم.

تعریف عنصر: مجموعه‌ی داده‌ها، داده‌هایی درباره‌ی گردایه‌ای از عناصر فراهم می‌کند، و برای هر عنصر اطلاعات مربوط به یک یا چند مشخصه موردنظر را در بر دارد.

مشاهده: داده‌ی مربوط به یک عنصر از مجموعه داده‌ها درباره‌ی یک متغیر را یک مشاهده یا یک برآمد می‌نامند.

متغیر: مشخصه‌ی مربوط به یک عنصر، که می‌تواند برآمدهای مختلف را قبول می‌کند را متغیر می‌نامند (چیزی است که تغییر می‌کند) که بر دو نوع است.

۱- متغیر کیفی: وقتی برآمدها به صورت غیرعدد بیان شود متغیر کیفی می‌گوییم مانند گروه خونی و مهارت.

۲- متغیر کمی: وقتی برآمدها به صورت عددی بیان شود متغیر کمی می‌گوییم، که بر دو نوع است: پیوسته و گسسته است.

جامعه آماری: به همه‌ی افراد یا اشیایی که حداقل در یک خاصیت باهم مشترک باشند جامعه‌ی آماری می‌گویند و خاصیت یا خواصی که بین اعضای جامعه مشترک هستند صفت مشخصه نامیده می‌شوند. هر یک از اعضای جامعه را واحد جامعه یا فرد جامعه گویند و تعداد واحدهای تشکیل‌دهنده‌ی جامعه را حجم جامعه گویند و با حرف N نشان می‌دهیم اگر تعداد عناصر جامعه متناهی باشد جامعه را متناهی و در غیر این صورت جامعه را نامتناهی گویند.

نمونه: نمونه بخشی از جامعه تحت بررسی است به طوری که بتوان از آن نتایجی در مورد جامعه استخراج کرد و تعداد عناصر نمونه را اندازه‌ی نمونه گوئیم و با n نشان می‌دهیم.

مقیاس‌ها

۱- مقیاس اسمی: در اندازه‌گیری به طریق مقیاس اسمی از اعداد به منظور جدا کردن نمودها یا عناصر طبقات مختلف استفاده می‌شود اعدادی که به نتایج مشاهدات نسبت داده می‌شود در این اندازه‌گیری اعدادی که به عناصر نسبت داده می‌شود هیچ معنای کمی ندارند و نمی‌توان بر روی آن‌ها هیچ‌گونه محاسباتی ریاضی انجام داد. مثلاً به هریک از مردها عدد ۱ و به هریک از زن‌ها عدد ۲ را نسبت می‌دهیم. در این مقیاس فاصله و نسبت معنا ندارد.

۲- مقیاس ترتیبی یا مقیاس رتبه: در اندازه‌گیری با مقیاس ترتیبی از اعداد برای مقایسه عناصر از نظر کوچکتر یا بزرگتر یا برابر بودن استفاده می‌شود که براساس نتایج این مقایسه‌ها نیز عناصر جامعه طبقه‌بندی می‌شود. در این مقیاس فاصله و نسبت معنی ندارد.

۳- مقیاس فاصله‌ای: در اندازه‌گیری به شیوه‌ی مقیاس فاصله‌ای عناصر مورد اندازه‌گیری نه تنها از نظر ترتیب اندازه می‌توانند مقایسه شوند، بلکه بر حسب طول فاصله‌ها بین اندازه‌های عناصر نیز می‌توانند مقایسه و طبقه‌بندی گردند. در این مقیاس نیاز به وجود نقطه‌ی صفر یا واحد فاصله نیاز می‌باشد. در مواردی مانند هوش، حافظه، درجه حرارت و ... به کار می‌رود.

۴- مقیاس نسبی: این مقیاس زمانی که اعداد به دست آمده از اندازه‌گیری، از نظر ترتیب و فاصله بین دو مقدار دارای اهمیت هستند به کار می‌رود و هم وقتی که نسبت دو عدد به دست آمده از اندازه‌گیری‌ها دارای اهمیت باشد. این مقیاس برای امور کمی مانند وزن، طول، سطح، مقدار حرارت و ... به کار می‌رود و می‌توان چهار عمل اصلی را بر روی آن انجام داد.

مقیاس	ویژگی	عملیات مجاز آماری	عملیات مجاز ریاضی	مثال
اسمی گسسته است	گروه بندی افراد به طور یکسان، نشان میدهد که دو یا چند مختلف وجود دارد	شمارش فراوانی-نما(مد)	هیچ یک از چهار عمل اصلی	جنسیت
ترتیبی گسسته است	طبقات اندازه گیری شده میتوانند دارای ترتیب خاصی باشند	شمارش فراوانی-نما-میلنه-درصد-ضریب همبستگی رتبه ای اسپیرمن	هیچ یک از چهار عمل اصلی	طبقه اجتماعی و اقتصادی
فاصله ای پیوسته است	اندازه گیری منظم و با برقراری فاصله مساوی در مقیاس انجام میشود	فراوانی-نما-میلنه- میانگین-درصد-ضریب همبستگی رتبه ای-ضریب همبستگی گشتاوری پیرسن	جمع و تفریق مجاز است ضرب و تقسیم مجاز نیست	عملکرد در آزمون پیشرفت تحصیلی
نسبی پیوسته است	دارای صفر مطلق و فاصله مساوی عددی در مقیاس است	کلیه عملیاتهای آماری	کلیه عملیات	قد-سن-وزن

آمار توصیفی: شامل روش‌هایی است برای خلاصه کردن و رتبه‌بندی داده‌های موجود در مجموعه‌ای از داده‌ها محاسبه‌ی مشخصات عددی این مجموعه و نمایش داده‌ها در قالب نمودارها و شکل‌های مختلف به کار می‌رود.

آمار استنباطی: آمار استنباطی شامل روش‌هایی است که با استفاده از آن‌ها اطلاعات موجود در نمونه را به کل جامعه تعمیم می‌دهیم. مراحل انجام آمار استنباطی:

- ۱- شناسایی دقیق و روشن مسأله مورد نظر و جامعه‌ی وابسته به این مسأله است.
- ۲- جمع‌آوری داده‌ها که اغلب نمونه‌گیری صورت می‌گیرد برای کاهش هزینه‌ها
- ۳- تجزیه و تحلیل اطلاعات نمونه شامل رده‌بندی و خلاصه کردن مجموعه‌ی داده‌ها و رسم نمودارها و شکل‌ها
- ۴- استفاده از اطلاعات موجود در نمونه و تعمیم آن به جامعه

۵- ارائه پاسخی برای این سوال است که استنباط انجام شده چقدر مورد اطمینان است که قالب معیار عددی بیان می‌گردد.

پردازش داده‌های آماری: پردازش نتایج مشاهدات منظم کردن، طبقه‌بندی، تشکیل جداول، محاسبه سرجمع‌ها و مشخصه‌های عددی است.

فراوانی مطلق: تعداد عناصر را در هر گروه فراوانی مطلق گویند و با f_i نشان می‌دهیم که در این صورت

$$\sum_{i=1}^k f_i = N \text{ است.}$$

توزیع صفت متغیر: چگونگی تغییرات فراوانی‌ها را بر حسب تغییرپذیری صفت متغیر را منعکس می‌نماید.

توزیع فراوانی: وقتی مجموعه‌ی داده‌ها از تعداد زیادی تشکیل شده باشند داده‌ها را به نحوی طبقه‌بندی کرده و بر حسب فراوانی‌ها در جدولی تنظیم می‌کنیم این جدول را جدول توزیع فراوانی می‌نامند. تعریف فراوانی نسبی: فراوانی نسبی گروه i ام در جدول توزیع فراوانی‌ها سهم رده از مقادیر صفت متغیر را در کل جامعه نشان می‌دهد و از تقسیم فراوانی مطلق طبقه i ام به تعداد کل به دست می‌آید.

$p_i = \frac{f_i}{N}$ فراوانی نسبی و $\%p_i = \frac{f_i}{N} \times 100$ درصد فراوانی نسبی

$$\sum_{i=1}^k \frac{f_i}{N} = 1 \Rightarrow \sum p_i = 1 \quad \sum_{i=1}^k \frac{f_i}{N} \times 100 = 100 \Rightarrow \sum \%p_i = 100$$

مثال ۱: در جدول زیر فراوانی نسبی و درصد فراوانی نسبی را بدست آورید.

X_i	مقدار متغیر	فراوانی f_i	$p_i = \frac{f_i}{N}$ فراوانی نسبی	$\%p_i = \frac{f_i}{N} \times 100$ درصد فراوانی نسبی
۵		۳	$\frac{3}{25} = 0.12$	$\frac{3}{25} \times 100 = 12$
۸		۷	$\frac{7}{25} = 0.28$	$\frac{7}{25} \times 100 = 28$
۱۲		۶	$\frac{6}{25} = 0.24$	$\frac{6}{25} \times 100 = 24$
۱۵		۵	$\frac{5}{25} = 0.2$	$\frac{5}{25} \times 100 = 20$
۱۸		۳	$\frac{3}{25} = 0.12$	$\frac{3}{25} \times 100 = 12$
۲۰		۱	$\frac{1}{25} = 0.04$	$\frac{1}{25} \times 100 = 4$
		$n = 25$	$\sum_{i=1}^k \frac{f_i}{N} = 1$	$\sum_{i=1}^k \frac{f_i}{N} \times 100 = 100$

فراوانی تجمعی: فراوانی تجمعی هر گروه از صفت متغیر در جدول توزیع فراوانی برابر است با مجموع فراوانی مطلق همان گروه با فراوانی‌های مطلق گروه‌های ماقبل که با f_{Ci} یا Cf_i نشان می‌دهیم و نسبت فراوانی تجمعی هر طبقه به تعداد کل را فراوانی تجمعی نسبی گویند.

$$cF_i = \frac{f_{ci}}{N} \quad \text{درصد فراوانی تجمعی نسبی} \quad cF_i = \frac{cf_i}{N} \times 100$$

مقدار متغیر x_i	فراوانی f_i	فراوانی تجمعی cf_i	$cF_i = \frac{f_{ci}}{N}$	$\%cF_i = \frac{cf_i}{N} \times 100$
۵	۳	۳	$\frac{3}{25} = 0.12$	$\frac{3}{25} \times 100 = 12$
۸	۷	۱۰	$\frac{10}{25} = 0.4$	$\frac{10}{25} \times 100 = 40$
۱۲	۶	۱۶	$\frac{16}{25} = 0.64$	$\frac{16}{25} \times 100 = 64$
۱۵	۵	۲۱	$\frac{21}{25} = 0.84$	$\frac{21}{25} \times 100 = 84$
۱۸	۳	۲۴	$\frac{24}{25} = 0.96$	$\frac{24}{25} \times 100 = 96$
۲۰	۱	توجه ۲۵ $n = 25$	توجه ۱ $\frac{25}{25} = 1$	توجه ۱۰۰ $\frac{25}{25} \times 100 = 100$
	$n = 25$			

مراحل تشکیل جدول توزیع فراوانی‌های فاصله‌ای

$$R = X_{\max} - X_{\min} \quad \text{۱- دامنه تغییرات را به دست می‌آوریم. (R)}$$

$X_{\max}$: بزرگترین داده و $X_{\min}$: کوچکترین داده و R: دامنه تغییرات که فقط به بزرگترین و کوچکترین عدد وابسته است.

$$k = 1 + \frac{3}{22} \log N \quad \text{۲- تعداد طبقات را به دست می‌آوریم. (K)}$$

$$I = \frac{R}{K} \quad \text{۳- فاصله طبقات را به دست می‌آوریم.}$$

تعریف چگالی فراوانی: نسبت فراوانی گروه نام به فاصله همان گروه چگالی فراوانی گروه نام گویند.

$$Jf_i = \frac{f_i}{I_i}$$

نمودارهای آماری

۱- نمودار میله‌ای: در این نمودار محورهای افقی مقدار متغیر x_i و در محور y ها فراوانی مطلق f_i را قرار می‌دهیم و زوج‌ها را به صورت یک میله نمایش می‌دهیم.

۲- نمودار چندضلعی (چند گوش): در این نمودار کافی است نقاط به دست آمده از زوج‌های (x_i, f_i) را به هم وصل کنیم نمودار از چند گوش به دست می‌آید.

۳- نمودار هیستوگرام (بافت نگار): در این نمودار در محور افقی طول واقعی رده و در محور y ها فراوانی مطلق یا فراوانی نسبی یا چگالی فراوانی نسبی را قرار می‌دهیم در صورتی که در محور عمودی فراوانی مطلق را قرار دهیم مساحت زیر نمودار برابر N می‌شود و در صورتی که چگالی فراوانی نسبی یا در

صورت برابر بودن طول رده‌ها فراوانی نسبی را قرار دهیم مساحت زیر نمودار برابر ۱ می‌شود و در کلیه‌ی استاندارد مساحت زیر نمودار برابر است در صورتی که نقطه‌های وسط قاعده‌های بالایی مستطیل‌های به دست آمده را به هم وصل کنیم نمودار چندضلعی (چند بر) به دست می‌آید.

۴- نمودار دایره‌ای: برای نشان دادن نسبت گروه‌های مختلف در جامعه استفاده می‌شود که گروه‌های مختلف با قطاع‌ها مختلف نشان داده می‌شود که نسبت مساحت هر قطاع به سطح دایره نشان‌دهنده نسبت آن گروه در جامعه است. از دیدگاه مازلو نمودار دایره‌ای جهت بررسی تحلیل سلسله مراتب نیازها مناسب است

$$X_i: \text{زاویه ی قطاع} \quad \alpha_i = 360 \times (\text{فراوانی نسبی}) \quad \text{یا} \quad \alpha_i = \frac{360 \times f_i}{n}$$

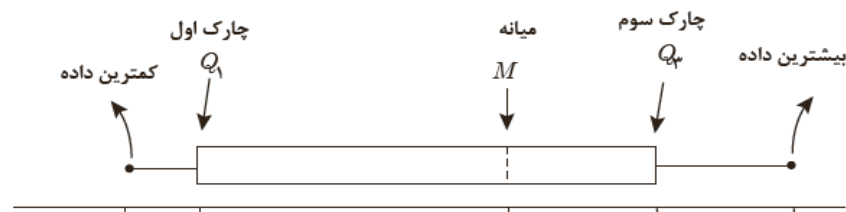
مثال: در جدول زیر زاویه مربوط به هر متغیر را محاسبه کنید.



مقدار متغیر X_i	فراوانی f_i	$\alpha_i = \frac{360 \times f_i}{n}$
۵	۲	$\alpha_1 = \frac{360 \times 2}{20} = 36$
۸	۶	$\alpha_2 = \frac{360 \times 6}{20} = 108$
۱۲	۸	$\alpha_3 = \frac{360 \times 8}{20} = 144$
۱۵	۴	$\alpha_4 = \frac{360 \times 4}{20} = 72$
	$n=20$	

۵- نمودار آجایو: اگر در محور X ها طول رده و در محور Y ها فراوانی یا تجمعی نسبی را قرار دهیم و با خطوط شکسته نقاط را به هم وصل کنیم نمودار آجایو به دست می‌آید.

نمودار جعبه‌ای: نموداری است که برای توصیف پراکندگی داده به کار می‌رود. در این نمودار از جعبه‌ای برای نمایش فاصله بین چارک اول و سوم استفاده می‌شود و خطی در داخل جعبه میانه (چارک دوم) را مشخص می‌کند.



نکته: در نمودار جعبه‌ای داده‌ای که خارج از محدوده زیر باشد داده پرت در نظر گرفته می‌شود

$$Q_1 - 1/5(Q_3 - Q_1) \leq x \leq Q_3 + 1/5(Q_3 - Q_1)$$

نمودار ساقه و برگ (تنه و شاخه): نمودار ساقه و برگ شبیه نمودار هیستوگرام است که برای داده های کمی بکار می رود تا به تصویر سازی برای شکل توزیع احتمال کمک می کند. یک نمودار ساقه و برگ ساده شامل دو ستون که با استفاده از یک خط عمومی جدا شده اند می شود. ستون سمت چپ ساقه ها و ستون سمت راست برگ ها را در بر می گیرد. ابتدا داده های حاصل از مشاهده را از کم به زیاد مرتب می کنند. برای نمونه داده های زیر مرتب شده اند. سپس باید تصمیم گرفت که کدام بخش از اعداد را ساقه و کدام بخش را برگ در نظر بگیریم. معمولاً آخرین رقم هر عدد را برگ، و همه رقم های باقی مانده را ساقه در نظر می گیرند. اگر داده ها عددهای خیلی بزرگی باشند ممکن است آن ها را تا حد معینی (مثلاً تا صدگان) گرد کنند. در نمونه بالا برگ ها را رقم یکان و ساقه را رقم دهگان در نظر می گیریم. در هنگام رسم، ساقه ها را (بدون پرش از روی عددها) در ستونشان می نویسیم و سپس برگ ها را در برابر ساقه خودشان و به ترتیب از کم به زیاد قرار می دهیم. نمودارهای ساقه و برگ برای نمایش چگالی نسبی و شکل داده ها مفید هستند و به خواننده یک دید سریع از توزیع می دهند. این نمودارهای بیشتر داده های عددی خام را حفظ می کنند. همچنین برای نمایش دادن داده پرت و یافتن مد کاربرد دارند.

به عنوان مثال نمودار شاخ و برگ اعداد زیر

۴۲ ۴۵ ۴۸ ۴۸ ۴۹ ۵۱ ۶۱ ۶۵ ۶۶ ۶۸ ۶۸ ۷۳ ۷۳ ۷۷ ۷۹ ۸۲ ۸۶ ۸۷ ۱۰۲

به صورت زیر است

```

۴ | ۲ ۵ ۸ ۸ ۹
۵ | ۱
۶ | ۱ ۵ ۶ ۸ ۸
۷ | ۳ ۳ ۷ ۹
۸ | ۲ ۶ ۷
۹ |
۱۰ | ۲

```

ارشد مدیریت ۱۴۰۰

۵۴- کدام نمودار، برای تحلیل سلسله مراتب نیازها براساس نظریه مازلو مناسب تر است؟

- (۱) جعبه ای
(۲) بافت نگار
(۳) دایره ای
(۴) شاخه و برگ

گزینه ۳ صحیح است

پارامترهای مرکزی

پارامترهای مرکزی عبارتند از: ۱- میانگین ۲- میانه و چندکها ۳- مد (نما)

۱- میانگین حسابی: حاصل جمع متغیرهای $X_1, X_2, \dots, X_n$ تقسیم بر تعداد آنها را میانگین حسابی گویند.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

میانگین نمونه میانگین جامعه

مثال: میانگین داده‌های $X_1=4, X_2=6, X_3=10, X_4=20$ را به دست آورید.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{4+6+10+20}{4} = 10$$

۲- میانه: مقدار صفتی است که حداقل از ۵٪ داده‌ها بزرگتر یا مساوی باشد و با Md نشان می‌دهیم. برای به دست آوردن میانه ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم که دو حالت امکان دارد رخ دهد.

الف) تعداد داده‌ها فرد باشد: در این صورت عدد وسط برابر میانه است.
مثال: میانه اعداد ۲ و ۳ و ۱ و ۶ و ۸ را به دست آورید.

ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم. $1, 2, 3, 6, 8 \Rightarrow Md = 3$

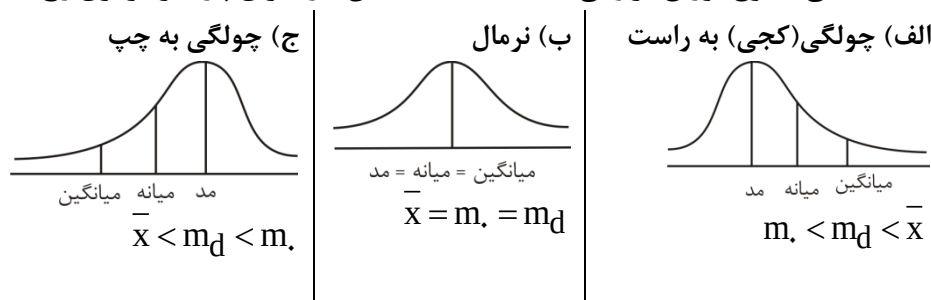
ب) تعداد داده‌ها زوج باشد: در این صورت پس از مرتب کردن دو عدد وسط را جمع کرده و بخش بر ۲ می‌کنیم.

مثال: میانه اعداد ۲ و ۱۰ و ۷ و ۶ و ۴ و ۸ را به دست آورید.

۲, ۴, ۶, ۷, ۸, ۱۰

$$Md = \frac{6+7}{2} = 6.5$$

نکته: بستگی به نوع توزیع فراوانی جامعه ۳ حالت امکان دارد برای پارامتر مرکزی رخ دهد.



نکته: اگر داده‌ها دارای چولگی یا کجی باشند میانه پارامترگرایش مرکز مناسبی است
نکته: در صورتی که توزیع قرینه نباشد و انحراف زیادی از حالت توزیع نرمال نداشته باشد

رابطه‌ی $\bar{X} - Mo = 3(\bar{X} - Md)$ برقرار است.

معیارهای پراکندگی:

- ۱- دامنه‌ی تغییرات (دامنه مقادیر)
- ۲- صدکها و چارکها و دهکها
- ۳- واریانس و انحراف معیار
- ۴- میانگین قدرمطلق انحرافها

۱- دامنه مقادیر: اختلاف بیشترین مقدار و کوچکترین مقدار را دامنه مقادیر گویند.

$$R = X_{\max} - X_{\min}$$

۲- صدک P : مقداری که درصد داده‌ها از آن کمتر باشد را صدک P می‌گویند و با H_p نمایش می‌دهیم. برای به دست آوردن صدک P به ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

(۱) داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

(۲) مقدار $i = \frac{P}{100} (n+1)$ را به دست می‌آوریم که قسمت صحیح را (r) و قسمت اعشاری را با (w) نشان می‌دهیم.

(۳) با استفاده از رابطه‌ی $H_p = (1-w)X_{(r)} + wX_{(r+1)}$ مقدار صدک را محاسبه می‌کنیم.

نکته: در صورتی که r عدد صحیح باشد $H_p = X_{(r)}$ است.

مثال: برای داده‌های ۲ و ۱۴ و ۳ و ۷ و ۹ و ۱۶ و ۱۸ صدک هفتادم را به دست آورید.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
۲	۳	۷	۹	۱۴	۱۶	۱۸

$$i = \frac{P}{100} (n+1) = \frac{70}{100} (7+1) = 5.6 \Rightarrow r = 5, w = 0.6$$

$$H_p = (1-w)x_{(r)} + wx_{(r+1)}$$

$$H_{70} = (1-0.6) \times 14 + 0.6 \times 16 = 5.6 + 9.6 = 15.2$$

تعریف چارک اول: مقداری که ۲۵ درصد داده‌ها از آن کمتر یا مساوی باشد و با Q_1 نشان می‌دهیم که همان صدک ۲۵ $(p_{25} = Q_1)$ است.

تعریف چارک دوم: مقداری که ۵۰ درصد داده‌ها از آن کمتر یا مساوی باشد و با Q_2 نشان می‌دهیم که همان صدک پنجاهام یا میانه است. $(P_{50} = Q_2 = Md)$

تعریف چارک سوم: مقداری که ۷۵ درصد داده‌ها از آن کمتر یا مساوی باشد و با Q_3 نشان می‌دهیم که همان صدک ۷۵ $(P_{75} = Q_3)$ است.

نکته: برای محاسبات دهک‌ها مانند صدک‌ها عمل می‌کنیم. یعنی عدد دهک را ده برابر کرده و شماره صدک تعیین می‌شود و براساس آن محاسبات را انجام می‌دهیم یعنی دهک چهارم برابر صدک چهارم است. $(D_4 = H_{40})$

نکته: برای محاسبه چارک‌ها ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم و میانه را محاسبه می‌کنیم. در نتیجه داده‌ها به دو قسمت تقسیم می‌شوند میانه نیمه اول (سمت چپ) می‌شود چارک اول و میانه نیمه دوم (سمت راست) می‌شود چارک سوم

مثال: برای اعداد ۱۰ و ۱۲ و ۱۵ و ۱۶ و ۱۹ و ۱۳ و ۱۱ و ۱۵ و ۱۴ و ۸ و ۶ و ۱۰ چارک سوم را بدست آورده و براساس آنها نمودار جعبه را رسم کنید.

ابتدا اعداد را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. ۱-۵-۶-۷-۸-۱۰-۱۱-۱۲-۱۳-۱۴-۱۵-۱۶-۱۹

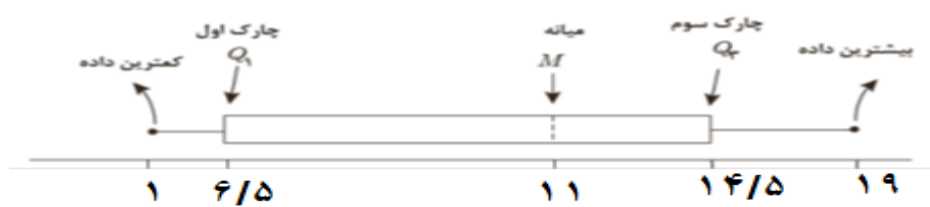
چون تعداد داده‌ها فرد است عدد وسط میانه است یعنی $Md = 11$

حال چارک اول میانه سمت راست است

$$Q_1 = \frac{6+7}{2} = 6.5$$

و چارک سوم میانه سمت راست است

$$Q_3 = \frac{14+15}{2} = 14.5$$



محاسبه چارکها از روی جدول توزیع فراوانی

$$Q_1 = L + \frac{\frac{n}{4} - Cf}{F} \times I$$

$$Q_3 = Md = L + \frac{\frac{3n}{4} - Cf}{F} \times I$$

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3n}{4} - Cf}{F} \times I$$

میان چارکی: متوسط چارک اول و سوم را میان چارکی می گویند.

انحراف چارکی $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

دامنه تغییر بین چارکها $= Q_3 - Q_1$

$$IQR = \frac{Q_3 + Q_1}{2}$$

میان چارکی: متوسط چارک اول و سوم را میان چارکی می گویند.

میانگین حسابی: مجموع داده ها بخش بر تعداد آنها را میانگین حسابی گویند.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \text{میانگین نمونه}$$

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} \quad \text{میانگین جامعه}$$

تعریف واریانس جامعه: مجموع مجذورات انحرافها از میانگین جامعه تقسیم بر تعداد جامعه را واریانس

جامعه گویند و با حرف σ^2 نشان می دهیم. و از روابط زیر به دست می آید.

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{N}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - N\mu^2}{N} \quad \text{یا} \quad \sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{N}}{N}$$

تعریف واریانس نمونه: مجموع مجذورات انحراف‌ها از میانگین نمونه تقسیم بر $n-1$ را واریانس نمونه گویند و با حرف S^2 نشان می‌دهیم و از روابط زیر به دست می‌آید.

$$S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad \text{یا} \quad S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1} \quad \text{یا} \quad S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

تعریف انحراف معیار: جذر واریانس را انحراف معیار گویند.

مثال: میانگین، واریانس و انحراف معیار نمونه ۱ و ۲ و ۴ و ۶ و ۸ و ۱۰ را به دست آورید.

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
۲	$2-6=-4$	$-4^2=16$
۴	$4-6=-2$	$-2^2=4$
۶	$6-6=0$	$0^2=0$
۸	$8-6=2$	$2^2=4$
۱۰	$10-6=4$	$4^2=16$
Σ	۳۰	۴۰

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{30}{5} = 6$$

$$S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{40}{5-1} = 10$$

$$S_X = \sqrt{S_X^2} = \sqrt{10} = 3.16$$

نکته ۱: $\sum (x_i - \bar{x}) = 0$

نکته ۲: $\sum |x_i - Md|$ حداقل یا $\min$ است

نکته ۳: از لحاظ ثبات $M_0 \leq Md \leq \bar{x}$ میانگین باثبات تر از میانه و میانه با ثباتر از مد است

مثال: در داده های مسئله قبل واریانس را بدست آورید

x_i	۴	۵	۶	۸	۱۰	۱۲	۴۵
x_i^2	۱۶	۲۵	۳۶	۶۴	۱۰۰	۱۴۴	۳۸۵

$$S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n}}{n-1} = \frac{385 - \frac{(45)^2}{6}}{6-1} = \frac{385 - 337.5}{5} = 7.91$$

نکته: در صورتی که کلیه اعداد باهم برابر باشد واریانس و انحراف معیار صفر می‌شود. به عبارتی هر چه اعداد به یکدیگر نزدیکتر باشند و پراکندگی اعداد کم باشد واریانس و انحراف معیار کوچکتر می‌شود.

ارشد مدیریت ۱۴۰۲

۵۰- اعضای یک جامعه آماری ۵ عضو عبارتند از: ۳، ۴، ۶، ۷ و $(2x-5)$. اگر میانگین این جامعه آماری ۷ باشد، واریانس این جامعه چقدر است؟

(۱) ۴

(۲) ۱۰

(۳) ۱۵

(۴) ۱۸

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \Rightarrow 7 = \frac{3+4+6+7+(2x-5)}{5} \Rightarrow 35 = 15 + 2x \Rightarrow 2x = 35 - 15$$

$$2x = 20 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow 2x - 5 = 2 \times 10 - 5 = 15$$

x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
۳	$3 - 7 = -4$	$-4^2 = 16$
۴	$4 - 7 = -3$	$-3^2 = 9$
۶	$6 - 7 = -1$	$-1^2 = 1$
۷	$7 - 7 = 0$	$0^2 = 0$
۱۵	$15 - 7 = 8$	$8^2 = 64$
Σ	۰	۹۰

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{90}{5} = 18$$

گزینه ۴ صحیح است

ارشد مدیریت ۹۹

۵۴- میانگین امید ریاضی نمونه‌گیری واریانس نمونه‌های دوتایی از جامعه‌ای شامل ۵، ۷، ۹، ۱۱، ۸ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۲/۵

(۳) ۴

(۴) ۵

x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
۵	$5 - 8 = -3$	$-3^2 = 9$
۷	$7 - 8 = -1$	$-1^2 = 1$
۸	$8 - 8 = 0$	$0^2 = 0$
۹	$9 - 8 = 1$	$1^2 = 1$
۱۱	$11 - 8 = 3$	$3^2 = 9$
Σ ۴۰	۰	۲۰

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{40}{5} = 8$$

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{20}{5-1} = 5$$

نکته: میانگین ترکیب چند نمونه از رابطه زیر بدست می آید.

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2 + \dots}{n_1 + n_2 + \dots}$$

مثال: اگر میانگین ۱۰ داده آماری برابر ۵ و میانگین ۲۰ داده آماری برابر ۱۰ میانگین کل بابر کدام است؟

گزینه ۴ صحیح است

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2} = \frac{10 \times 5 + 20 \times 10}{10 + 20} = \frac{250}{30} = 8 \frac{1}{3}$$

مثال: میانگین و واریانس و انحراف معیار نمونه ۱۰ و ۶ و ۸ و ۴ و ۳ را به دست آورید.

x_i	x_i^2
۳	۹
۴	۱۶
۶	۳۶
۸	۶۴
۱۰	۱۰۰
Σ	۳۱

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{31}{5} = 6 \frac{1}{5}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1} = \frac{225 - 5 \times 6 \frac{1}{5}^2}{5-1} = \frac{225 - 36}{4} = 46 \frac{1}{4}$$

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{46 \frac{1}{4}} = 6 \frac{1}{2}$$

مثال: واریانس اعداد ۴-۶-۸-۱۲-۱۰ را بدست آورید.

x_i	۴	۵	۶	۸	۱۰	۱۲	۴۵
x_i^2	۱۶	۲۵	۳۶	۶۴	۱۰۰	۱۴۴	۳۸۵

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n}}{n-1} = \frac{385 - \frac{(45)^2}{6}}{6-1} = \frac{385 - 337 \frac{1}{2}}{5} = 9 \frac{1}{2}$$

نکته: در صورتی که توزیع قرینه نباشد و انحراف زیادی از حالت توزیع نرمال نداشته باشد

رابطه $\bar{x} - M_o = 3(\bar{x} - M_d)$ برقرار است.

محاسبه میانگین، واریانس در جدول توزیع فراوانی

(۱) محاسبه میانگین

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{n} \quad \mu = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{N}$$

میانگین نمونه میانگین جامعه

۲- محاسبه واریانس جامعه

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \mu)^2}{N}, \quad \sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i^2 - N\mu^2}{N}, \quad \sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^k f_i x_i\right)^2}{N}}{N}$$

۳- محاسبه واریانس نمونه

$$S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}, S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}, S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^k f_i x_i)^2}{n}}{n-1}$$

۴- محاسبه‌ی انحراف معیار

$$S_X = \sqrt{S_X^2} \quad \text{انحراف معیار نمونه} \quad \sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} \quad \text{انحراف معیار جامعه}$$

نشان دسته: متوسط هر رده یا طبقه را نشان دسته یا نماینده رده گویند و با حرف m_i یا X_i نشان

$$m_i = x_i = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{می دهند.}$$

مثال: در جدول توزیع فراوانی زیر میانگین واریانس و انحراف معیار را به دست آورید.

(cL)	f_i حدود ردها	$x_i = \frac{x_1 + x_2}{2}$	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
۲-۴	۵	$\frac{2+4}{2} = 3$	$5 \times 3 = 15$	$5 \times 3^2 = 45$
۴-۶	۳	$\frac{4+6}{2} = 5$	$3 \times 5 = 15$	$3 \times 5^2 = 75$
۶-۸	۶	$\frac{6+8}{2} = 7$	$6 \times 7 = 42$	$6 \times 7^2 = 294$
۸-۱۰	۴	$\frac{8+10}{2} = 9$	$4 \times 9 = 36$	$4 \times 9^2 = 324$
۱۰-۱۲	۲	$\frac{10+12}{2} = 11$	$2 \times 11 = 22$	$2 \times 11^2 = 242$
	$n = 20$		۱۳۰	۹۸۰

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{n} = \frac{130}{20} = 6.5$$

$$S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1} = \frac{980 - 20 \times 6.5^2}{20-1} = 7/10.5$$

$$S_X = \sqrt{S_X^2} = \sqrt{7/10.5} = 2/665$$

مثال: بر اساس جدول فراوانی زیر میانگین و واریانس داده ها به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

x	۳	۲	۱	۰	-۱	-۲	-۳
فراوانی	۱۵	۲۰	۱۰	۵	۱۰	۲۰	۲۰
	$\frac{359}{64}, \frac{1}{8}$ (۱)	$\frac{359}{64}, \frac{7}{8}$ (۲)	$\frac{251}{64}, \frac{1}{8}$ (۳)	$\frac{251}{64}, \frac{7}{8}$ (۴)			
x_i	۳	۲	۱	۰	-۱	-۲	-۳
f_i	۱۵	۲۰	۱۰	۵	۱۰	۲۰	۲۰

$f_i X_i$	-۶۰	-۲۰	-۵	۱۰	۴۰	۴۵	۱۰
$f_i X_i^2$	۱۸۰	۴۰	۵	۱۰	۸۰	۱۳۵	۴۵۰

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i X_i}{n} = \frac{10}{80} = \frac{1}{8}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^k f_i X_i)^2}{n}}{N} = \frac{450 - \frac{10^2}{80}}{80} = \frac{450 \times 80 - 100}{80 \times 80} = \frac{35900}{6400} = \frac{359}{64}$$

گزینه ۱ صحیح است

ضریب تغییرات: برای مقایسه تغییرات صفت در دو یا چند جامعه با میانگین‌های مختلف استفاده

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{X}} \times 100 \text{ می‌شود.}$$

مراحل محاسبه میانه در جدول توزیع فراوانی

- ۱- ستون فراوانی تجمعی را تشکیل می‌دهیم.
- ۲- $\frac{n}{2}$ را محاسبه می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم بین کدام فراوانی‌های تجمعی قرار دارد و رده میانه را مشخص می‌کنیم.
- ۳- با استفاده از رابطه‌ی زیر میانه را محاسبه می‌کنیم.

$$Md = L + \frac{\frac{n}{2} - f_{Ci-1}}{f_m} \times I \quad \text{یا} \quad Md = L + \frac{\frac{n}{2} - f_{Ci-1}}{f_{Ci} - f_{Ci-1}} \times I$$

L : عرض رده میانه : حد پایین رده میانه f_{Ci} : فراوانی تجمعی رده میانه

f_m : فراوانی رده میانه f_{Ci-1} : فراوانی تجمعی رده ماقبل میانه

مثال: در جدول توزیع فراوانی زیر میانه را به دست آورید.

حدود طبقه	f_i	cf
۴-۸	۴	۴
۸-۱۲	۳	۷
۱۲-۱۶	۴	۱۱ ← رده میانه
۱۶-۲۰	۵	۱۶
۲۰-۲۴	۲	۱۸
	$n = 18$	

$$\frac{n}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$f_{Ci-1} \leftarrow 7 < 9 < 11 \rightarrow f_{Ci}$$

$$Md = L + \frac{\frac{n}{2} - f_{Ci-1}}{f_m} \times I$$

$$Md = 12 + \frac{18 - 7}{4} \times 4$$

$$Md = 14$$

نکته: در محاسبه‌ی صدک p ام به جای $\frac{n}{2}$ مقدار $\frac{pn}{100}$ را قرار می‌دهیم و مانند میانه محاسبه می‌کنیم.

نکته: در محاسبه‌ی دهک D ام به جای $\frac{n}{2}$ مقدار $\frac{n}{4}$ را قرار می‌دهیم و مانند میانه محاسبه می‌کنیم.
نکته: اگر نشان دسته مشخص شده باشد به اندازه‌ی نصف طول رده به نشان دسته اضافه و کم می‌کنیم تا حدود واقعی معلوم شود.

مثال: در جدول توزیع فراوانی زیر، میانه را به دست آورید.

x_i	f_i	حدود واقعی	
۳	۲	۲/۵ - ۳/۵	۲
۴	۴	۳/۵ - ۴/۵	۶
۵	۶	۴/۵ - ۵/۵	۱۲ ← رده میانه
۶	۵	۵/۵ - ۶/۵	۱۷
۷	۳	۶/۵ - ۷/۵	۲۰
	$n = ۲۰$		

$$I = ۴ - ۳ = ۱$$

$$\frac{I}{2} = \frac{۱}{2} = ۰/۵$$

$$\frac{n}{2} = \frac{۲۰}{2} = ۱۰$$

$$f_{Ci-1} \leftarrow ۶ < ۱۰ < ۱۲ \rightarrow f_{Ci}$$

$$Md = L + \frac{\frac{n}{2} - f_{Ci-1}}{f_m} \times I = ۴/۵ + \frac{۱۰ - ۶}{۶} \times ۱ = ۵/۱۶۷$$

ارشد مدیریت ۱۴۰۱

۵۵- میانه (چارک دوم) داده‌های طبقه‌بندی شده زیر کدام است؟

حدود طبقات	۵-۹	۱۰-۱۴	۱۵-۱۹	۲۰-۲۴
فراوانی	۳	۵	۸	۴

۱۶/۵ (۱)

۱۶/۲۵ (۲)

۱۶ (۳)

۱۵/۷۵ (۴)

حدود طبقات	f_i	حدود واقعی طبقات	f_{Ci}
۵-۹	۳	۴/۵ - ۹/۵	۳
۱۰-۱۴	۵	۹/۵ - ۱۴/۵	۸
۱۵-۱۹	۸	۱۴/۵ - ۱۹/۵	۱۶
۲۰-۲۴	۴	۱۹/۵ - ۲۴/۵	۲۰
	$n = ۲۰$		

$$I = ۱۰ - ۵ = ۵$$

$$\frac{I}{2} = \frac{۵}{2} = ۲/۵$$

$$\frac{n}{2} = \frac{۲۰}{2} = ۱۰$$

$$f_{Ci-1} \leftarrow ۸ < ۱۰ < ۱۶ \rightarrow f_{Ci}$$

$$Md = L + \frac{\frac{n}{2} - f_{Ci-1}}{f_{Ci} - f_{Ci-1}} \times I = ۱۴/۵ + \frac{۱۰ - ۸}{۱۶ - ۸} \times ۵ = ۱۵/۷۵$$

گزینه ۴ صحیح است

ارشد مدیریت ۱۳۹۹

۴۷- میانه ۱۰۰ داده ۳۰ است، در صورتی که فراوانی و فراوانی تجمعی طبقه‌ای که میانه در آن است به ترتیب ۳۰ و ۷۵ و فاصله طبقات ۱۲ باشد، حدود طبقه‌ای که میانه در آن قرار دارد کدام است؟

$$(۱) ۳۰-۴۲$$

$$(۲) ۲۸-۴۰$$

$$(۳) ۲۷-۳۹$$

$$(۴) ۲۵-۳۷$$

$$f_{ci} = 75 \quad f_{md} = 30 \quad n = 100 \quad Md = 30$$

$$f_{ci} = f_{md} + f_{ci-1} \Rightarrow f_{ci-1} = f_{ci} - f_{md} = 75 - 30 = 45$$

$$Md = L + \frac{\frac{n}{2} - f_{ci-1}}{f_{ci} - f_{ci-1}} \times I \Rightarrow 30 = L + \frac{\frac{100}{2} - 45}{75 - 45} \times 12 \Rightarrow 30 = L + \frac{5}{30} \times 12 \Rightarrow$$

$$30 = L + 2 \Rightarrow L = 30 - 2 = 28$$

$$\text{حد بالا} = L + I = 28 + 12 = 40$$

گزینه ۲ صحیح است

محاسبه‌ی مد (نما): در جدول توزیع فراوانی: ابتدا رده‌ای که بیشترین فراوانی را دارد به عنوان رده‌ی میانه در نظر می‌گیریم و با استفاده از رابطه‌ی زیر میانه را به دست می‌آوریم.

$$d_1 = f_i - f_{i-1} \quad f_i: \text{بیشترین فراوانی مطلق (رده‌ی مد)}$$

$$d_2 = f_i - f_{i+1} \quad f_{i-1}: \text{فراوانی رده‌ی قبل از رده‌ی مد}$$

$$f_{i+1}: \text{فراوانی رده‌ی بعد از رده‌ی مد}$$

$$M_o = L_{Mo} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times I_{Mo} \quad I_{Mo}: \text{طول رده‌ی مد}$$

$$L_{Mo}: \text{حد پایین رده‌ی مد}$$

مثال: در جدول زیر مد را محاسبه کنید.

فواصل طبقات	فراوانی
۱۰-۱۵	۳
۱۵-۲۰	۲
۲۰-۲۵	۶
۲۵-۳۰	۴
۳۰-۳۵	۵

$$d_1 = f_i - f_{i-1} = 6 - 2 = 4$$

$$d_2 = f_i - f_{i+1} = 6 - 4 = 2$$

$$I = 25 - 20 = 5$$

$$M_o = L_{Mo} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times I_{Mo}$$

$$M_o = 20 + \frac{4}{4+2} \times 5 = 23 \frac{1}{3}$$

ارشد مدیریت ۱۳۹۸

۴۶- در جدول فراوانی داده‌های پیوسته زیر، تفاضل میانگین از مد جامعه کدام است؟

حدود دسته	۸-۱۰	۱۰-۱۲	۱۲-۱۴	۱۴-۱۶	۱۶-۱۸
f	۲	۳	۶	۴	۱

(۱) ۰/۳۲۵

(۲) ۰/۴۲۵

(۳) ۰/۵۷۵

(۴) ۰/۶۲۵

(cL)	حدود ردهها f_i	$x_i = \frac{X_1 + X_2}{2}$	$f_i x_i$	
۸-۱۰	۲	$\frac{۸+۱۰}{۲} = ۹$	$۹ \times ۲ = ۱۸$	
۱۰-۱۲	۳	$\frac{۱۰+۱۲}{۲} = ۱۱$	$۳ \times ۱۱ = ۳۳$	
۱۲-۱۴	۶	$\frac{۱۲+۱۴}{۲} = ۱۳$	$۶ \times ۱۳ = ۷۸$	
۱۴-۱۶	۴	$\frac{۱۴+۱۶}{۲} = ۱۵$	$۴ \times ۱۵ = ۶۰$	
۱۶-۱۸	۱	$\frac{۱۶+۱۸}{۲} = ۱۷$	$۱ \times ۱۷ = ۱۷$	
Σ	$n = ۱۶$		۲۰۶	

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{n} = \frac{۲۰۶}{۱۶} = ۱۲/۸۷۵$$

حدود طبقه f_i		
۸-۱۰	۲	
۱۰-۱۲	۳	f_{i-1}
۱۲-۱۴	۶	f_i
۱۴-۱۶	۴	f_{i+1}
۱۶-۱۸	۱	
	$n = ۱۶$	

رده مد ←

$$d_1 = f_i - f_{i-1} = ۶ - ۳ = ۳$$

$$d_2 = f_i - f_{i+1} = ۶ - ۴ = ۲$$

$$I = ۲۵ - ۲۰ = ۵$$

$$Mo = L_{Mo} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times I_{Mo}$$

$$Mo = ۱۲ + \frac{۳}{۳+۲} \times ۵ = ۱۳/۲$$

$$Mo - \bar{x} = ۱۳/۲ - ۱۲/۸۷۵ = ۰/۳۲۵$$

گزینه ۱ صحیح است

ارشد مدیریت ۱۴۰۲

۵۱- به ازای چه مقدار a ، مُد (نما) برای جدول فراوانی زیر، $۱۳/۵$ خواهد بود؟

میانه	۴	۹	۱۴	۱۹	۴ (۱)
فراوانی	$a-۳$	$a-۲$	a	$۵-a$	۵ (۲)
					۶ (۳)
					۸ (۴)

x_i	f_i	حدود واقعی طبقات
۴	$a-۳$	$۱/۵ - ۶/۵$
۹	$a-۲$	$۶/۵ - ۱۱/۵$
۱۴	a	$۱۱/۵ - ۱۶/۵$
۱۹	$۵-a$	$۱۶/۵ - ۲۱/۵$

$$d_1 = f_i - f_{i-1} = a - (a-2) = 2$$

$$d_2 = f_i - f_{i+1} = a - (5-a) = 2a - 5$$

$$I = 9 - 4 = 5$$

$$Mo = L_{Mo} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times I_{Mo} \Rightarrow 13/5 = 11/5 + \frac{2}{2 + (2a - 5)} \times 5 \Rightarrow 2 = \frac{2}{2a - 3} \times 5$$

$$\Rightarrow 2a - 3 = 3 + 5 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = \frac{8}{2} = 4$$

گزینه ۱ صحیح است

روش کدگذاری برای محاسبه‌ی میانگین و واریانس

از این روش در مواقعی استفاده می‌شود که داده‌ها بزرگ یا خیلی کوچک باشند که دو حالت را بررسی می‌کنیم.

الف- تعداد داده‌ها فرد باشد. در این صورت به رده وسط کد صفر می‌دهیم. به سمت بالاتر -۱ و -۲ و ... و به سمت پایین کد +۱ و +۲ و ... می‌دهیم و میانگین و واریانس کدها را به دست می‌آوریم و براساس آن مقادیر واقعی را به دست می‌آوریم.

$$\bar{U} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i U_i}{n} \quad \bar{U}: \text{میانگین کدها}$$

$$S_U^2 = \frac{\sum f_i U_i^2 - f_i \bar{U}^2}{n-1} \quad S_U^2: \text{واریانس کدها}$$

$$S_U = \sqrt{S_U^2} \quad S_U: \text{انحراف معیار کدها}$$

$$\bar{X} = L\bar{U} + m \quad \bar{X}: \text{میانگین واقعی}$$

$$S_X = L S_U \quad S_X: \text{انحراف معیار واقعی}$$

$$S_X^2 = L^2 S_U^2 \quad S_X^2: \text{واریانس واقعی}$$

m : نشان دهنده‌ی کد صفر داده‌ایم.

مثال: میانگین واریانس و انحراف معیار را در جدول توزیع فراوانی زیر به روش کدگذاری به دست آورید.

مجموعه طبقه	f_i	U_i	$f_i U_i$	$f_i U_i^2$	m_i
۸۰۰-۱۲۰۰	۲	-۲	-۴	۸	۱۰۰۰
۱۲۰۰-۱۶۰۰	۳	-۱	-۳	۳	۱۴۰۰
۱۶۰۰-۲۰۰۰	۵	۰	۰	۰	۱۸۰۰
۲۰۰۰-۲۴۰۰	۴	+۱	۴	۴	۲۲۰۰
۲۴۰۰-۲۸۰۰	۶	+۲	۱۲	۲۴	۲۶۰۰
	۲۰		۹	۳۹	

$$\bar{U} = \frac{\sum f_i U_i}{n} = \frac{9}{20} = 0.45$$

$$S_U^2 = \frac{\sum f_i U_i^2 - n \bar{U}^2}{n-1} = \frac{39 - 20 \times 0.45^2}{20-1} = 1/839$$

$$S_U = \sqrt{S_U^2} = \sqrt{1/839} = 1/28.96$$

$$L = 1200 - 800 = 400$$

$$\bar{X} = L\bar{U} + m = 400 \times 0.45 + 1800 = 1980$$

$$S_X^2 = L^2 S_U^2 = 400^2 \times 1/839 = 194240$$

$$S_X = \sqrt{S_X^2} = \sqrt{194240} = 440.72$$

ب- تعداد رده‌ها زوج باشد. در این صورت دو رده‌ی وسط آن که دارای فراوانی بیشتر است کد صفر می‌دهیم و مانند حالت قبل عمل می‌کنیم.

مثال: میانگین واریانس را در جدول زیر به روش کدگذاری به دست آورید.

CL	f_i	U_i	$f_i U_i$	$f_i U_i^2$	m_i
۳۰۰-۴۰۰	۲	-۲	-۴	۸	۳۰۰
۴۰۰-۶۰۰	۳	-۱	-۳	۳	۵۰۰
۶۰۰-۸۰۰	۵	۰	۰	۰	۷۰۰
۸۰۰-۱۰۰۰	۴	۱	۴	۴	۹۰۰
	۱۴		-۳	۱۵	

$$\bar{U} = \frac{\sum f_i U_i}{n} = \frac{-3}{14} = -0.214$$

$$S_U^2 = \frac{\sum f_i U_i^2 - n \bar{U}^2}{n-1} = \frac{15 - 14 \times 0.214^2}{14-1}$$

$$S_U^2 = 1.025$$

$$L = 400 - 200 = 200$$

$$\bar{X} = L\bar{U} + m = 200 \times -0.214 + 700 = 657.2$$

$$S_X^2 = L^2 S_U^2 = 200^2 \times 1.025 = 41000$$

$$\bar{X}_G = \sqrt{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdot \dots \cdot x_k^{f_k}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^k x_i^{f_i}}$$

میانگین هندسی:

ارشد مدیریت ۱۳۹۹

۴۶- نرخ تورم در دو سال به ترتیب ۰/۴۰ و ۰/۹۰ است، میانگین نرخ تورم در این دو سال چقدر است؟

(۱) ۰/۳۶

(۲) ۰/۵۰

(۳) ۰/۶۰

(۴) ۰/۶۵

میانگین نرخ تورم با میانگین هندسی محاسبه می شود

$$\mu_G = \bar{X}_G = \sqrt{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdot \dots \cdot x_k^{f_k}} = \sqrt{0.4 \times 0.9} = \sqrt{0.36} = 0.6$$

گزینه ۳ صحیح است

$$\frac{n}{\bar{X}_H} = \frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \dots + \frac{f_k}{x_k} \Rightarrow \bar{X}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^k \frac{f_i}{x_i}}$$

میانگین هارمونیک (توافقی):

$$\mu_H \leq \mu_G \leq \mu_X \quad \text{یا} \quad \bar{X}_H \leq \bar{X}_G \leq \bar{X}$$

ارشد مدیریت ۱۴۰۰

۵۵- اگر میانگین حسابی (μ_X)، میانگین هارمونیک (μ_H) و میانگین هندسی (μ_G) باشد، کدام مورد درست است؟

$$\mu_X \leq \mu_H \leq \mu_G \quad (1)$$

$$\mu_X \leq \mu_G \leq \mu_H \quad (2)$$

$$\mu_G \leq \mu_H \leq \mu_X \quad (3)$$

$$\mu_H \leq \mu_G \leq \mu_X \quad (4)$$

گزینه ۴ صحیح است. چون $\mu_H \leq \mu_G \leq \mu_X$

ارشد مدیریت ۱۴۰۱

۵۴- اگر توزیع داده‌های مورد بررسی دارای چولگی منفی باشد، کدام شاخص مقدار کمتری خواهد داشت؟

(۲) میانگین هندسی

(۱) میانگین هارمونیک

(۴) مد

(۳) میانگین حسابی

گزینه ۱ صحیح است. چون $\bar{X}_H \leq \bar{X}_G \leq \bar{X}$

میانگین اصلاح شده: k تا از کوچکترین و k تا از بزرگترین داده‌ها را حذف می‌کنیم که انتخاب $K < \frac{n}{2}$

بستگی به داده‌هایی دارد که پرت به نظر می‌آید.

$$T_k = \frac{1}{n-2k} \sum_{i=k+1}^{n-k} x_i$$

T_k : میانگین اصلاح شده مرتبه k

میانگین نمونه پیراسته:

مشاهدات کوچکتر از چارک اول و بزرگتر از چارک سوم را حذف می‌کنیم و میانگین داده‌های بین چارک اول و سوم را محاسبه می‌کنیم.

میانگین وینزوری: به جای داده‌های کوچکتر از چارک اول مقدار چارک اول و به جای مقادیر بزرگتر از چارک سوم مقادیر چارک سوم را قرار می‌دهیم و میانگین داده‌ها را به دست می‌آوریم.

$$MAD = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k f_i |x_i - \bar{x}| \quad \text{متوسط قدر مطلق انحرافات از میانگین}$$

$$m_r = \frac{\sum f_i (x - \bar{x})^r}{n} \quad \text{گشتاور مرتبه r ام}$$

$$m_1 = \frac{\sum f_i (x - \bar{x})}{n} = 0, \quad m_2 = \sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

تبدیل‌های خطی: در صورتی که کلیه مقادیر x_i تبدیل خطی $y_i = ax_i + b$ صورت گیرد در این صورت میانگین واریانس و انحراف معیار داده‌های جدید به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\bar{y} = a\bar{x} + b \quad \text{و} \quad S_y^2 = a^2 S_x^2 \quad \text{و} \quad S_y = |a| S_x$$

مثال: اگر واریانس نمره ریاضی ۶۴ باشد و از هر نفر ۲ نمره کم شود در این صورت انحراف معیار کدام است؟

$$128 \quad (4) \quad 64 \quad (3) \quad 8 \quad (2) \quad 32 \quad (1)$$

گزینه ۲ صحیح است چون مقدار ثابت اگر اضافه یا کم شود در واریانس و انحراف معیار تاثیر ندارد

$$\sigma^2 = 64 \Rightarrow \sigma = \sqrt{64} = 8$$

ارشد مدیریت ۱۴۰۰

۵۶- اگر میانگین و انحراف معیار متغیر x برابر ۵ و ۲ و میانگین و انحراف معیار متغیر y برابر ۱۵ و ۴ باشد در صورتی که رابطه بین این دو متغیر به صورت $y = ax + b$ باشد مقدار a , b چقدر است؟

$$a = 2, b = 5 \quad (2) \quad a = 1, b = 10 \quad (1)$$

$$a = 4, b = -5 \quad (4) \quad a = -1, b = 20 \quad (3)$$

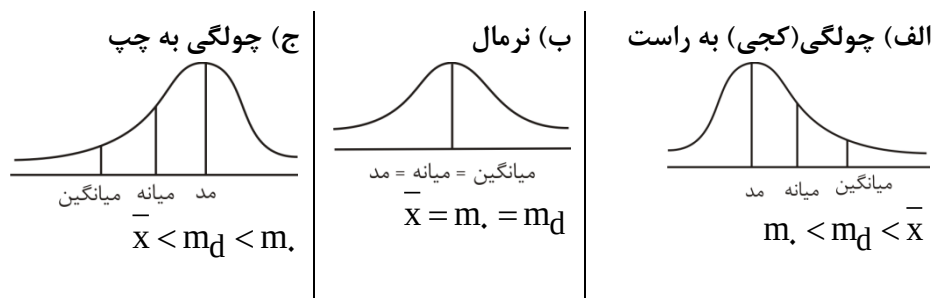
$$E(x) = \bar{x} = 5, \sigma_x = 2, E(y) = \bar{y} = 15, \sigma_y = 4$$

$$\sigma_y = |a| \cdot \sigma_x \Rightarrow 4 = |a| \times 2 \Rightarrow |a| = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

$$E(y) = \bar{y} = a\bar{x} + b \Rightarrow 15 = 2 \times 5 + b \Rightarrow b = 15 - 10 = 5$$

گزینه ۲ صحیح است

تشخیص چولگی (کجی)



در صورتی که هر یک از ضرایب به دست آمده منفی باشد یعنی چولگی چپ و اگر مثبت باشد یعنی چولگی راست. و برابر صفر یعنی متقارن یا نرمال

$$SK = \frac{\bar{x} - m_0}{S} = \begin{cases} SK < 0 & \text{چوله به چپ} \\ SK = 0 & \text{مقارن} \\ SK > 0 & \text{چوله به راست} \end{cases}$$

براساس گشتاورها هم مانند قبل نتیجه گیری میکنیم یعنی در صورتی که هر یک از ضرایب به دست آمده منفی باشد یعنی چولگی چپ و اگر مثبت باشد یعنی چولگی راست و برابر صفر یعنی متقارن یا نرمال

$$SK = \frac{m_3}{S^3} = \begin{cases} SK < 0 & \text{چوله به چپ} \\ SK = 0 & \text{مقارن} \\ SK > 0 & \text{چوله به راست} \end{cases}$$

$$SX_Q = \frac{(X_{Q_3} - X_{Q_2}) - (X_{Q_3} - X_{Q_1})}{X_{Q_3} - Q_1}$$

$$SX_Q = \frac{(p_{90} - p_{50}) - (p_{50} - p_{10})}{p_{90} - p_{10}}$$

ارشد مدیریت ۱۳۹۹

۴۸- در ۳۰ داده آماری با میانگین ۱۲/۵ که از چولگی معقولی برخوردار است، مقادیر $\sum x_i = ۳۶۰$ و

$\sum x_i^2 = ۴۸۰۰$ محاسبه شده است. ضریب چولگی کدام است؟

(۱) -۰/۳۷۵

(۲) ۰/۳۷۵

(۳) -۰/۱۲۵

(۴) ۰/۱۲۵

$$\mu = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{۳۶۰}{۳۰} = ۱۲$$

$$\bar{X} - Mo = ۳(\bar{X} - M_d) \Rightarrow ۱۲ - Mo = ۳(۱۲ - ۱۲/۵) \Rightarrow ۱۲ - Mo = -۱/۵$$

$$Mo = ۱۲ + ۱/۵ = ۱۳/۵$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - N\mu^2}{N} = \frac{۴۸۰۰ - ۳ \times ۱۲^2}{۳۰} = \frac{۴۸۰۰ - ۴۳۲۰}{۳۰} = \frac{۴۸۰}{۳۰} = ۱۶ \Rightarrow \sigma = ۴$$

$$SK = \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma} = \frac{۱۲/۵ - ۱۳/۵}{۴} = -۰/۳۷۵$$

گزینه ۱ صحیح است

ارشد مدیریت ۱۴۰۲

۴۹- چنانچه توزیع داده‌ها دارای چولگی به سمت راست باشد، کدام شاخص مقدار بیشتری خواهد داشت؟

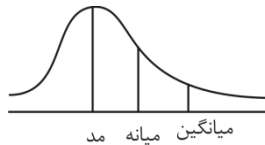
(۱) مَد (نما)

(۲) میانگین هندسی

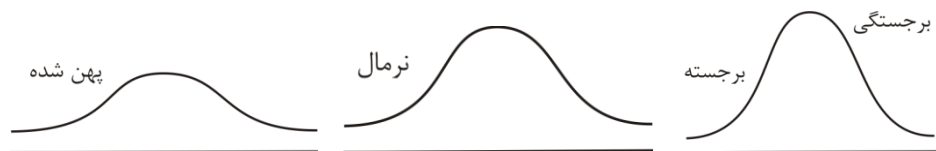
(۳) میانگین حسابی

(۴) میانگین هارمونیک

گزینه ۱ صحیح است

در چولگی (کجی) به راست $m_d < \bar{x}$

کشیدگی (برجستگی): در صورتی که هر یک از ضرایب به دست آمده منفی باشد یعنی پهن تر از نرمال و اگر مثبت باشد یعنی بلندتر از نرمال و برابر صفر یعنی متقارن یا نرمال



$$m_r = \frac{\sum (x - \mu)^r}{N} \quad \text{و} \quad m_4 = \frac{\sum (x - \mu)^4}{N} \quad \text{و} \quad m_2 = \frac{\sum (x - \mu)^2}{N} \quad \text{گشتاورهای مرکزی}$$

m_2 : گشتاور مرتبه دوم یا واریانس m_4 : گشتاور مرتبه چهارم m_r : گشتاور مرتبه rام

$$k = \frac{m_4}{m_2^2} - 3 \quad \text{یا} \quad k = \frac{m_4}{s^4} - 3 \Rightarrow \begin{cases} k < 0 & \text{پهن تر} \\ k = 0 & \text{نرمال} \\ k > 0 & \text{برجسته} \end{cases}$$

ارشد مدیریت ۹۸

۴۸- در یک توزیع فراوانی تعداد مشاهدات ۳۰ با میانگین ۲۵ و ضریب تغییرات برابر ۰/۱۶ است، اگر

$$\sum (x - 25)^4 = 24960 \quad \text{باشد، ضریب کشیدگی کدام است؟}$$

(۴) صفر

(۳) ۰/۰۸

(۲) ۰/۲۵

(۱) ۰/۱۵

$$N = 30, \quad \mu = 25, \quad cv = 0.16, \quad \sum (x - 25)^4$$

$$\left. \begin{aligned} m_4 &= \frac{\sum (x - 25)^4}{N} = \frac{24960}{30} = 832 \\ cv &= \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow \sigma = \bar{x} \cdot cv = 25 \times 0.16 = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow k = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{832}{4^2} - 3 = 3/25 - 3 = 0.12$$

گزینه ۲ درست است

فصل دوم

احتمال

تعریف احتمال: نسبت تعداد حالات مساعد به تعداد کل حالات را احتمال گویند.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} \quad \text{پایه یوسد ت} \quad P(A) = \frac{S(A)}{S(s)} \quad \text{گسسد ت}$$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

آزمایش تصادفی: حادثه یا عملی است که نتیجه آن را از قبل نمی دانیم و قابل مشاهده است.

فضای نمونه: به مجموعه تمام نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه گویند و با حرف s نشان می دهیم.

$$S = \{H, T\} \quad \text{پرتاب یک سکه} \quad n(s) = 2^1$$

$$S = \{HH, HT, TH, TT\} \quad \text{پرتاب دو سکه} \quad n(s) = 2^2$$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{پرتاب یک تاس} \quad n(s) = 6$$

$$S = \{H, TH, TTH, TTTH, \dots\} \quad \text{فضای نمونه انتظار آمدن شیر}$$

بنابراین تعداد فضای نمونه در پرتاب آزمایشهایی که دو حالت دارد مانند پرتاب سکه 2^n و برای پرتاب

تاس 6^n است. به طور کلی در صورت نا اریب بودن (احتمال وقوع کل حالات یکسان باشد)

$$n(s) = (\text{تعداد حالات یک آزمایش})^n$$

پیشامد: زیرمجموعه ای از فضای نمونه را پیشامد گویند و اغلب با حرف بزرگ نشان می دهند.

مثال: احتمال آنکه در پرتاب دو تاس مجموع اعداد ظاهر شده برابر ۷ باشد بدست آورید.

$$n(s) = 6^n = 6^2 = 36 \quad A = \{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

مثال: دو تاس را پرتاب می کنیم احتمال اینکه مجموع اعداد به دست آمده کوچکتر مساوی ۳ باشد چقدر است؟

$$\frac{1}{12} \quad (1) \quad \frac{3}{6} \quad (2) \quad \frac{2}{12} \quad (3) \quad \frac{2}{36} \quad (3)$$

گزینه ۳ درست است

$$n(s) = 6^2 = 36, \quad A = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2)\} \Rightarrow n(A) = 3$$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

اصول شمارش:

۱- اصل جمع: هرگاه عمل A به m طریق و عمل به n طریق انجام پذیرد عمل A یا B به $m+n$ طریق امکان پذیر است.

مثال: شخصی برای رفتن به محل کار توسط دو خط سواری و ۳ خط اتوبوس رانی می تواند انتخاب کند این شخص به چند طریق می تواند وسیله نقلیه انتخاب کند.

جواب: شخص یا باید سواری شود یا اتوبوس بنابراین $m+n=2+3=5$

۲- اصل ضرب: هرگاه عمل A به m طریق و عمل B به n طریق انجام پذیرد عمل A و B به $m \times n$ طریق امکان پذیر است.

مثال: برای رفتن به شهر A توسط ۴ وسیله نقلیه و از شهر A به شهر B توسط ۵ وسیله نقلیه می توان رفت برای رفتن به شهر B چند نوع وسیله نقلیه می توان انتخاب کرد؟

جواب: شخص ابتدا به شهر A رفته و از آنجا به شهر B می رود بنابراین: $m \times n = 4 \times 5 = 20$

مثال: به چند طریق می توان ۵ کتاب را در ۵ قفسه قرار داد؟

۵	۴	۳	۲	۱
---	---	---	---	---

جواب:

$$\Rightarrow 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$$

مثال: چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام وجود دارد

$$1000 \text{ (۴)} \quad 900 \text{ (۳)} \quad 720 \text{ (۲)} \quad 648 \text{ (۱)}$$

$$9 \times 9 \times 8 = 648 \quad \text{گزینه ۱ صحیح است}$$

مثال: در صورت مجاز نبودن تکرار ارقام با اعداد ۹-۸-۷-۶-۵ چند عدد چهار رقمی میتوان نوشت؟

$$220 \text{ (۴)} \quad 120 \text{ (۳)} \quad 80 \text{ (۲)} \quad 60 \text{ (۱)}$$

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120 \quad \text{گزینه ۳ صحیح است}$$

ارشد مدیریت ۱۳۹۸

۵۸- با ارقام ۵، ۵، ۳، ۲ و ۲ چند عدد پنج رقمی بخش پذیر بر ۵ می توان نوشت؟

$$108 \text{ (۴)} \quad 72 \text{ (۳)} \quad 84 \text{ (۲)} \quad 60 \text{ (۱)}$$

۵	۴	۳	۲	۱
---	---	---	---	---

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120 \div 2 = 60$$

گزینه ۱ صحیح است

جایگشت: تعداد حالاتی که n شیء می تواند در کنار یکدیگر قرار گیرد را جایگشت n شیء گویند و از رابطه $n!$ بدست می آید.

جایگشت حلقوی: قرار گرفتن n در کنار یکدیگر مانند میزگرد را جایگشت حلقوی گویند و از رابطه $(n-1)!$ بدست می آید.

مثال: به چند ۱۰ نفر می توانند کنار یکدیگر مانند میزگرد بنشینند به طوری که

الف) فرقی بین افراد نباشد ب) پیرترین شخص و جوان ترین شخص کنار هم باشند.

$$\text{الف)} \quad (n-1)! = (10-1) = 9!$$

$$\text{ب)} \quad \text{دو نفر کنار هم یک نفر حساب می شود که با هم جابجا می شوند} \quad (9-1)! \times 2! = 8! \times 2!$$

مثال: ۴ کتاب ریاضی، ۳ کتاب فیزیک، ۵ کتاب ادبیات را می توان کنار هم چید به طوری که

الف) فرقی بین کتابها نباشد ب) کتابهای هم عنوان کنار هم باشند

$$\text{الف)} \quad (4+3+5)! = 12! \quad \text{ب)} \quad 4! \times 3! \times 5! \times 3!$$

ترتیب: تعداد جایگشتهای r تایی از میان n شیء را ترتیب r شیء از n شیء گویند در صورتی که جای

$$\text{اعضاء اهمیت داشته باشد و با نماد } P_r^n \text{ نشان می دهیم و رابطه } P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ بدست می آید.}$$

یادآوری:

$$\begin{aligned} 0! &= 1, 1! = 1 \\ n! &= n(n-1)! \\ n! &= n(n-1)(n-2) \dots (n-n)! \end{aligned}$$

مثال: در یک هیئت مدیره ده نفری به چند طریق می توان مدیر عامل و حسابدار و رئیس هیئت مدیره انتخاب کرد.

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 720$$

ترکیب: قرار r شیء از n شیء در کنار یکدیگر را ترکیب r شیء از n شیء گویند در صورتی که جای اعضاء

$$\text{اهمیت نداشته باشد و با نماد } \binom{n}{r} \text{ یا } C_r^n \text{ نشان می دهیم و از رابطه } C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ بدست می آید.}$$

مثال: تعداد زیرمجموعه های ۳ عضوی یک مجموع ۵ عضوی را بدست آورید:

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = 10 \quad \text{جای اعضا اهمیت ندارد}$$

تعمیم ترکیب: تعداد جایگشتهای n شیء که n_1 تایی آن از یک نوع و n_2 تایی آن از نوع دوم... n_k تایی آن

از نوع k ام است به طوری که $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ باشد در این صورت تعداد جایگشت‌های ممکن برابر است با

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

مثال: به چند طریق می‌توان ۱۸ دانشجو را در کلاسی که ردیف اول آن ۴ صندلی و ردیف دوم ۶ صندلی و ردیف سوم آن ۸ صندلی دارد نشانند.

$$\binom{18}{4, 6, 8} = \frac{18!}{4! \times 6! \times 8!}$$

مثال: شخصی ۵ شلوار، ۴ کت و ۳ جفت کفش دارد به چند طریق می‌توان ۳ شلوار، ۲ کت و ۲ جفت کفش انتخاب کرد؟

$$\binom{5}{3} \binom{4}{2} \binom{3}{2} = \frac{5!}{3!(5-3)!} \times \frac{4!}{2!(4-2)!} \times \frac{3!}{2!(3-2)!} = 180$$

جایگشت با تکرار: هرگاه n شیء k بار تکرار شود تعداد جایگشت از رابطه n^k بدست می‌آید.

مثال: با اعداد صفر تا ۹ چند شماره تلفن ۶ رقمی بدون کد می‌توان نوشت؟

جواب: صفر رقم اول نمی‌تواند باشد.

۹	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰
---	----	----	----	----	----

 $\Rightarrow 9 \times 10^5$

توزیع n توپ در k ظرف

نتیجه توزیع n توپ در k ظرف را می‌توان به صورت بردار $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ نمایش داد به طوری که $X_1 + X_2 + \dots + X_k = n$ می‌باشد که به تعداد $\binom{n+k-1}{n}$ بردار k عضوی $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ با عناصر صحیح غیر منفی $X_i \geq 0$ وجود دارد.

مثال: به چند طریق می‌توان ۸ تخته سیاه یکسان را بین ۴ مدرسه تقسیم کرد.

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 8, X_i \geq 0 \Rightarrow \binom{8+4-1}{8} = \binom{11}{8} = \frac{11!}{8!(11-8)!} = 165$$

نکته ۱: به تعداد $\binom{n-1}{x-1}$ بردار k عنصری $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ با عناصر صحیح مثبت X_i با شرط $X_i > 0$ وجود دارد.

مثال: به چند طریق می‌توان ۸ تخته سیاه یکسان بین ۴ مدرسه تقسیم کرد به گونه‌ای که حداقل یک تخته سیاه به هر مدرسه داده شود.

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 8, X_i > 0 \Rightarrow \binom{8-1}{4-1} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$$

نکته ۲: به تعداد $\binom{n+k}{n}$ جواب غیر منفی و صحیح برای نامساوی $x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq n$ وجود دارد.

نکته ۳: هرگاه بخواهیم n توپ را بین k ظرف توزیع کنیم تعداد حالات ممکن k^n است.

مثال: اگر بخواهیم ۸ معلم را بین ۴ مدرسه تقسیم تعداد حالات ممکن را بدست آوریم.

جواب: چون هر معلم می تواند هر یک از مدارس را انتخاب کند.

$$k^n = 4^8$$

ارشد مدیریت ۱۴۰۲

۵۲- یک سرمایه گذار ۱۰ واحد سرمایه دارد که قصد دارد آن را به ۵ سهم مختلف اختصاص دهد. مقدار سرمایه اختصاص یافته به سهم شماره k برابر x_k واحد ($0 \leq x_k \leq 10$) و عددی صحیح است. همه ۱۰ واحد باید سرمایه گذاری شود و سرمایه اختصاص یافته به هیچ دو سهمی، با یکدیگر برابر نیست. چند روش برای اختصاص سرمایه به سهم ها وجود دارد؟

(۱) ۸۰

(۲) ۱۲۰

(۳) ۸۰۰

(۴) ۱۲۰۰

نحوه توزیع سهم ها بین سهامداران به صورت زیر است. که بین پنج نفر توزیع می شود

۴	۳	۲	۱	۰
---	---	---	---	---

$$n! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$

گزینه ۲ صحیح است

متمم یک پیشامد: مجموعه نقاطی که در فضای نمونه ای S قرار دارند ولی در پیشامد A وجود ندارند. و با نماد $P(A')$ یا $P(\bar{A})$ نشان می دهیم و از رابطه $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ بدست می آید.

پیشامدهای ناسازگار: دو پیشامد A و B را مستقل گویند اگر با هم رخ ندهند به عبارتی با هم اشتراکی نداشته باشند. $P(A \cap B) = P(\phi) = 0$

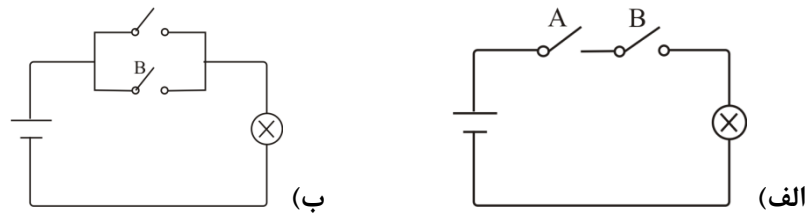
پیشامدهای مستقل: دو پیشامد A و B را مستقل گویند اگر وقوع یا عدم وقوع یکی تأثیری بر وقوع پیشامد دیگر نداشته باشد. شرط آن که دو پیشامد A و B مستقل باشند آن است که

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

اجتماع دو پیشامد: اجتماع پیشامدهای A و B شامل نقاطی است که در A یا در B یا در هر دوی آنها وجود داشته باشد

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال: کلید A با احتمال ۹۰٪ و کلید B با احتمال ۸۰٪ درست عمل می کند در هر یک از شکلهای زیر احتمال آنکه لامپ روشن شود را بدست آورید.



(الف) چون کلیدها مستقل از یکدیگر هستند و برای روشن شدن لامپ هر دو کلید باید متصل باشد بنابراین

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0/9 \times 0/8 = 0/72$$

(ب) چون برای روشن شدن لامپ کافی یکی از کلیدها وصل باشد بنابراین

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/9 + 0/8 - 0/72 = 0/98$$

ارشد مدیریت ۱۳۹۹

۴۹- ۴۰٪ افراد در جامعه‌ای علاقمند به داشتن شغل‌های دولتی هستند. ۵۵٪ افراد نیز تحصیلات کمتر از کارشناسی دارند. ۱۰٪ افراد علاقمند به داشتن شغل‌های دولتی هستند و تحصیلات کمتر از کارشناسی دارند. فردی از جامعه را انتخاب می‌نماییم، احتمال این‌که این فرد علاقمند به شغل غیردولتی باشد و تحصیلات بیش از کارشناسی داشته باشد، چند درصد است؟

۱۵ (۱)

۴۵ (۲)

۶۰ (۳)

۸۵ (۴)

$$p(A) = 0/4 \quad P(B) = 0/55 \quad P(A \cap B) = 0/1$$

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/4 + 0/55 - 0/1 = 0/85$$

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0/85 = 0/15$$

گزینه ۱ صحیح است

ارشد مدیریت ۱۳۹۹

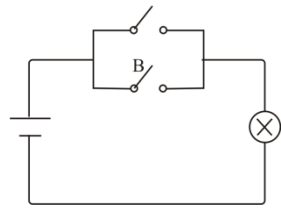
۵۰- سیستمی از دو مدار تشکیل شده است که احتمال کار نکردن هر مدار ۲/۰ است. اگر این دو مدار یک‌بار به صورت سری و یک بار به صورت موازی بسته شوند، در هر حالت (سری و موازی) احتمال کار کردن کل مدار کدام است؟

(۱) (۰/۹۶ و ۰/۶۴)

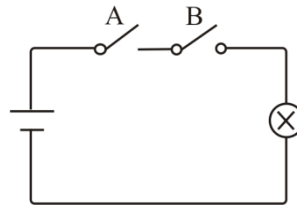
(۲) (۰/۶۴ و ۰/۹۶)

(۳) در هر دو حالت ۰/۶۴

(۴) در هر دو حالت ۰/۹۶



(موازی)



(سری)

الف) چون کلیدها مستقل از یکدیگر هستند و برای درست عمل کردن سیستم هر دو کلید باید متصل باشد بنابراین

$$P(A') = 1 - P(A) \Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - 0.8 = 0.2$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.8 \times 0.8 = 0.64$$

ب) چون برای درست عمل کردن سیستم کافی یکی از کلیدها وصل باشد بنابراین

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.8 + 0.8 - 0.64 = 0.96$$

$$(سری و موازی) \equiv (0.64, 0.96)$$

گزینه ۲ صحیح است

احتمال شرطی: در صورتی که بدانیم پیشامد B رخ داده است و بخواهیم احتمال رخ دادن پیشامد A را بدست آوریم با نماد $P(A|B)$ نشان می‌دهیم و از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

مثال: در کیسه‌ای ۶ مهره سفید و ۴ مهره سیاه ریخته‌ایم اگر دو مهره و بدون جایگذاری خارج کنیم احتمالهای زیر را بدست آورید:

الف) دو مهره هم رنگ باشد

ب) دو مهره غیر هم رنگ باشد

الف)

$$P(\text{اولی سفید/دومی سفید}) + P(\text{اولی سیاه/دومی سیاه}) \cdot P(\text{اولی سیاه}) = P(\text{دو مهره هم رنگ})$$

$$P(\text{دو مهره هم رنگ}) = P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) + P(W_1) \cdot P(W_2|W_1)$$

$$P(\text{دو مهره هم رنگ}) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{42}{90}$$

$$P(\text{غیر هم رنگ}) = 1 - P(\text{هم رنگ}) = 1 - \frac{42}{90} = \frac{48}{90} \quad \text{ب)}$$

مثال: یک کیسه شامل ۵ مهره سفید ۱۰ مهره سبز و ۵ مهره بنفش است. سه مهره به تصادف یک به یک و بدون جایگذاری از این کیسه خارج می‌کنیم احتمال این که مهره اول و سوم سبز باشد کدام است؟

$$\frac{15}{38} \quad (4)$$

$$\frac{13}{38} \quad (3)$$

$$\frac{5}{38} \quad (2)$$

$$\frac{9}{38} \quad (1)$$

$$p(A) = \frac{10}{20} \times \frac{5}{19} \times \frac{9}{18} + \frac{10}{20} \times \frac{5}{19} \times \frac{9}{18} = \frac{5 \times 9}{19 \times 18} = \frac{5}{38}$$

گزینه ۲ صحیح است

احتمال شرطی: در صورتی که بدانیم پیشامد B رخ داده است و بخواهیم احتمال رخ دادن پیشامد A را بدست آوریم با نماد $P(A|B)$ نشان می دهیم و از رابطه زیر بدست می آید:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

مثال: در صورتی که A و B مستقل باشند $P(A|B)$ و $P(B|A)$ را بدست آورید.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

مثال: در جدول زیر تعیین کنید.

الف) احتمال بیمار ب) احتمال سیگاری و سالم

ج) در صورتی که فرد بیمار باشد چقدر احتمال دارد سیگاری باشد

	سالم	بیمار
سیگاری	۶	۴۷
غیر سیگاری	۳۹	۸

جواب

جدول احتمال			
	سالم (A)	بیمار (B)	جمع
سیگاری (D)	۰/۰۶	۴۷٪	۵۳٪
غیر سیگاری (C)	۳۹٪	۰٪/۰۸	۴۷٪
جمع	۴۵٪	۵۵٪	۱

$$\text{الف) } P(B) = 0/47 + 0/08 = 0/55$$

$$\text{ب) } P(A \cap C) = 0/06$$

$$\text{ج) } P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{0/47}{0/55} = 0/854$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B) \quad \text{نکته:}$$

مثال: در کیسه‌ای ۶ مهره سفید و ۴ مهره سیاه ریخته‌ایم اگر دو مهره و بدون جایگذاری خارج کنیم احتمالهای زیر را بدست آورید:

الف) دو مهره هم رنگ باشد

ب) دو مهره غیر هم رنگ باشد

الف) (اولی سفید/دومی سفید). (اولی سفید) + P(اولی سیاه/دومی سیاه). P(اولی سیاه) = P(دو مهره هم رنگ) P

$$P(\text{دو مهره هم رنگ}) = P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) + P(W_1) \cdot P(W_2|W_1)$$

$$P(\text{دو مهره هم رنگ}) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{42}{90}$$

$$P(\text{غیر هم رنگ}) = 1 - P(\text{هم رنگ}) = 1 - \frac{42}{90} = \frac{48}{90} \quad \text{ب)}$$

ارشد مدیریت ۱۴۰۰

۵۷- اگر $P(A) = \frac{1}{5}$ و $P(A' \cap B) = \frac{1}{3}$ باشد، مقدار $P(B|A')$ چقدر است؟

$$\frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\frac{2}{5} \quad (2)$$

$$\frac{5}{12} \quad (3)$$

$$\frac{4}{35} \quad (4)$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$P(B|A') = \frac{P(A' \cap B)}{P(A')} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{12}$$

گزینه ۳ صحیح است

ارشد مدیریت ۱۴۰۱

۵۷- اگر $P(A) = \frac{1}{4}$ و $P(B) = \frac{1}{2}$ و $P(A|B) = \frac{1}{4}$ باشد، آنگاه $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ کدام است؟

$$\frac{21}{20} \quad (1)$$

$$\frac{19}{20} \quad (2)$$

$$\frac{7}{8} \quad (3)$$

$$\frac{6}{8} \quad (4)$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(A \cap B)'$$

طبق قوانین دموگان

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B).P(A|B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

گزینه ۳ صحیح است

ارشد مدیریت ۱۴۰۲

۵۳- سه فرد A، B و C در آزمونی شرکت کرده‌اند. اگر یک نفر از این سه نفر در آزمون قبول شود، احتمال اینکه آن

فرد B نباشد، $\frac{3}{4}$ است. در صورتی که احتمال قبولی فرد A و C در این آزمون به ترتیب $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{3}$ باشد، احتمال

قبولی B در این آزمون، کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\frac{2}{7} \quad (2)$$

$$\frac{4}{7} \quad (3)$$

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

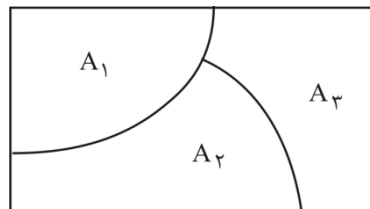
$$P(A) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad P(C) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

چون باید حتما فقط یک نفر از سه نفر پذیرفته شود بنابر این شرط آنکه فرد B پذیرفته شود آن است که فرد A و C پذیرفته نشوند.

$$p(B) + P(\bar{A} \cap \bar{C}) = 1 \Rightarrow p(B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{C}) = 1 - P(\bar{A}).P(\bar{C}) = 1 - \left(\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{4}$$

گزینه ۴ صحیح است

قضیه بیز (احتمال پسین): اگر پیشامدهای $A_1, A_2, \dots, A_k$ افزای از فضای نمونه‌ای S را تشکیل دهند و $P(A_i) \neq 0$ آنگاه برای هر پیشامد B در S با احتمال مثبت به ازای $i = 1, 2, \dots, k$ داریم:



$$P(A_i) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^k P(A_i) \cdot P(B|A_i)}$$

مثال: در کارگاهی کالایی توسط سه دستگاه A_1 و A_2 و A_3 با احتمالهای ۲۰٪ و ۳۰٪ و ۵۰٪ تولید می‌شود که به ترتیب احتمال تولید کالای معیوب توسط هر دستگاه به ترتیب ۴٪ و ۲٪ و ۱٪ است احتمالهای زیر را تعیین کنید.

الف) کالای خریداری شده معیوب باشد

ب) در صورتی که کالای خریداری شده معیوب باشد چقدر احتمال دارد توسط دستگاه A_3 تولید شده باشد.

جواب:

$$\begin{aligned} P(A_1) &= 0.2 & P(E|A_1) &= 4\% \\ P(A_2) &= 0.3 & P(E|A_2) &= 2\% \\ P(A_3) &= 0.5 & P(E|A_3) &= 1\% \end{aligned}$$

$$\text{الف) } P(E) = \sum P(A_i) \cdot P(E|A_i) = 0.2 \times 0.04 + 0.3 \times 0.02 + 0.5 \times 0.01 = 0.019$$

$$\text{ب) } P(A_2|E) = \frac{P(A_2) \cdot P(E|A_2)}{\sum_{i=1}^3 P(A_i) \cdot P(E|A_i)} = \frac{0.3 \times 0.02}{0.019} = \frac{6}{19}$$

ارشد مدیریت ۱۳۹۹

۵۱- ۶۰ درصد حساب‌های یک شرکت توسط حسابدار اول و مابقی توسط حسابدار دوم در طی یک سال بررسی شده‌اند. اگر یک درصد حساب‌های بررسی شده حسابدار اول و ۲ درصد حساب‌های بررسی شده توسط حسابدار دوم اشتباهی بررسی شده باشند، احتمال آن که یکی از حساب‌ها انتخابی درست بررسی شده باشد، چقدر است؟

(۱) ۰/۲۴۰

(۲) ۰/۹۷۴

(۳) ۰/۹۸۶

(۴) ۰/۹۹۲

$$P(A) = 0.6$$

$$P(E|A) = 0.1$$

$$P(B) = 0.4$$

$$P(E|B) = 0.2$$

$$P(E) = P(A) \times P(E|A) + P(B) \times P(E|B) = 0.6 \times 0.1 + 0.4 \times 0.2 = 0.14$$

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - 0.14 = 0.86$$

گزینه ۳ صحیح است

ارشد مدیریت ۱۴۰۲

۵۴- توزیع احتمال مشترک دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است. اگر احتمال وقوع C به شرط A برابر ۰/۲۵ باشد، احتمال وقوع C کدام است؟

X \ Y	C D	
	C	D
A		
B	۰/۲	۰/۶

(۱) ۰/۵

(۲) ۰/۴

(۳) ۰/۲

(۴) ۰/۱

x \ y	C	D	جمع
A	۰/۱	۰/۳	$P(A) = 0.4$
B	۰/۴	۰/۲	$P(B) = 0.6$
جمع	$P(C) = 0.5$	$P(D) = 0.5$	۱

$$P(A) = 1 - P(B) = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$P(C|A) = 0.25 \Rightarrow P(C|A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap C) = P(A) \times P(C|A)$$

$$\Rightarrow P(A \cap C) = 0.25 \times P(A) = 0.25 \times 0.4 = 0.1$$

گزینه ۱ صحیح است

روابط مهم:

$$B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$$

$$۱) P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$۲) P(A_1 \cup A_2 \cup \dots | B) = \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} + \dots$$

$$۳) P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})$$

$$۴) P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$$

$$۵) P(A \cup B) = P(A) + P(B) + P(B - A)$$

$$۶) P(B) = P(A \cap B) + P(B - A)$$

احتمال پیشین: احتمالهایی که مبنای شهودی دارند و با تغییر شخص همراه است را احتمال پیشین گویند.

احتمال پسین: احتمال وقوع پیشامد A احتمال پیشین در نظر بگیریم و سپس رخ دادن پیشامد B به شرط رخ دادن پیشامد A را بخواهیم که دقیقتر از احتمال پیشین است را احتمال پسین گویند و با استفاده از قضیه بیز بدست می آید.

$$P(B|A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum P(A_i) \cdot P(B|A_i)}$$

فصل سوم

متغیرهای تصادفی

متغیرهای تصادفی و توزیع‌های احتمال

متغیر تصادفی: متغیری است که مقدار عددی آن به وسیله برآمد یک آزمایش تصادفی مشخص می‌شود و با حروف بزرگ نشان می‌دهیم متغیرهای تصادفی به دو گروه گسسته و پیوسته تقسیم‌بندی می‌شوند:

متغیر تصادفی گسسته: متغیرهایی هستند که اعداد صحیح را اختیار می‌کنند.

متغیر تصادفی پیوسته: متغیرهایی هستند که اعداد حقیقی را اختیار می‌کنند.

تابع احتمال (تابع توزیع احتمال): تابع $p(x)$ وقتی یک تابع احتمال است که دارای دو شرط زیر باشد:

$$0 \leq P(x) \leq 1 \quad (1)$$

$$\sum_x p(x) = 1 \quad (2) \text{ در حالت گسسته}$$

امید ریاضی (x): مقدار مورد انتظار متغیر x را امید ریاضی گویند که به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\mu_x = E(x) = \sum_x xp(x)$$

واریانس متغیر تصادفی x :

$$\text{var}(x) = \sigma^2_x = E[(x - E(x))^2] = E(x^2) - E(x)^2$$

$$E(x^2) = \sum x^2 p(x)$$

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma^2_x}$$

انحراف معیار متغیر تصادفی x :

روابط مهم:

$$E(ax + b) = aE(x) + b$$

$$E(g(x) + h(x)) = E(g(x)) + E(h(x))$$

$$\text{Var}(ax + b) = a^2 \text{Var}(x) \Rightarrow \sigma_{ax+b} = |a| \sigma_x$$

مثال: الف) مقدار k را طوری تعیین کنید که تابع احتمال باشد.

ب) میانگین، واریانس و انحراف معیار تصادفی x را بدست آورید.

x	-1	0	1	2
$P(x)$	$2K$	k	$3K$	$4K$

$$\sum_x P(x) = 1 \Rightarrow 2k + k + 3k + 4k = 1 \Rightarrow 10k = 1 \Rightarrow k = 0.1$$

جواب:

x	-1	0	1	2
$P(x)$	0/2	0/1	0/3	0/4

$$\text{ب) } \mu_X = E(x) = \sum_x xP(x) = -1 \times 0/2 + 0 \times 0/1 + 1 \times 0/3 + 2 \times 0/4 = 0/9$$

$$E(x^2) = \sum_x x^2 P(x) = (-1)^2 \times 0/2 + 0^2 \times 0/1 + 1^2 \times 0/3 + 2^2 \times 0/4 = 2/1$$

$$\sigma_X^2 = E(x^2) - [E(x)]^2 = 2/1 - 0/9^2 = 1/29$$

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{1/29} = 1/135$$

تابع توزیع: تابع توزیع متغیر تصادفی X ، احتمال این را که متغیر تصادفی از یک مقدار حقیقی x احتمال این را که متغیر تصادفی از یک مقدار حقیقی X کوچکتر یا مساوی باشد را نشان می‌دهد.

$$F_X(x) = P(x \leq x) = \sum_{t \leq x} P(t)$$

$$P(a < x \leq b) = F_X(b) - F_X(a) \quad \text{نکته:}$$

مثال: در مسئله قبل تابع توزیع را بدست آورید.

x	-1	0	1	2
$F_X(x)$	0/2	0/3	0/6	1

تابع مواد گشتاور: با استفاده از تابع مولد گشتاور می‌توان میانگین و واریانس را بدست آورد.

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_x P(x) e^{tx}$$

$$\left[\frac{dM_X(t)}{dt} \right]_{t=0} = M'_X(\cdot) = \mu = E(x)$$

$$\left[\frac{d^2 M_X(t)}{dt^2} \right]_{t=0} = M''_X(\cdot) = E(x^2)$$

$$\left[\frac{d^r M_X(t)}{dt^r} \right]_{t=0} = E(x_r)$$

$$\text{var}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

روابط تابع مولد گشتاور

$$M_{x+b}(t) = e^{bt} M_x(t)$$

$$M_{ax}(t) = M_x(at)$$

$$M_{ax+b}(t) = e^{bt} M_x(at)$$

ارشد مدیریت ۱۴۰۱

۵۸- اگر توزیع X به صورت زیر باشد، واریانس آن چقدر است؟

x	۱	۲	۳	۴
$f(x)$	۰٫۳۵	۰٫۴	۰٫۱۵	۰٫۱

(۱) ۲

(۲) ۱٫۲۵

(۳) ۱٫۱۵

(۴) ۰٫۹

$$\mu_x = E(x) = \sum_x xP(x) = 1 \times 0.35 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.15 + 4 \times 0.1 = 0.7$$

$$E(x^2) = \sum_x x^2 P(x) = 1^2 \times 0.35 + 2^2 \times 0.4 + 3^2 \times 0.15 + 4^2 \times 0.1 = 1.9$$

$$\text{var}(x) = \sigma_x^2 = E(x^2) - [E(x)]^2 = 1.9 - 0.7^2 = 0.9$$

گزینه ۴ صحیح است

قضیه چبیشف: اگر میانگین و انحراف معیار متغیر تصادفی X به ترتیب μ و σ باشند. در این صورت به ازایهر ثابت $k > 0$ حداقل احتمال آنکه X در بازه $(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma)$ حول میانگین بیفتد برابر $\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ است

یعنی:

$$P(|x - \mu| < k\sigma) = P(-k\sigma < x - \mu < +k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

مثال: حداقل احتمال اینکه متغیر تصادفی X به فاصله کمتر از 2σ از میانگین باشد را بدست آورید.

$$P(|x - \mu| < k\sigma) = 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{3}{4} = 0.75$$

ارشد مدیریت ۱۴۰۲

۵۷- کمپوت‌های تولیدشده در یک کارخانه دارای میانگین ۲۴۰ و واریانس ۴ گرم است. طبق قانون چوبی-شف، وزن حداقل ۷۵ درصد کمپوت‌های تولیدشده، در کدام بازه قرار دارد؟

$$(1) (232, 248)$$

$$(2) (236, 244)$$

$$(3) (238, 242)$$

$$(4) (234, 246)$$

$$P(|x - \mu| < k\sigma) = P(-k\sigma < x - \mu < +k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$1 - \frac{1}{k^2} = 0.75 \Rightarrow \frac{1}{k^2} = 1 - 0.75 = 0.25 \Rightarrow k^2 = \frac{1}{0.25} = \frac{1.00}{0.25} = 4 \Rightarrow k = 2$$

$$|x - \mu| < k\sigma = -k\sigma < x - \mu < +k\sigma \Rightarrow \mu - k\sigma < x < \mu + k\sigma$$

$$x : \mu \pm ks \Rightarrow x : 240 \pm 2 \times 2 = 240 \pm 4 \Rightarrow 236 \leq \mu \leq 244$$

گزینه ۲ صحیح است

توزیع احتمال توأم دو متغیر تصافی گسسته

شرط آن که یک تابع دو متغیره یک احتمال توأم باشد آن است که

$$P(x, y) \geq 0$$

$$\sum_x \sum_y P(x, y) = 1$$

که در این صورت

$$P_x(x) = P(x=x) = \sum_y P(x, y), E(x) = \sum_x xP(x)$$

$$P_y(y) = P(y=y) = \sum_x P(x, y), E(y) = \sum_y yP(y)$$

$$E(x) = \sum_x xP(x), E(x^2) = \sum_x x^2 P(x), \text{var}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$E(y) = \sum_y yP(y), E(y^2) = \sum_y y^2 P(y), \text{var}(y) = E(y^2) - [E(y)]^2$$

کوواریانس (x, y) : معیاری است برای تعیین ارتباط بین دو متغیر x و y که اگر مثبت باشد دو متغیر هم سو هستند و در غیر این صورت مختلف‌الجهت هستند یعنی با افزایش یک متغیر دیگر کاهش می‌یابد.

$$\text{cov}(x, y) = E[(x - E(x))(y - E(y))] = E(xy) - E(x)E(y)$$

$$E(xy) = \sum_x \sum_y xyP(x, y)$$

ضریب همبستگی: معیاری است برای تعیین ارتباط بین دو متغیر x و y که اگر مثبت باشد دو متغیر هم سو هستند یعنی با افزایش یکی دیگری نیز افزایش می‌یابد و در غیر این صورت مختلف جهت هستند یعنی با افزایش یک متغیر دیگری کاهش می‌یابد ضریب همبستگی واحد ندارد و به واحدهای دو متغیر بستگی ندارد.

$$\rho = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

شرط استقلال دو متغیر: $P(x, y) = P(x).P(y)$ که در این صورت $\text{cov}(x, y) = 0$ است و خلاف آن همیشه صادق نیست.

روابط مهم:

$$E(ax + by) = aE(x) + bE(y)$$

$$\text{var}(ax + by) = a^2 \text{var}(x) + b^2 \text{var}(y) + 2ab \text{cov}(x, y)$$

$$\text{cov}(ax + by) = ab \text{cov}(x, y)$$

$$\rho(ax + by) = \frac{ab}{|ab|} \rho(x, y)$$

$$P_x(x|y) = \frac{P(x, y)}{P_y(y)}, \quad P_y(y|x) = \frac{P(x, y)}{P_x(x)}$$

$$\text{var}\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{var}(x_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \text{cov}(x_i, x_j)$$

$$i < j$$

$$E(x|y=y) = \sum_x x p(x|y), \quad E(y|x=x) = \sum_y y p(y|x)$$

مثال: توزیع احتمال توأم دو x و y به صورت زیر است تعیین کنید

۱- توزیع حاشیه‌ای x و y ۴- ضریب همبستگی x و y

۲- میانگین، واریانس و انحراف معیار x و y ۵- واریانس $3x - 2y$

۳- کوواریانس x و y ۶- آیا دو متغیر x و y مستقلند

۷- احتمال شرطی $P(x=0|y=2)$

$x \backslash Y$	-۱	۲
-۱	۰/۱	۰/۰۵
۰	۰/۱۵	۰/۱
۱	۰/۲۵	۰/۳۵

$x \backslash Y$	-۱	۲	جمع
-۱	۰/۱	۰/۰۵	۰/۱۵
۰	۰/۱۵	۰/۱	۰/۲۵
۱	۰/۲۵	۰/۳۵	۰/۶
جمع	۰/۵	۰/۵	۱

(۱)

x	-۱	۰	۱
$P(X=x)$	۰/۱۵	۰/۲۵	۰/۶

y	-۱	۰
$P(Y=y)$	۰/۵	۰/۵

$$۲) E(x) = \sum_x xP(x), = -1 \times 0/15 + 0 \times 0/25 + 1 \times 0/6 = 0/45$$

$$E(x^2) = \sum_x x^2 P(x), = -1^2 \times 0/15 + 0^2 \times 0/25 + 1^2 \times 0/6 = 0/75$$

$$\text{var}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = 0/75 - [0/45]^2 = 0/5475$$

$$\sigma_x = \sqrt{0/5475} = 0/74$$

$$E(y) = \sum_y yP(y), = -1 \times 0/5 + 2 \times 0/5 = 0/5$$

$$E(y^2) = \sum_y y^2 P(y), = -1^2 \times 0/5 + 2^2 \times 0/5 = 2/5$$

$$\text{var}(y) = E(y^2) - [E(y)]^2 = 2/5 - 0/5^2 = 2/25, \sigma_y = \sqrt{2/25} = 1/5$$

$$E(xy) = \sum_x \sum_y xyP(x, y) = (-1 \times -1 \times 0/1) + (-1 \times 0 \times 0/15) + (-1 \times 1 \times 0/25) +$$

$$3) (2 \times -1 \times 0/5) + (0 \times 2 \times 0/1) + (2 \times 1 \times 0/35) = 0/45$$

$$\text{cov}(x, y) = E(xy) - E(x).E(y) = 0/45 - (0/45 \times 0/5) = 0/225$$

$$4) \rho = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{0/225}{0/74 \times 1/5} = 0/2$$

$$\begin{aligned} \text{var}(3x - 2y) &= 3^2 \text{var}(x) + (-2)^2 \text{var}(y) + 2(3)(-2)\text{cov}(x, y) \\ 5) &= 9 \times 0/5475 + 4 \times 2/25 - 12 \times 0/225 = 11/2275 \end{aligned}$$

بنابراین مستقل نیستند

$$6) P(x=x, y=y) = P(x=x).P(y=y) \Rightarrow 0/1 = 0/15 \times 0/5 \Rightarrow 0/1 \neq 0/75$$

$$7) P(x=0 | y=2) = \frac{P(0, 2)}{P(y=2)} = \frac{0/1}{0/5} = 0/2$$

ارشد مدیریت ۱۳۹۹

۵۳- به ازای چه مقدار a دو متغیر X و Y هیچگونه رابطه خطی با هم ندارند؟

X \ Y	-1	0
	0/2	0/3
a	0/2	0/3
1	0/4	0/1

(1) -2

(2) 2

(3) -1

(4) 1

x \ y	-1	0	جمع
	0/2	0/3	0/5
a	0/2	0/3	0/5
1	0/4	0/1	0/5
جمع	0/6	0/4	1

نکته: برای آنکه رابطه خطی نداشته باشد. باید $\text{cov}(X, y) = 0$ باشد

x	a	1
$P(X=x)$	0/5	0/5

y	-1	0
$P(Y=y)$	0/6	0/4

$$E(x) = \sum_x xP(x), = a \times 0/5 + 0/5 \times 1 = 0/5a + 0/5$$

$$E(y) = \sum_y yP(y), = -1 \times 0/6 + 0 \times 0/4 = -0/6$$

$$E(xy) = \sum_x \sum_y xyP(x, y) = (-1 \times a \times 0/2) + (0 \times a \times 0/3) + (-1 \times 1 \times 0/4) + (0 \times 1 \times 0/1) = -0/2a - 0/4$$

$$\text{cov}(x, y) = E(xy) - E(x).E(y) = 0 \Rightarrow -0/2a - 0/4 - [(-0/6)(0/5a + 0/5)] = 0 \Rightarrow$$

$$-0/2a - 0/4 + 0/3a + 0/3 = 0 \Rightarrow 0/1a - 0/1 = 0 \Rightarrow 0/1a = 0/1 \Rightarrow a = \frac{0/1}{0/1} = 1$$

گزینه ۴ صحیح است

ارشد مدیریت ۱۴۰۱

۵۶- اگر $\sigma_Y = \frac{1}{3}\sigma_X$ ، واریانس $X+Y$ برابر ۸ و کوواریانس X و Y برابر $\frac{3}{4}$ باشد، واریانس X چقدر است؟

(۱) ۹/۹

(۲) ۸/۲۵

(۳) ۴/۵

(۴) ۳/۷۵

$$\sigma_Y = \frac{1}{3}\sigma_X \Rightarrow \sigma_Y^2 = \frac{1}{9}\sigma_X^2, \quad \text{var}(x+y) = 8, \quad \text{cov}(x, y) = \frac{3}{4}$$

$$\text{var}(ax+by) = a^2 \text{var}(x) + b^2 \text{var}(y) + 2ab \text{cov}(x, y) \Rightarrow$$

$$8 = 1^2 \text{var}(x) + 1^2 \times \frac{1}{9} \text{var}(y) + 2 \times 1 \times \frac{3}{4} \Rightarrow 8 = \frac{10}{9} \text{var}(x) + 3 \Rightarrow 5 = \frac{10}{9} \text{var}(x)$$

$$\Rightarrow \text{var}(x) = \frac{45}{10} = 4/5$$

گزینه ۳ صحیح است

توزیع‌های احتمال گسسته

۱- توزیع احتمال یکنواخت گسسته

اگر متغیر تصادفی x مقایر $X_1, X_2, \dots, X_k$ را با احتمال $\frac{1}{k}$ اختیار کند دارای توزیع یکنواخت است که k پارامتر توزیع است در این صورت $P(x = x) = \frac{1}{k}$

$$E(x) = \frac{k+1}{2}$$

$$var(x) = \frac{k^2 - 1}{12} \quad M_x^t = \frac{1 - e^{-tk}}{k(1 - e^{-t})}$$

۲- توزیع احتمال برنولی:

هرگاه نتیجه یک آزمایش به پیروزی یا شکست منتهی شود دارای توزیع برنولی است که

$$P(x = x) = P^x q^{1-x} \quad x = 0, 1$$

$$E(x) = \mu = p$$

P : احتمال پیروزی

$$var(x) = \sigma_x^2 = pq$$

$q = 1 - p$: احتمال شکست

$$\sigma_x = \sqrt{var(x)} = \sqrt{pq}$$

$E(x)$: امید ریاضی یا میانگین

$$M_x(t) = pe^t + q$$

$Var(k)$: واریانس

σ_x : انحراف معیار

$M_x t$: تابع مولد گشتاور

توزیع دو جمله‌ای:

هرگاه یک آزمایش برنولی n بار به طور متوالی و مستقل انجام شود متغیر x دارای توزیع دو جمله‌ای

$$x \sim B(n, p) \text{ است که تابع احتمال آن به صورت } P(x = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \text{ است.}$$

$$P(x = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad \mu = E(x) = np \quad var(x) = npq$$

$$\sigma_x = \sqrt{npq}, \quad q = \frac{var(x)}{E(x)}, \quad M_x^t = (pe^t + q)^n$$

مثال: الف) یک آزمون چهارگزینه‌ای احتمال آن که به طور اتفاقی از ۱۲ سوال به ۱۰ سوال به طور اتفاقی پاسخ داده شود را بدست آورید.

(ب) میانگین، واریانس و انحراف معیار پاسخهای صحیح را بدست آورید.

(الف)

$$P = \frac{1}{4} \quad q = \frac{3}{4} \quad x = 10 \quad n = 12$$

$$P(X=x) = \binom{n}{x} P^x q^{n-x} = \binom{12}{10} \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \left(\frac{3}{4}\right)^{2} = \frac{12!}{10!(12-10)!} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{594}{4^{12}}$$

$$E(X) = np = 12 \times \frac{1}{4} = 3 \quad (\text{ب})$$

$$\text{var}(X) = npq = 12 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 2.25$$

$$\sigma_X = \sqrt{npq} = \sqrt{12 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}} = 1.5$$

مثال: در یک آزمایش دو جمله‌ای واریانس برابر 0.8 و میانگین برابر 4 است تعیین کنید تعداد آزمایش و

$$q = \frac{\text{var}(X)}{E(X)} = \frac{0.8}{4} = 0.2 \Rightarrow P = 1 - q = 1 - 0.2 = 0.8 \quad \text{احتمال پیروزی.}$$

$$E(X) = np \Rightarrow n = \frac{E(X)}{p} = \frac{4}{0.8} = 5$$

مثال: متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال $P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot (0.25)^k \cdot (q)^{32-k}$ است میانگین و

واریانس آن به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

$$824(4)$$

$$816(3)$$

$$806(2)$$

$$402(1)$$

گزینه ۲ صحیح است $n = 32, p = 0.25 = \frac{1}{4}$

$$E(X) = np = 32 \times \frac{1}{4} = 8. \text{var}(X) = npq = 32 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 6$$

مثال: احتمال آنکه دانشجویی به تصادفی از پنج سوال چهار گزینه ای حداقل به سه سوال پاسخ صحیح دهد چقدر است؟

$$\begin{aligned}
 P(X=x) &= \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \\
 P(X \geq 3) &= \binom{5}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{5-3} + \binom{5}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{5-4} + \binom{5}{5} \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{5-5} = \\
 &= \frac{5!}{3!(5-3)!} \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{5!}{4!(5-4)!} \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \frac{5!}{5!(5-5)!} \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \\
 &= 10 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 + 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{90}{4^5} + \frac{15}{4^5} + \frac{1}{4^5} = \frac{106}{1024} = 0.1
 \end{aligned}$$

ارشد مدیریت ۱۳۹۸

۵۴- متغیر تصادفی X دارای توزیع دوجمله‌ای با میانگین $2/5$ و واریانس $1/25$ می‌باشد. $P(1 \leq x \leq 4)$ کدام است؟

- ۱) 0.9025 ۲) 0.8975 ۳) 0.9125 ۴) 0.9375

$$\begin{aligned}
 E(x) &= \mu = 2 = np, \quad \text{var}(x) = 1/25 = npq \\
 q &= \frac{\text{var}(x)}{E(x)} = \frac{1/25}{2/5} = 0.5 \Rightarrow P = 1 - q = 1 - 0.5 = 0.5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(X=x) &= \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \\
 E(x) &= np \Rightarrow n = \frac{E(x)}{p} = \frac{2/5}{0.5} = 2 \\
 p(1 \leq x \leq 4) &= p(x=1) + p(x=2) + p(x=3) + p(x=4) = 1 - [p(x=0) + p(x=5)] \\
 &= 1 - \left[\binom{2}{0} \left(\frac{0}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{5}\right)^{2-0} + \binom{2}{5} \left(\frac{0}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{5}\right)^{2-5} \right] = 1 - (2 \times 0.5^2) = 1 - 2 \times 0.25 = 0.5
 \end{aligned}$$

گزینه ۴ صحیح است

ارشد مدیریت ۱۴۰۱

۵۹- اگر ۲۰ محصولات خروجی از یک خط تولید معیوب باشند و ۱۰۰ کالا از آنها خریداری شود، واریانس تعداد کالاهای معیوب کدام است؟

- ۱) ۲۰
۲) ۱۶
۳) ۱۰
۴) ۸

$$\begin{aligned}
 p &= 0.2 \Rightarrow q = 1 - p = 1 - 0.2 = 0.8 \\
 \text{var}(x) &= npq = 100 \times 0.2 \times 0.8 = 16
 \end{aligned}$$

گزینه ۲ صحیح است

توزیع پواسون: این توزیع نشان دهنده احتمال وقوع پیشامدی در یک واحد زمان یا مکان می‌باشد و در مواقعی استفاده می‌شود که در یک آزمایش برنولی تعداد آزمایش زیاد و احتمال پیروزی و یا شکست

خیلی کوچک باشد مانند غلط تایپی، احتمال وقوع تصادف در یک چهارراه خاص، احتمال آن که یک شخص خاص با یک مرکز تلفن تماس بگیرد و... که تابع احتمال آن به صورت $P(X=x) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!}$ در این توزیع میانگین و واریانس برابر است. توزیع پواسون خاصیت بی حافظگی دارد. یعنی

$$P(X \geq s+t | X \geq t) = P(X \geq s)$$

۱: متوسط پیروزی

$$P(X=x) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

X: تعداد پیروزی

$$E(X) = \mu = np, \quad \text{var}(X) = \mu, \quad \sigma_X = \sqrt{\mu}$$

$$M_X^t = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

شرایط خوب تقریب تقریب دو جمله‌ای به پواسون

$$1 - \text{در آزمایش دو جمله‌ای } n > 20$$

$$2 - P \text{ آن قدر کوچک باشد که } nP \leq 5$$

مثال: دستگاهی که لامپ خلاء تولید می‌کند نیم درصد لامپهای تولیدی آن معیوب است اگر توزیع لامپهای معیوب پواسون باشد در فرآیند تولید ۴۰۰ لامپ احتمالهای زیر را بدست آورید.

الف) هیچ لامپ معیوبی تولید نشود

ب) حداقل ۳ لامپ معیوب باشد

$$\mu = nP = 400 \times 0.005 = 2 \quad \text{الف)}$$

$$P(X=x) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} \Rightarrow P(X=0) = \frac{e^{-2} 2^0}{0!} = e^{-2}$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)] =$$

$$\text{ب)} \quad 1 - \left[\frac{e^{-2} 2^0}{0!} + \frac{e^{-2} 2^1}{1!} + \frac{e^{-2} 2^2}{2!} \right] = 1 - 5e^{-2}$$

ارشد مدیریت ۱۳۹۸

۵۵- اگر متغیر تصادفی x دارای توزیع پواسون با میانگین ۲ باشد و متغیر تصادفی y به صورت زیر تعریف شود، $E(y)$ کدام است؟

$$y = \begin{cases} 1 & x = 2k \\ -1 & x = 2k+1 \end{cases}$$

e^{-1} (۴) $2e^{-2}$ (۳) e^{-2} (۲) e^{-2} (۱)

$$\mu = 2$$

$$P(X=x) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} = \frac{e^{-2} 2^x}{x!}$$

می دانیم

$$E(X) = \sum x_i p(x_i) \quad , \quad E[g(x)] = \sum p_i \cdot g(x_i) \quad y = g(x)$$

$$E[y] = \sum y p(y) = \sum_{x=2k} 1 \times \frac{e^{-2} 2^x}{x!} + \sum_{x=2k+1} -1 \times \frac{e^{-2} 2^x}{x!} = e^{-2} \left[\sum_{x=2k} (-1)^x \times \frac{2^x}{x!} + \sum_{x=2k+1} (-1)^x \times \frac{2^x}{x!} \right]$$

$$= e^{-2} \left[\sum_{x=2k} \frac{(-2)^x}{x!} + \sum_{x=2k+1} \frac{(-2)^x}{x!} \right] \xrightarrow{\sum \frac{\alpha^x}{x!} = e^\alpha} E[y] = e^{-2} \times e^{-2} = e^{-4}$$

گزینه ۲ صحیح است

ارشد مدیریت ۱۴۰۱

۶۰- تعداد مشتریانی که به یک بانک مراجعه می کنند، یک متغیر تصادفی پواسون با میانگین ۸ مشتری در ساعت است. احتمال اینکه در طول ۱۵ دقیقه، حداقل ۲ مشتری به بانک وارد شود چقدر است؟

$1 - 3e^{-2}$ (۱)
 $1 - 2e^{-2}$ (۲)
 $3e^{-2}$ (۳)
 $2e^{-2}$ (۴)

$$\mu = nP = 8 \times \frac{15}{60} = 2$$

$$P(x=x) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} \Rightarrow P(x=0) = \frac{e^{-2} 2^0}{0!} = e^{-2}$$

$$P(x \geq 2) = 1 - P(x < 2) = 1 - [P(x=0) + P(x=1)] = 1 - \left[\frac{e^{-2} 2^0}{0!} + \frac{e^{-2} 2^1}{1!} \right] = 1 - 3e^{-2}$$

ارشد مدیریت ۱۴۰۲

۵۵- تعداد خرابی‌های یک ماشین از توزیع پواسون برخوردار است. این ماشین ۲ روز بدون خرابی کار کرده است. اگر احتمال اینکه ماشین حداقل ۴ روز دیگر بدون خرابی کار کند برابر $e^{-0.8}$ باشد، متوسط تعداد خرابی ماشین مذکور در هر ۳۰ روز، کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۵

(۳) ۶

(۴) ۸

توزیع پواسون خاصیت فراموشی دارد و روزها مستقل از هم مستقل هستند. و احتمال خرابی صفر در یک روز

$$P(x=x) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} \Rightarrow P(x=0) = \frac{e^{-\mu} \mu^0}{0!} \Rightarrow P(x=0) = e^{-\mu} = e^{-0.8} \Rightarrow \mu = 0.8$$

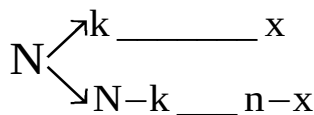
$$\mu = np \Rightarrow p = \frac{\mu}{n} = \frac{0.8}{4} = 0.2$$

$$p = \frac{x}{n} \Rightarrow x = p.n = 0.2 \times 30 = 6$$

گزینه ۳ صحیح است

توزیع احتمال فوق هندسی:

اگر انتخاب نمونه بدون جایگذاری باشد بنابراین احتمال موفقیت به آزمایشهای قبلی بستگی دارد در صورتی که x تعداد موفقیتها در نمونه باشد و اندازه نمونه نسبت به اندازه جامعه بزرگ باشد بین $\frac{n}{N} > 0.5$ از توزیع فوق هندسی استفاده می‌شود.



N: تعداد جامعه

N: تعداد نمونه

K: تعداد اعضای از جامعه که دارای خاصیت مورد نظر باشد

X: تعداد پیروزی

$$P(x=x) = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$\mu = E(x) = n \frac{k}{N}, \quad \sigma_x^2 = \text{var}(x) = n \frac{k}{N} \cdot \frac{N-k}{N} \cdot \frac{N-1}{N}$$

$$\sum \binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x} = \binom{N}{n}$$

نکته:

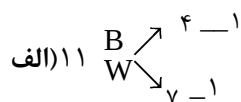
تعمیم توزیع فوق هندسی

اگر $N = n_1 + n_2 + \dots + n_x$ عضو باشد و نمونه انتخابی $R = r_1 + r_2 + \dots + r_x$ باشد در این صورت

$$P(x_1 = r_1, \dots, x_r = r_k) = \frac{\binom{n_1}{r_1} \binom{n_2}{r_2} \dots \binom{n_k}{r_k}}{\binom{N}{R}}$$

مثال: الف) در کیسه‌ای ۴ مهره سیاه و ۷ مهره سفید ریخته‌ایم احتمال اینکه ۲ مهره به تصادف و بدون جایگذاری خارج کنیم و مهره هم رنگ نباشد را بدست آورید

ب) میانگین و واریانس تعداد سیاهها را بدست آورید.



$$P(x=x) = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{4}{1} \binom{7}{1}}{\binom{11}{2}} = \frac{28}{55}$$

$$E(x) = n \frac{k}{N} = 2 \times \frac{4}{11} = \frac{8}{11}$$

$$\text{var}(x) = n \frac{k}{N} \cdot \frac{N-k}{N-1} \cdot \frac{N-k}{N} = 2 \times \frac{4}{11} \times \frac{11-2}{11-1} \times \frac{11-4}{11} = \frac{504}{1210}$$

ارشد مدیریت ۱۳۹۸

۴۹- در جعبه‌ای ۷ مهره موجود است که ۴ مهره از آن‌ها سفید است. ۳ مهره از جعبه بیرون می‌آوریم، X تعداد مهره‌های سفید خارج شده است. واریانس X کدام است؟

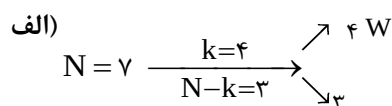
$$\frac{24}{49} \quad (4)$$

$$\frac{12}{49} \quad (3)$$

$$\frac{27}{49} \quad (2)$$

$$\frac{18}{49} \quad (1)$$

$$N=7, \quad n=3, \quad k=4$$



$$\text{var}(x) = n \frac{k}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{N-k}{N} = 3 \times \frac{4}{7} \times \frac{7-3}{7-1} \times \frac{7-4}{7} = \frac{3 \times 4 \times 4 \times 3}{7 \times 6 \times 7} = \frac{24}{49}$$

توزیع احتمال هندسی:

هرگاه یک آزمایش برنولی را آنقدر ادامه دهیم تا به اولین پیروزی برسیم از توزیع هندسی استفاده می‌شود یعنی اگر در بار x ام پیروز شویم $X-1$ بار شکست خورده‌ایم مانند آنکه سکه را آنقدر پرتاب کنیم که اولین شیر ظاهر شود

$$f(x, p) = P(X=x) = pq^{x-1} \quad x=1, 2, \dots$$

$$\mu = E(X) = \frac{q}{p} \quad \text{var}(X) = \frac{q}{p^2} \quad M_t^X = \frac{Pe^t}{(1-qe^t)}$$

نکته: توزیع هندسی فاقد حافظه است یعنی:

$$P(X \geq s+t | X \geq t) = P(X \geq s)$$

مثال: احتمال اینکه فردی در امتحانی پذیرفته شود $0/9$ است احتمال اینکه فرد در سومین امتحانی می‌دهد پذیرفته شود چقدر است؟

$$f(3, 0/9) = P(X=x) Pq^{x-1} = 0/9 \times 0/1^{3-1} = 0/009$$

توزیع احتمال دو جمله‌ای منفی (پاسکال):

دنباله‌ای از آزمایشهای برنولی مستقل با احتمال پیروزی p که در N آزمون آزمایش x آیین پیروزی حاصل شود از توزیع دو جمله‌ای منفی تبعیت می‌کند و تابع احتمال آن به صورت زیر است.

$$f(n, x, p) = P(X=x) = \binom{N-1}{x-1} p^x q^{N-x} = \binom{x+y-1}{y} p^x q^y$$

$$E(X) = \frac{x}{p} \quad \text{var}(X) = \frac{xq}{p^2} \quad M_t^X = \left(\frac{Pe^t}{1-qe^t} \right)^k$$

نکته: به روش درست‌نمایی ماکزیمم: $\hat{\theta} = \frac{r}{\bar{x} + r}$

مثال: احتمال آن که شخصی تیری را به هدف بزند $0/6$ است احتمال اینکه در پنجمین شلیک تیر برای دومین بار به هدف بخورد را بدست آورید.

$$p(X=x) = \binom{N-1}{x-1} p^x q^{N-x} = \binom{4}{1} 0/6^2 \times 0/4^3 = 0/0216$$

ارشد مدیریت ۹۸

۵۲- احتمال خطا در یک دستگاه کنترل کیفی ۰/۱ است. تقریباً با کدام احتمال سومین خطا در آزمایش هفتم ظاهر شده است؟

(۱) ۰/۰۰۳۶ (۲) ۰/۰۰۹۸ (۳) ۰/۰۱۲۴ (۴) ۰/۰۲۱۴

با استفاده از توزیع دو جمله ای منفی

$$P(X=x) = \binom{N-1}{x-1} P^x q^{N-x} = \binom{Y-1}{x-1} 0.1^x \times (1-0.1)^{Y-x} = \frac{6!}{2!(6-2)!} \times 0.1^3 \times 0.9^4 = 0.0098$$

گزینه ۲ صحیح است

نکته:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^N E_i\right) = \sum_{i=1}^N P(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(E_{i_1} E_{i_2}) + \dots + (-1)^{n+1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_n} P(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_n}) + \dots + (-1)^{N+1} P(E_1 \dots E_N)$$

مثال: اگر چهار زوج به تصادف در یک ردیف بنشینند، احتمال اینکه زوجی در کنار یکدیگر نباشد را بدست آورید.

E_i : پیشامدی که زوج i ام پهلوی هم نشسته باشد

E : پیشامدی که هیچ زوجی پهلوی هم ننشسته باشد.

$$P(E) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^4 E_i\right)$$

$$P(E_i E_j) = \frac{2 \times 2 \times 6!}{8!}$$

$$P(E_i E_j E_k) = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 5!}{8!} = \frac{8 \times 5!}{8!}$$

$$P(E_1 E_2 E_3 E_4) = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 4!}{8!} = \frac{16 \times 4!}{8!}$$

$$P\left(\bigcup E_i\right) = \binom{4}{1} \frac{2 \times 6!}{8!} - \binom{4}{2} \frac{2 \times 2 \times 6!}{8!} + \binom{4}{3} \frac{8 \times 5!}{8!} - \frac{16 \times 4!}{8!} = 0.6571$$

$$P(E) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^4 E_i\right) = 1 - 0.6571 = 0.3429$$

مثال: اگر N نفر کلاههای خود را در یک کیسه ریخته باشند احتمالاتی زیر را حساب کنید. الف) احتمال اینکه هیچ نفر کلاه خود را انتخاب نکند

ب) احتمال اینکه k نفر کلاه خود را انتخاب کنند

$$\text{الف) } P(E_1) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^N E_i\right) = 1 - \left[1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{N+1} \frac{1}{N!}\right] = e^{-1} = 0.37$$

$$\text{ب) } P(\text{هیچ یک از } N-k \text{ نفر کلاه خود را بردارد}) = \left[1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{N-k}}{(N-k)!}\right]$$

بنابراین تعداد حالات کل برابر است با

$$(N-k)! \left[1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{N-k}}{(N-k)!}\right]$$

چون $\binom{N}{k}$ می توان گروه k نفری انتخاب کرد

$$\binom{N}{k} (N-k)! \left[1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{N-k}}{(N-k)!}\right]$$

$P(k \text{ نفر کلاه خود را بردارد}) =$

$$\frac{\binom{N}{k} (N-k)! \left[1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{N-k}}{(N-k)!}\right]}{N!} =$$

$$\frac{\left[1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{N-k}}{(N-k)!}\right]}{k!} = \frac{e^{-1}}{k!}$$

تابع احتمال سری لگاریتمی:

با استفاده از الگوی دو جمله ای می توان الگویی برای سری لگاریتمی ارائه داد که α پارامتر توزیع است.

$$P(X=x) = \frac{-1}{\ln(1-\alpha)} \cdot \frac{\alpha^x}{x} \quad x=1,2,\dots$$

$$E(x) = \frac{-1}{\ln(1-\alpha)} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

تابع احتمال سری لگاریتمی مارکوف:

$$P(x=x) = \frac{-1}{\ln(1-\alpha)} \cdot \frac{(1-\beta)^x - \left[1 - \frac{\beta}{1-\alpha}\right]}{x} \quad x=1,2,\dots$$

اگر $B=1-\alpha$ باشد سری لگاریتمی مارکوف به سری لگاریتمی تبدیل می‌شود.

$$E(x) = \frac{-\alpha}{\beta \ln(1-\alpha)}$$

توابع چگالی احتمال پیوسته

شرط آنکه یک تابع، تابع چگالی احتمالی باشد آن است که:

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

امید ریاضی و واریانس متغیرهای تصادفی پیوسته

$$\mu_x = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$$

$$E(x^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x) dx$$

$$\text{var}(x) = E[x - E(x)]^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$$

محاسبه احتمال توابع پیوسته

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

محاسبه تابع توزیع توابع پیوسته

$$\int_{-\infty}^x f(x) dx = H_p$$

محاسبه صدک‌ها در توابع پیوسته

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad \text{مشتق تابع توزیع می شود تابع چگالی}$$

$$M_x^t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx \quad \text{محاسبهٔ تابع مولد گشتاورها در توابع پیوسته}$$

مثال: در صورتی که تا متغیر تصادفی x دارای فضای پیوسته $A = \{x \mid x > 0\}$ باشد مقدار c را در تابع $f(x) = ce^{-\delta x}$ طوری تعیین کنید که تابع چگال احتمال باشد. (توزیع نمایی)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty} ce^{-\delta x} dx = 1 \Rightarrow -\frac{1}{\delta} ce^{-\delta x} \Big|_0^{\infty} = 1 \Rightarrow -\frac{1}{\delta} c(e^{-\infty} - e^0) = 1$$

$$\Rightarrow c = \delta \Rightarrow F(x) = \begin{cases} \delta e^{-\delta x} & x > 0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مثال: در تابع $f(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{رنقاط} \end{cases}$ را طوری انتخاب کنید که تابع چگالی احتمالی باشد

(ب) میانگین واریانس و انحراف معیار بدست آورید.

(ج) احتمال اینکه $X > 1$ باشد را بدست آورید.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^2 kx^2 dx = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} kx^3 \Big|_0^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} k(2^3 - 0) = 1 \Rightarrow k = \frac{3}{8}$$

الف)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8} x^2 & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

ب)

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \int_0^2 x \left(\frac{3}{8} x^2 \right) dx = \frac{3}{8} x^4 \Big|_0^2 = 1/5$$

$$\text{var}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = 2/4 - 1/5^2 = 0/15$$

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^2 x^2 \times \frac{3}{8} x^2 dx = \frac{3}{8} \times \frac{1}{5} x^5 \Big|_0^2 = \frac{3}{40} (2^5 - 0) = \frac{96}{40} = 2/4$$

$$\sigma_x = \sqrt{\text{var}(x)} = \sqrt{0/15} = 0/387$$

ج)

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx = \int_1^2 \frac{3}{8} x^2 dx = \frac{1}{8} x^3 \Big|_1^2 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

ارشد مدیریت ۹۸

۵۱- تابع تجمعی احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر است. امید ریاضی متغیر تصادفی X کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2 + x}{6} & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

$\frac{25}{18}$ (۴) $\frac{11}{9}$ (۳) $\frac{14}{9}$ (۲) $\frac{23}{18}$ (۱)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2 + x}{6} & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} F(0^-) &= 0 \\ F(0) = F(0^+) &= \frac{0^2 + 0}{6} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow F(0^-) = F(0) = F(0^+) = 0$$

بنابراین تابع در نقطه صفر پیوسته است.

$$\left. \begin{aligned} F(2) = F(2^-) &= \frac{2^2 + 2}{6} = 1 \\ F(2^+) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow F(2^-) = F(2^+) = F(2) = 1$$

بنابراین تابع در نقطه یک پیوسته است.

در نتیجه تابع چگالی از مشتق تابع توزیع بدست می آید.

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{2x+1}{6}$$

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \Rightarrow E(X) = \int_0^2 x \left(\frac{2x+1}{6} \right) dx = \frac{1}{6} \int_0^2 (2x^2 + x) dx$$

$$= \frac{1}{6} \left[\frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^2 = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3} (2)^3 + \frac{1}{2} (2)^2 - \left(\frac{2}{3} (0)^3 + \frac{1}{2} (0)^2 \right) \right) = \frac{44}{36} = \frac{11}{9}$$

گزینه ۳ صحیح است.

ارشد مدیریت ۹۹

۵۲- قطر سیم‌های تولیدی یک متغیر تصادفی با تابع چگالی $0 < x < 1$ ؛ $f(x) = kx(1-x)$ می‌باشد. مقدار k چقدر است؟

(۱) ۱۰

(۲) ۶

(۳) ۳

(۴) ۱

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 kx(1-x) dx = k \int_0^1 x(1-x) dx = k \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = 1 \Rightarrow k \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = 1 \Rightarrow k \left(\frac{1}{6} \right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{6} k = 1 \Rightarrow k = 6$$

گزینه ۲ صحیح است

ارشد مدیریت ۱۴۰۰

۵۸- تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی x به صورت زیر بیان شده است. پارامتر k چقدر است؟

$$p(x) = \frac{2x}{k} + \frac{1}{k}; 0 < x < 5$$

(۱) ۱۵

(۲) ۲۵

(۳) ۳۰

(۴) ۳۵

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^5 \left(\frac{2x}{k} + \frac{1}{k} \right) dx = \frac{1}{k} \int_0^5 (2x + 1) dx = 1 \Rightarrow \frac{1}{k} \left[x^2 + x \right]_0^5 = 1 \Rightarrow k = (5^2 + 5 - 0) \Rightarrow k = 30$$

گزینه ۳ صحیح است.

ارشد مدیریت ۱۴۰۱

۶۱- به ازای چه مقدار برای k ، تابع $f(x)$ ، تابع چگالی احتمال است؟

$$f(x) = \begin{cases} |16x - 4| & 0 \leq x \leq k \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

(۱) $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

$$16x - 4 = 0 \Rightarrow 16x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$16x - 4$		-	+

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\frac{1}{4}} |16x - 4| dx = 1 = \int_{-\infty}^{\frac{1}{4}} (4 - 16x) dx + \int_{\frac{1}{4}}^{+\infty} (16x - 4) dx = 1 \Rightarrow$$

$$\left[4x - \frac{16x^2}{2} \right]_{-\infty}^{\frac{1}{4}} + \left[\frac{16x^2}{2} - 4x \right]_{\frac{1}{4}}^{+\infty} = 1 \Rightarrow \left[4\left(\frac{1}{4}\right) - 8\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 0 \right] + \left[(\infty k^2 - 4k) - (8\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{4}\right)) \right] = 1$$

$$\Rightarrow (1 - \frac{1}{2}) + \infty k^2 - 4k - \frac{1}{2} + 1 = 1 \Rightarrow \infty k^2 - 4k = 0 \Rightarrow k(\infty k - 4) = 0 \Rightarrow k_1 = 0$$

$$\infty k - 4 = 0 \Rightarrow k = \frac{4}{\infty} = \frac{1}{2}$$

گزینه ۴ صحیح است

توابع چگالی پیوسته خاص

۱- توزیع یکنواخت

در این مدل احتمال وقوع متغیر تصادفی در بازه (a,b) مقدار ثابتی است و تابع چگالی آن به صورت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$\mu = E(x) = \frac{a+b}{2} \quad \text{var}(x) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad \sigma_x = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

$$P(c < x < d) = \frac{d-c}{b-a} \quad M_x^t = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$$

مثال: فرض کنید در هر ۱۰ دقیقه یک قطار وارد مترو می شود تعیین کنید

الف) تابع چگالی احتمال

ب) میانگین واریانس و انحراف معیار

ج) احتمال آن که شخصی وارد ایستگاه شود و بیش از ۷ دقیقه منتظر بماند

$$\text{الف) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases} \quad a=0, b=10 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 0 < x < 10 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$\text{ب) } E(x) = \frac{a+b}{2} = \frac{0+10}{2} = 5$$

$$\text{var}(x) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(10-0)^2}{12} = 8.333$$

$$\sigma = \sqrt{\text{var}(x)} = \sqrt{8.333}$$

$$\text{ج) } P(x > 7) = P(7 < x < 10) = \frac{10-7}{10-0} = 0.3$$

ارشد مدیریت ۹۸

۵۰- در یک توزیع یکنواخت با میانگین ۱۶ و واریانس ۳ مقدار $E(X \leq 15)$ کدام است؟

$$\frac{2}{3} \text{ (۴)} \quad \frac{1}{3} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{4} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{2} \text{ (۱)}$$

$$E(x) = \frac{a+b}{2} \Rightarrow 16 = \frac{a+b}{2} \Rightarrow a+b = 32 \quad \text{رابطه ۱}$$

$$\text{var}(x) = \frac{(b-a)^2}{12} \Rightarrow 3 = \frac{(b-a)^2}{12} \Rightarrow (b-a)^2 = 36 \Rightarrow b-a = \pm 6 \Rightarrow b-a = 6 \quad \text{رابطه ۲}$$

$$\begin{cases} a+b=32 \\ b-a=6 \end{cases} \Rightarrow 2b=38 \Rightarrow b=19 \\ a+b=32 \Rightarrow a+19=32 \Rightarrow a=32-19=13$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases} \quad a=13, b=19 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & 13 \leq x \leq 19 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$P(x \leq 15) = \int_{13}^{15} \frac{1}{6} dx = \left[\frac{1}{6} x \right]_{13}^{15} = \frac{1}{6} [15-13] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(c < x < d) = \frac{d-c}{b-a} \Rightarrow P(13 < x < 15) = \frac{15-13}{19-13} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

یا با استفاده از رابطه

تابع چگالی گاما:

متغیر تصادفی x دارای تابع چگالی گاما با پارامترهای α و β است اگر

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} & x > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

و همانگونه که می‌دانیم $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$ و $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ است

$$\mu = E(x) = \alpha\beta \quad \text{var}(x) = \alpha\beta^2 \quad M_x^t = \left(\frac{\alpha}{\alpha-t}\right)^\alpha$$

$$F(x) = P(x \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx = 1 - \sum_{i=0}^{\alpha-1} \left(\frac{x}{\beta}\right)^i e^{-\frac{x}{\beta}}$$

توزیع نمایی: اگر در توزیع گاما به جای $\alpha=1$ و $\beta=\lambda = \frac{1}{\theta}$ قرار دهیم توزیع نمایی بدست می‌آید که کاربردهای زیادی دارد مانند مطالعه زمان تغییر ماهیت ذرات رادیواکتیو، بیان مدل‌های انتظار در صف، توزیع زمانی که در طی آن حالت میرایی وجود داشته باشد مانند سوختن و از کار افتادن وسایل و در مطالعه فرآیندهای تصادفی و زنجیرهای مارکوف پیوسته. توزیع نمایی خاصیت فراموشی دارد و در این توزیع میانگین و انحراف معیار برابر است.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0, \quad \lambda > 0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases} \quad \text{یا} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & \theta > 0, \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$\mu = E(x) = \frac{1}{\lambda} = \theta, \quad \text{var}(x) = \frac{1}{\lambda^2} = \theta^2, \quad \sigma_x = \frac{1}{\lambda} = \theta$$

$$P(x \geq a) = e^{-\lambda a} \quad P(a \leq x \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

$$P(x \leq b) = 1 - e^{-\lambda b} \quad M_x^t = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

$$P(x \geq a+b) = P(x > 0) \cdot P(x > b) = e^{-\lambda a} \cdot e^{-\lambda b}$$

مثال: در صورتی که زمان بین دو بار مراجعه برای تعمیر دستگاهی توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = 0.4$ باشد تعیین کنید

الف) تابع چگالی (ب) میانگین، واریانس، انحراف معیار

ج) احتمال آنکه حداقل ۵۰ روز دیگر تعمیر انجام شود

د) احتمال آنکه تعمیر بعدی حداکثر ۲۵ روز دیگر انجام شود

$$\text{الف) } f(x) = \begin{cases} 0.4e^{-0.4x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$\text{ب) } \mu = E(x) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.4} = 2.5$$

$$\text{var}(x) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{0.4^2} = 6.25$$

$$\sigma_x = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.4} = 2.5$$

$$\text{ج) } P(x \geq a) = P(x \geq 50) = e^{-0.4 \times 50} = e^{-2} = 0.135335$$

$$\text{د) } P(x \leq b) = 1 - e^{-\lambda b} = 1 - e^{-0.4 \times 25} = 1 - e^{-1} = 1 - 0.367 = 0.633$$

تابع نرخ خرابی: متغیر تصادفی پیوسته مثبت x دارای تابع توزیع تجمعی F و تابع چگالی f را به عنوان طول عمر یک قطعه در نظر می‌گیریم که تابع نرخ خرابی $\lambda(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$$

مثال: فرض کنید توزیع طول عمر دستگاهی به صورت $\lambda(t) = t^3$ باشد در صورتی که دستگاه یک سال عمر کرده باشد با چه احتمالی تا ۲ سال عمر می‌کند.

$$P(x \leq 2 | x \geq 1) = \frac{P(1 \leq x \leq 2)}{P(x \geq 1)} = \frac{F(2) - F(1)}{1 - F(1)} = 0.976$$

$$F(x) = 1 - e^{-\int_0^x \lambda(x) dx} = 1 - e^{-\frac{x^4}{4}}$$

تابع چگالی احتمال x دو:

متغیر تصادفی x دارای تابع چگالی احتمال x دو با پارامتر v است در صورتی که تابع چگالی احتمال به

$$f(x) = \frac{1}{\frac{\nu}{2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \quad x > 0$$

صورت. $\alpha = \frac{\nu}{2}$ باشد که در واقع اگر در توزیع گاما به جای α ν را درجه آزادی می‌گویند.

$$E(x) = \nu \quad \text{var}(x) = 2\nu \quad M_t^x = \left(\frac{1}{\frac{1}{2} - t} \right)^{\frac{\nu}{2}}$$

تابع چگالی β

توزیع بتا در استنباط‌های بیزی کاربرد دارد. وقتی توزیع دوجمله‌ای پارامتر θ متغیری تصادفی باشد که $\theta \in (0, 1)$ باشد توزیع β برای متغیر تصادفی θ مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1} & 0 \leq \theta \leq 1 \quad \alpha, \beta > 0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1} & 0 \leq \theta \leq 1 \quad \alpha, \beta > 0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$\mu = E(x) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad \text{Var}(x) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)}$$

توزیع نرمال

توزیع نرمال یک توزیع متقارن است که در آن میانگین، میانه، مد برابرند و نمودار آن شبیه یک زنگوله

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

است تابع چگالی توزیع نرمال بصورت $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ می‌باشد که با نماد $x \sim N(\mu, \sigma^2)$

نشان می‌دهیم. برای سهولت در محاسبات با استفاده از تغییر متغیر $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ این توزیع را به نرمال استاندارد با میانگین صفر و واریانس تبدیل می‌کنیم که در این صورت تابع چگالی نرمال استاندارد به

صورت $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$ می‌باشد و با نماد $Z \sim N(0,1)$ نشان می‌دهیم که در این صورت می‌توانیم

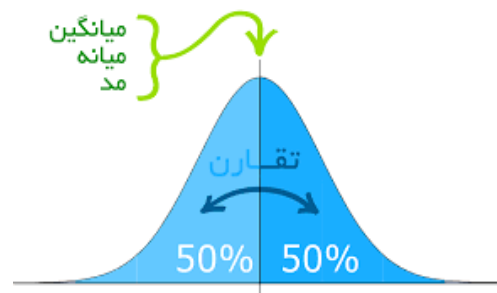
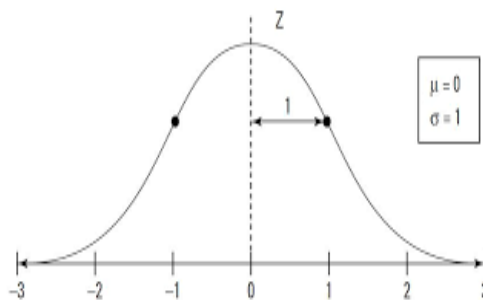
برای بدست آوردن مقادیر احتمال کمتر از Z از جدول نرمال استاندارد استفاده کنیم که اعداد یکان و دهم را از ستون اول و عدد صدم را سطر اول مشخص کرد. و محل تلاقی آنها احتمال مورد نظر را نشان می‌دهد که سطح زیر نمودار می‌باشد.

$$\varphi(z) = P(Z < z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\omega^2} d\omega \quad M_X^t = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

مثال: $P(Z < 1/96)$ را بدست آورید.

z	۰/۰۶
۱/۹	۰/۹۷۵

$$\varphi(1/96) = P(Z < 1/96) = 0.975$$



مثال: توزیع متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۰۰ و واریانس ۲۵ است. نمره Z نرمال متناظر با $X = ۱۲۰$ برابر چه عددی است؟

۰/۸ (۴) ۴ (۳) ۸ (۲) -۴ (۱)

گزینه ۴ صحیح است

$$\sigma^2 = 25 \Rightarrow \sigma = 5$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{120 - 100}{5} = 4$$

مثال: کدامیک از نمرات Z برای نمره ای که صرفاً کمی کوچک تر از میانگین است. معرف می‌باشد؟

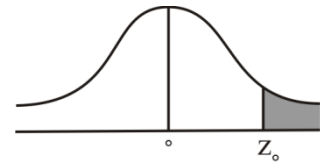
+۲ (۴) -۲ (۳) -۰/۱ (۲) ۰ (۱)

گزینه ۲ صحیح است چون کمترین عدد منفی نزدیک به صفر است.

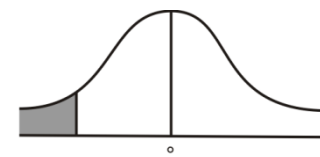
$$P(z < z_0) = \phi(z_0)$$



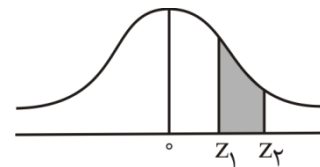
$$P(z > z_0) = 1 - \phi(z_0)$$



$$P(z < -z_0) = \phi(-z_0) = 1 - \phi(z_0)$$



$$P(z_1 < z < z_2) = \phi(z_2) - \phi(z_1)$$



$$P(-z_0 < z < z_0) = 2\phi(z_0) - 1$$

مثال: احتمالات زیر را بدست آورید.

$$P(z < 1/25) = \phi(1/25) = 0.5944$$

$$P(z > 2/56) = 1 - \phi(2/56) = 1 - 0.5948 = 0.4052$$

$$P(z < -1/64) = 1 - \phi(1/64) = 1 - 0.5995 = 0.4005$$

$$P(1/35 < z < 2/64) = 0.5959 - 0.5915 = 0.0044$$

$$P(-2 < z < 2) = 2\phi(2) - 1 = 2 \times 0.9772 - 1 = 0.9544$$

مثال: در یک منحنی توزیع نرمال فاصله بین ۱ تا ۲+ انحراف معیار چقدر از سطح منحنی را اشغال می کند؟

۰/۱۳۵۹(۴)

۰/۳۴۱۳(۳)

۰/۴۷۷۲(۲)

۰/۹۵۴۴(۱)

گزینه ۴ صحیح است

$$p(+1 \leq Z \leq +2) = \varphi(2) - \varphi(1) = 0.9772 - 0.8413 = 0.1359$$

ارشد مدیریت ۹۸

۵۳- توزیع X نرمال با میانگین ۳۲ می باشد. اگر $P(|Z| \leq 1/5) = 0.866$ و $P(X \geq 20) = 0.933$ باشد انحراف معیار X

کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۶ (۲)

۸ (۱)

$$\left. \begin{aligned} P(|Z| \leq 1/5) &= P(-1/5 < Z < 1/5) = 0.866 \\ P(-Z_0 < Z < Z_0) &= 2\varphi(Z_0) - 1 = 0.866 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\varphi(Z_0) - 1 = 0.866$$

$$2\varphi(Z_0) = 0.866 + 1 \Rightarrow 2\varphi(Z_0) = 1.866 \Rightarrow \varphi(Z_0) = \frac{1.866}{2} = 0.933 \Rightarrow Z_0 = 1/5$$

چون

$$P(Z < Z_0) = P(Z > -Z_0) = \varphi(Z_0) = 0.933, \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$P(Z > 20) = 0.933 \Rightarrow P\left(Z > \frac{20 - 32}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{-12}{\sigma}\right) = 0.933$$

$$\frac{-12}{\sigma} = -1/5 \Rightarrow \sigma = \frac{-12}{-1/5} = 8$$

گزینه ۱ صحیح است

نکته: با تغییر متغیر $y = a + e^x$ تابع چگالی y به صورت زیر است:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{(y-a)\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} - [L_n(y-a) - \mu]^2\right\} & y > a \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

که به این تابع، تابع چگالی نرمال لگاریتمی یا لاگ نرمال گویند و میانگین و واریانس آن به صورت زیر است:

$$E(x) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \quad \text{var}(y) = e^{\sigma^2} \left(1 - e^{-\sigma^2}\right) e^{2\mu}$$

تابع چگالی احتمال t استیودنت:متغیر تصادفی x با تابع چگالی

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{(n-1)\pi}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}} \quad -\infty < x < +\infty$$

را توزیع t گویند که با پارامتر $df = n-1$ یا v به عنوان درجه آزادی در نظر بگیریم در این صورت تابع چگالی به شکل

$$f(x) \text{ می باشد} = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{v\pi}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{\frac{v+1}{2}}} \quad -\infty < x < +\infty, \quad v > 0$$

$$\text{var}(x) = \frac{v}{v-2} = \frac{df}{df-2} \quad \text{که برای } df > 1 \text{ داریم } E(x) = 0 \text{ و برای } df > 2 \text{ داریم}$$

تابع چگالی احتمال F یا فیشر

متغیر تصادفی x دارای توزیع فیشر با پارامترهای I_1 و I_2 است در صورتی که تابع چگالی آن به صورت

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)} \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{x^{\frac{v_1}{2}-1}}{\left(1 + \frac{v_1}{v_2}x\right)^{\frac{v_1+v_2}{2}}} \quad x > 0$$

که در آن $v_1 = df_1 = n_1 - 1$ و $v_2 = df_2 = n_2 - 1$ درجه آزادی می باشد.

$$E(x) = \frac{v_2}{v_2 - 2} \quad \text{var}(x) = \frac{2n_2^2(n_1 + n_2 - 2)}{n_1(n_2 - 2)^2(n_2 - 4)}$$

$$E(x) = \frac{\alpha\beta}{\alpha-1} \quad \text{var}(x) = \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$$

تبدیل متغیرهای تصادفی:

کافیست معکوس تابع مورد نظر را بدست آوریم و در تابع چگالی تغییر متغیر صورت گرفته را اعمال کنیم

و در ژاکوبین تبدیل $\left(\frac{dx}{dy}\right)$ ضرب کنیم.

مثال: در صورتی که تابع چگالی متغیر تصادفی x به صورت

$$f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$f_X(x)$ باشد چگالی $y = \delta x + 1$ را بدست آورید.

$$x = \frac{y-1}{\delta} > 0$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y-1}{\delta} e^{-\left(\frac{y-1}{\delta}\right)} & y > 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases} \Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y-1}{2\delta} e^{-\left(\frac{y-1}{\delta}\right)} & y > 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مثال: متغیر تصادفی x دارای تابع توزیع $F_X(x)$ است تبدیل $y = x^2$ را بدست آورید.

از تابع توزیع مشتق می‌گیریم تا تابع چگالی بدست آید.

$$x = \pm\sqrt{y}$$

$$F_Y(y) = P(y \leq y) = P(x^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} [f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})] \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} & y > 0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

قضایای حدی

قضیه ۱: اگر متغیر تصادفی x فقط مقادیر نامنفی اختیار کند آن گاه به ازای هر مقدار $a > 0$ داریم

$$P(x \geq a) \leq \frac{E(x)}{a}$$

مثال: در صورتیکه تعداد کالای معیوب تولیدی در یک کارگاه دارای میانگین ۵۰ عدد در هفته باشد حدود احتمال آنکه تعداد کالای معیوب در هفته از ۵۵ عدد تجاوز کند را بدست آورید

$$P(x \geq a) \leq \frac{E(x)}{a} \Rightarrow P(x \geq 55) \leq \frac{50}{55} = P(x \geq 60) \leq 0.91$$

قضیه ۲:

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) = 0$$

$n \rightarrow \infty$

قضیه حد مرکزی: فرض کنید X_1 و X_2 و ... X_n دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل هم توزیع باشد به طوری که $E(x) = \mu$ و $var(x_i) = \sigma^2$ باشد در این صورت توزیع $\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ و $n \rightarrow \infty$ باشد به توزیع نرمال استاندارد می‌گراید.

نکته: تابع مولد گشتاور $\bar{x}$ در توزیع نرمال بصورت $M_X^t = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2n}}$ است.

مثال: در صورتیکه توزیع قد افراد یک شهر دارای توزیع نرمال با میانگین 170cm و انحراف معیار 5cm باشد احتمال آن که میانگین قد افراد در نمونه ۳۶ بیش از ۱۷۲ باشد را بدست آورید. در بین ۱۰۰۰۰ نفر قد چند نفر بیش از ۱۷۲ سانتیمتر است

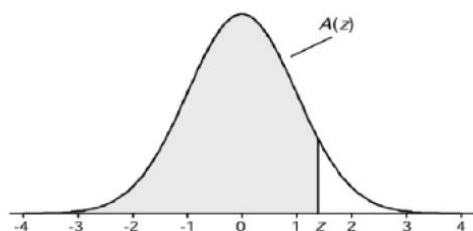
$$P(\bar{x} > 172) = P\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{172 - 170}{\frac{5}{\sqrt{36}}}\right) = P(z > 2/4) = 1 - \phi(2/4) = 1 - 0.6915 = 0.3085$$

$$p = \frac{x}{n} \Rightarrow x = n.p \Rightarrow x = 10000 \times 0.3085 = 3085$$

جدول توزیع نرمال استاندارد

TABLE A.1

Cumulative Standardized Normal Distribution



$A(z)$ is the integral of the standardized normal distribution from $-\infty$ to z (in other words, the area under the curve to the left of z). It gives the probability of a normal random variable not being more than z standard deviations above its mean. Values of z of particular importance:

z	$A(z)$	
1.645	0.9500	Lower limit of right 5% tail
1.960	0.9750	Lower limit of right 2.5% tail
2.326	0.9900	Lower limit of right 1% tail
2.576	0.9950	Lower limit of right 0.5% tail
3.090	0.9990	Lower limit of right 0.1% tail
3.291	0.9995	Lower limit of right 0.05% tail

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999							

منابع

آمار و کاربرد آن در مدیریت جلد اول	دکتر عادل آذر	انتشارات سمت
آمار و کاربرد آن در مدیریت جلد دوم	دکتر عادل آذر	انتشارات سمت
آمار و کاربرد آن در مدیریت جلد اول	دکتر خدیجه جمشیدی	دانشگاه پیام نور
آمار و کاربرد آن در مدیریت جلد دوم	دکتر خدیجه جمشیدی	دانشگاه پیام نور
آمار و احتمال	شلدون راس	دانشگاه فردوسی مشهد
احتمال و کاربرد آن	دکتر علی عمیدی	دانشگاه پیام نور
آمار مهندسی لیبرمن	دکتر هاشم محلوچی	مرکز نشر دانشگاهی