

۷	ریاضی ۱ پودمان ۱
۷	پودمان ۱ نسبت و تناسب
۷	۱-نسبت های مستقیم
۷	تعریف نرخ:
۷	۲-نسبت های معکوس
۸	واحدهای اندازه گیری انگلیسی طول:
۹	واحدهای اندازه گیری جرم انگلیسی
۱۱	نمونه سوالات ریاضی ۱ پودمان ۱
۱۲	ریاضی ۱ پودمان ۲
۱۲	درصدها
۱۳	درصد تغییر:
۱۵	نمونه سوال ریاضی ۲ پودمان ۲
۱۶	ریاضی ۱ پودمان ۳
۱۷	معادله درجه دو
۱۷	روش هندسی حل معادله درجه ۲
۱۹	تابع خطی
۲۰	حل معادله درجه دو به روش جبری
۲۲	روش های تجزیه برای حل معادلات درجه ۲
۲۷	نمونه سوالات ریاضی ۱ پودمان ۳
۲۸	ریاضی ۱ پودمان ۴
۲۸	یادآوری روابط توان
۲۸	نمایش اعداد به صورت رادیکالی
۲۸	تقسیم باکتری
۳۰	رسم تابع نمایی:
۳۱	نمونه سوالات پودمان ۴ ریاضی ۱
۳۲	پودمان ۵ ریاضی ۱
۳۲	قضیه تالس
۳۲	قضیه تالس در خطوط موازی
۳۲	حالت های تشابه دو مثلث
۳۲	برابری در مثلث قائم الزاویه
۳۳	مثلثات
۳۳	روابط مهم:
۳۶	کاربردهای مثلثات
۳۷	نمونه سوال ریاضی ۱ پودمان ۵
۵۱	پودمان ۳ ریاضی ۲

۵۱	تعریف دایره مثلثاتی.....
۵۲	واحدهای مختلف زاویه
۵۴	محاسبه نسبتهای مثلثاتی ربع دوم.....
۵۵	محاسبه نسبتهای مثلثاتی ربع سوم.....
۵۶	محاسبه نسبتهای مثلثاتی ربع چهارم.....
۵۶	محاسبه نسبتهای مثلثاتی بیشتر از ۳۶۰ درجه.....
۵۷	نوشتن معادله خط راست با داشتن مختصات یک نقطه و زاویه با محور طول ها:.....
۵۷	استاندارد کردن معادله خط.....
۳۸	ریاضی ۲ پودمان ۱.....
۳۸	تابع:
۳۸	رابطه بین کمیت ها:
۳۸	دامنه.....
۳۸	برد.....
۳۹	تعریف تابع.....
۴۰	بازه ها
۴۰	تعیین دامنه تعریف توابع از ضابطه تابع.....
۴۲	نمونه سوال.....
۴۳	ریاضی ۲ پودمان ۲.....
۴۳	تابع خطی.....
۴۳	تابع ثابت.....
۴۴	رسم به روش انتقال.....
۴۵	رسم نمودارهای درجه ۲.....
۴۶	تشخیص جواب معادله از روی نمودار.....
۴۷	نامعادله ها.....
۶۰	ریاضی ۲ پودمان ۴.....
۶۰	لگاریتم.....
۶۰	یادآوری روابط توان.....
۶۰	تعریف لگاریتم.....
۶۱	روابط مهم لگاریتم.....
۶۳	محاسبه تعداد مراحل تقسیم باکتری و زمان آن :.....
۶۵	نمونه سوال پودمان ۴.....
۶۶	ریاضی ۲ پودمان ۵.....
۶۶	پارامترهای مرکزی.....
۶۶	تعریف میانگین حسابی.....
۶۶	تعریف میانه.....
۶۶	تعریف چارک اول.....
۶۶	تعریف چارک دوم.....

- ۶۶تعریف چارك سوم
- ۶۷نمودار جعبه ای
- ۶۷مد یا نما
- ۶۸ضریب همبستگی
- ۶۹رگرسیون

مقدمه

با توجه به توسعه روز افزون علم و آشنایی نیاز مبرم به یادگیری ریاضیات و علوم پایه از جمله نیازهای علوم تجربی است. این کتاب بر اساس تجربه ی سال ها تدریس در دروس مختلف جهت سهولت در درس آموزش ریاضیات ۲۰ نوشته شده است. این مجموعه شامل تدریس کلیه مطالبی است که در سالهای متفاوت در آزمون های مختلف مطرح شده می باشد. در این اثر سعی شده است تا پاسخ هر مثال به صورت کاملاً ساده و روان بیان شود تا کلیه هنرجویانی که نیاز به منبعی در مورد ریاضیات ۲۰ دارند بتوانند از مطالب آن استفاده کنند. خواهشمند است هرگونه پیشنهاد در مورد بهبود این کتاب را به اینجانب با شماره ۰۹۱۲۳۲۱۱۰۷۸ اطلاع دهید.

با تشکر

علی زارعی

ریاضی ۱ پودمان ۱

پودمان ۱ نسبت و تناسب

۱-نسبت های مستقیم

تعریف نسبت مستقیم: به نسبت هایی گفته میشود که با افزایش یک کمیت (متغیر) ، کمیت (متغیر) دیگر افزایش یابد و بالعکس مثلاً اگر بخواهیم شربت با یک طعم خاص درست کنیم اگر مقدار آب افزایش یابد مقدار شربت غلیظ نیز افزایش می یابد یا اگر مسافت بیشتری با یک ماشین برویم بنزین بیشتری مصرف میشود و مثالهایی از این قبیل

در حالت کلی دو نسبت a به b و c به d مساوی اند هر گاه برای یک عدد مانند K داشته باشیم

$$a = k \times b \quad , \quad c = k \times d \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

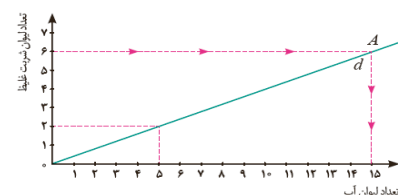
مثال: برای تهیه ۷ لیوان شربت به ۵ لیوان آب ۲ لیوان شربت غلیظ اضافه می کنیم اگر بخواهیم با ۶ لیوان شربت غلیظ با همان طعم شربت درست کنیم چند لیوان آب باید اضافه کنیم؟

با جدول تناسب

روش نمودار

آب	۵	x
شربت	۲	۶

$$\Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{x}{6} \Rightarrow 5 * 6 = 2 * x \Rightarrow x = \frac{5 * 6}{2} = 15$$



مثال: اگر یک ماشین با طی مسافت ۱۰۰ کیلومتر ۸ لیتر بنزین مصرف کند برای مسافت ۲۵۰ کیلومتر چقدر بنزین مصرف میکند.

مسافت	۱۰۰	۲۵۰
بنزین	۸	x

$$\Rightarrow \frac{100}{8} = \frac{250}{x} \Rightarrow 250 * 8 = 100 * x \Rightarrow x = \frac{250 * 8}{100} = 20$$

تعریف نرخ: نسبت دو کمیت متناسب با واحدهای مختلف را نرخ می نامند

به عنوان مثال مبلغ پرداختی با وزن کالا هر چه وزن کالا افزایش یابد قیمت کالا افزایش میابد بنابر این متناسب هستند به همین ترتیب مصرف سوخت با مسافت طی شده متناسب است.

۲-نسبت های معکوس

به نسبت هایی گفته میشود که با افزایش یک کمیت (متغیر) ، کمیت (متغیر) دیگر کاهش یابد و بالعکس

به عنوان مثال اگر تعداد کارگران افزایش یابد زمان انجام کار کاهش می یابد و بالعکس به همین ترتیب زمان مطالعه کتاب و زمان اتمام خواندن کتاب یا زمان سوختن شمع و ارتفاع باقیمانده شمع یا سرعت اتومبیل و زمان رسیدن به مقصد یا تعداد شیرهای باز و پر شدن آب استخر

اگر a و b دو کمیت متناسب و معکوس باشند و c و d دو مقدار متناظر باشند داریم

$$k = a \times b = c \times d \Rightarrow b = \frac{k}{a}, \quad d = \frac{k}{c}$$

مثال: با تعداد ۲ کارگر نقاش کار در ۶ روز تمام میشود در حالتهای زیر تعداد روز برای اتمام کار را بدست آورید.

a) ۴ کارگر نقاش (b) ۱۲ کارگر نقاش

c) اگر بخواهیم در دو روز کار تمام شود چند کارگر نیاز است

d) نمودار تعداد کارگر بر حسب اتمام روزهای کار را رسم کنید

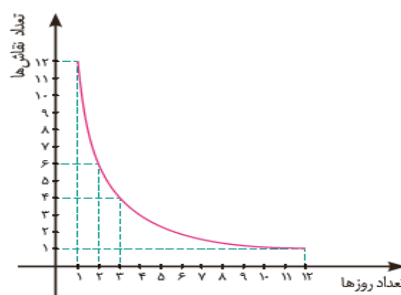
نفر روز است k) واحد a

$$a) k = a * b = 2 * 6 = 12$$

$$c) \frac{k}{b} = \frac{12}{4} = 3$$

$$b) c = \frac{k}{b} = \frac{12}{12} = 1$$

$$c) d = \frac{k}{c} = \frac{12}{2} = 6$$



واحدهای اندازه گیری انگلیسی طول:

همانطور که میدانیم واحدهای طول عبارتند از: SI یعنی اندازه گیری را در یک بعد انجام دهید در سیستم

یعنی میکرو متر μm یعنی کیلومتر - km یعنی دسی متر - dm یعنی سانتیمتر cm یعنی متر - m

$$1m = 100cm \quad 1m = 1000mm \quad 1cm = 10mm \quad 1dm = 10cm$$

$$1m = 10dm \quad 1km = 1000m \quad 1\mu m = 10^{-6}m$$

مثال: ۵۰۰ دسی متر چند متر است. چون نسبت مستقیم است

متر m	۱	x
دسی متر dm	۱۰	۵۰۰

$$\Rightarrow x = \frac{500 \times 1}{10} = 50m$$

ولی در سیستم انگلیسی از واحدهای دیگر استفاده میشود هر اینچ (in) تقریباً ۲/۵۴ سانتیمتر است و رابطه

واحدهای دیگر بصورت زیر است.

واحد طول در سیستم SI متر است و در سیستم انگلیسی یارد است.

۱۲ اینچ (in) = ۱ فوت (ft)
۳ فوت (ft) = ۱ یارد (yd)
۵,۲۸۰ فوت (ft) = ۱ مایل (mi)

مثال : شش فوت چند اینچ است؟

اینچ in	۱۲	x
فوت ft	۱	۶

$$\Rightarrow x = \frac{6 \cdot 12}{1} = 72 \text{ in}$$

مثال : یک مایل چند کیلومتر است با اطلاعات بالا محاسبه کنید.

$$1 \text{ mil} = 5280 \text{ ft} = 5280 \cdot 12 = 63360 \text{ in} = 63360 \cdot \frac{2}{54} = 160934 / 4 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \frac{160934 / 4}{100} = 1609 / 34 \text{ m} \Rightarrow \frac{1609 / 34}{1000} = 1 / 60934 \text{ km}$$

بنابر این $1 \text{ mil} \approx 1 / 61 \text{ km}$ و $1 \text{ mil} = 160934 \text{ m}$ است

واحدهای اندازه گیری جرم انگلیسی :

همانطور که میدانیم در سیستم SI واحد جرم کیلوگرم (Kg) است ولی در سیستم انگلیسی و جرم پوند (Lb) است و

واحد کوچکتر آن اونس (oz) میباشد. با توجه به اینکه هر اونس تقریباً ۲۸ گرم (g) است. میتوانیم روابط بین سیستم

انگلیسی و SI را بدست آوریم گرم (g) ۲۸ $\simeq$ (oz) ۱ اونس همچنین اونس (oz) ۱۶ (lb) = ۱ پوند

مثال ۱: قیمت هر اونس طلا در یک روز ۱۸۵۰ دلار و قیمت دلار در همان روز ۲۵۰۰۰ تومان باشد تعیین کنید. (قیمت جهانی)

الف) قیمت هر اونس به تومان ب) قیمت هر گرم به تومان پ) قیمت ۲۰ گرم طلا

الف) $1850 \cdot 25000 = 46250000$ = قیمت هر اونس به تومان (الف)

ب) $\Rightarrow \frac{46250000 \cdot 1}{28} = 1.651.785$ = قیمت هر گرم به تومان (ب)

$$\text{پ (۲۰ گرم طلا)} = ۲۰ * ۱۶۵۱۷۸۵ = ۳۳۰۳۵۷۱۴$$

مثال ۲: اگر قیمت طلای ۲۴ عیار هر گرم ۱۸۰۰۰۰۰ تومان باشد قیمت طلای ۱۸ عیار چقدر است

$$\text{قیمت طلای ۱۸ عیار} \Rightarrow 1.800.000 * \frac{18}{24} = 1.350.000$$

مثال ۳: جرم مغز انسان به طور متوسط ۳ پوند میباشد جرم مغز انسان تقریباً چند کیلو گرم است

$$1Lb = 28 * 16 = 448g \approx 450g$$

$$\text{جرم مغز انسان} = 3 * 450 = 1350g / 1000 = 1.35kg$$

اندازه گیری دما: همانگونه که میدانیم دما بر سانتی گراد یا سلسیوس بیان میشود و در سیستم انگلیسی دما بر حسب فارنهایت میباشد که رابطه بین دو دما سنج به صورت زیر است.

F: دما بر حسب فارنهایت و C: دما بر حسب سلسیوس

$$F = \frac{9}{5}C + 32 \quad \text{یا} \quad F = 1/8C + 32 \quad \text{بنابراین} \quad F = 1/8C + 32 \Rightarrow C = \frac{F - 32}{1/8}$$

مثال ۴: دمای نقطه ای ۵۰ درجه سانتیگراد است دمای این نقطه چند درجه فارنهایت است

$$F = 1/8C + 32 \xrightarrow{C=50} F = 1/8 * 50 + 32 = 122$$

مثال ۵: دمای نقطه ای ۵۰ درجه فارنهایت است دمای این نقطه چند درجه سلسیوس است.

$$F = 1/8C + 32 \xrightarrow{F=50} 50 = 1/8C + 32 \Rightarrow 50 - 32 = 1/8C \Rightarrow 18 = 1/8C \Rightarrow C = \frac{18}{1/8} = 10$$

نمونه سوالات ریاضی ۱ پودمان ۱

۱- برای تهیه ۱۰ لیوان شربت، ۷ لیوان آب را به ۳ لیوان شربت غلیظ اضافه می‌کنیم. اگر بخواهیم با ۱۵ لیوان شربت غلیظ، شربتی با همان مقدار شیرینی درست کنیم، چند لیوان آب باید به آن اضافه کنیم؟ نمودار آن را رسم کنید

۲- بنزین مصرفی یک ماشین و مسافت طی شده، دو کمیت متناسب اند. برخی ماشین‌ها مسافت

۱۰۰ کیلومتر را با مصرف ۸ لیتر بنزین طی می‌کنند.

الف) نمودار مصرف بنزین بر حسب مسافت را رسم کنید

ب) نرخ مسافت طی شده به مصرف بنزین چقدر است و چه چیزی را نشان می‌دهد؟

پ) نرخ مصرف بنزین به مسافت طی شده چقدر است و چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۳- علی هر شب ۲ صفحه از کتابی را مطالعه می‌کند. او کتاب را در ۴۰ روز تمام می‌کند. اگر علی بخواهد کتاب را در ۱۵ روز تمام کند، هر شب باید چند صفحه از آن را بخواند؟

۴- ۱۰ کارگر میتوانند کاری را مدت ۱۶ روز به پایان برسانند. بعد از گذشت ۱۵ روز از شروع کار برای آنکه کار زودتر تمام شود. یک کارگر به تعداد کارگران اضافه کردند کار چند روزه تمام میشود

۵- الف) دمای هوا در نقطه ای ۶۰ درجه سلسیوس است دمای این نقطه چند درجه فارنهایت است

ب) دمای هوا در نقطه ای ۹۸ درجه فارنهایت است دمای این نقطه چند درجه سانتیگراد است

۶- در چه دمایی دماسنج فارنهایت و سلسیوس یک عدد را نشان میدهند.

۷- در یک مسابقه اتومبیل رانی. اتومبیل برنده مسابقه مسافت ۶۰ مایلی را طی میکند و برنده میشود آخرین اتومبیل مسافت ۵۸ مایل و ۱۲۰۰ یارد و ۵ فوت را طی کرده است مسافت باقیمانده که باید اتومبیل آخر طی کند تا به خط پایان برسد چند اینچ است.

۸- قیمت هر انس طلا در یک روز ۱۸۰۰ دلار است. اگر قیمت دلار در همان روز ۳۵۰۰۰ تومان باشد. قیمت ۸ گرم طلا بر حسب تومان چقدر میشود؟ قیمت ۸ گرم طلای ۱۸ عیار چقدر میشود.

۹- اتومبیلی مسیری را با سرعت ۹۰ کیلومتر بر ساعت در مدت ۶ ساعت طی میکند. بعد از گذشت دو ساعت سرعتش به ۱۲۰ کیلومتر بر ساعت می‌رسد. اتومبیل پس از چه مدت به مقصد می‌رسد.

۱۰- در یک مسابقه اتومبیل رانی. اتومبیل برنده مسابقه مسافت ۶۰ مایلی را طی میکند و برنده میشود آخرین اتومبیل مسافت ۵۷ مایل و ۱۸۰۰ یارد و ۸ فوت را طی کرده است مسافت باقیمانده که باید اتومبیل آخر طی کند تا به خط پایان برسد چند اینچ است.

ریاضی ۱ پودمان ۲

درصدها

مثال: پیراهنی به قیمت ۸۰۰۰۰ تومان فروخته میشود اگر ۲۰٪ تخفیف داده شود برای خرید پیراهن چقدر باید پرداخت شود.

$$100\% - 20\% = 80\%$$

$$80000 * 80\% = 80000 * \frac{80}{100} = 64000$$

مثال: برای خرید پیراهنی با ۲۰٪ تخفیف مبلغ ۱۰۰۰۰۰ تومان پرداخت کرده ایم قیمت پیراهن بدون تخفیف چقدر بوده است

$$100\% - 20\% = 80\%$$

۸۰	۱۰۰۰۰۰
۱۰۰	x

$$\Rightarrow 100000 * \frac{100}{80} = 125000$$

تست - فروشنده ای کالایی را با ۲۰٪ سود به قیمت ۱۲۰,۰۰۰ تومان و بار دیگر کالایی را با ۲۰٪ ضرر به قیمت ۱۲۰,۰۰۰ فروخت در مورد سود یا زیان فروشنده در این دو معادله کدام گزینه درست است؟

(۱) ۱۰۰۰۰ تومان سود کرده است.

(۲) ۱۰۰۰۰ تومان ضرر کرده است.

(۳) نه سود و نه زیان کرده است.

(۴) ۳۰۰۰۰ تومان ضرر کرده است (سال ۱۳۹۹)

$$100\% + 20\% = 120\%$$

مبلغ	درصد
x	۱۰۰
۱۲۰۰۰	۱۲۰

$$x = \frac{120,000 \times 100}{120} = 100,000$$

$$120,000 - 100,000 = 20,000 \quad \text{سود فروش}$$

$$100\% - 20\% = 80\%$$

مبلغ	درصد
x	۱۰۰
۱۲۰۰۰	۸۰

$$x = \frac{120,000 \times 100}{80} = 150,000$$

$$150,000 - 120,000 = -30,000 \quad \text{زیان فروش}$$

$$-30,000 + 20,000 = -10,000$$

بنابراین ده هزار تومان زیان کرده است

گزینه ۲ صحیح است

درصد تغییر:

مثال: قیمت کالایی ۴۰۰۰۰ تومان است اگر قیمت این کالا ۲۵٪ افزایش پیدا کند قیمت کالا چقدر میشود

x: قیمت قدیم Δ: تغییر قیمت y: قیمت جدید

$$\Delta = 25\% * 40000 = 40000 * \frac{25}{100} = 10000$$

$$y = x + \Delta = 40000 + 10000 = 50000$$

یا

$$40000 * (1 + 0.25) = 40000 * 1.25 = 50000$$

برای هر دو کمیت متناسب $\frac{\text{مقدار اولیه} - \text{مقدار نهایی}}{\text{مقدار اولیه}} = \text{نسبت تغییر و حاصل } 100 \times \frac{\text{مقدار اولیه} - \text{مقدار نهایی}}{\text{مقدار اولیه}} = \text{درصد تغییر گویند}$

$$\text{بنابر این} \quad \text{درصد تغییر} = \frac{\Delta}{x} * 100 \quad \text{یا} \quad \text{درصد تغییر} = \frac{y - x}{x} * 100$$

مثال: وزن نوزادی در هنگام تولد ۳/۵ کیلوگرم بود. در معاینه بعدی وزن او ۵ کیلوگرم بود. درصد افزایش وزن

کودک چقدر بوده است؟

$$\text{درصد تغییر وزن} = \frac{y - x}{x} * 100 = \frac{5 - 3/5}{3/5} * 100 \approx 43\%$$

مثال: یک کتاب فروشی در آذر ماه ۳۰۰ جلد کتاب کمتر از ماه آبان فروخته است. اگر در ماه آبان ۱۲۰۰ جلد کتاب

فروخته باشد. درصد تغییر میزان فروش این کتاب فروشی چقدر است؟

$$\text{درصد تغییر فروش} = \frac{y - x}{x} * 100 = \frac{\Delta}{x} * 100 = \frac{-300}{1200} * 100 = -25\%$$

علامت منفی یعنی فروش کمتر بوده است.

مثال: اگر درصد تغییر قیمت کالایی ۲۰٪- و قیمت جدید کالا ۸۰۰۰۰ تومان باشد قیمت اولیه کالا چقدر بوده

است.

$$\begin{aligned} \text{درصد تغییر} = \frac{y - x}{x} * 100 &\Rightarrow -\frac{20}{100} = \frac{80000 - x}{x} \Rightarrow -\frac{2}{10} = \frac{80000 - x}{x} \Rightarrow -2x = 800000 - 10x \\ \Rightarrow 10x - 2x &= 800000 \Rightarrow 8x = 800000 \Rightarrow x = \frac{800000}{8} = 100000 \end{aligned}$$

مثال: اگر قیمت اولیه کالا را با x و قیمت جدید را با y نشان دهیم و رابطه $y = 4x$ رابطه بین قیمت اولیه و قیمت

جدید این کالا را نشان می دهد.

(a) درصد تغییر را بدست آورید.

(b) اگر قیمت کالا در سال گذشته ۵۰۰۰ تومان بوده باشد امسال چند تومان است.

(c) اگر قیمت کالایی امسال ۸۰۰۰ تومان باشد قیمت کالا سال گذشته چقدر بوده است

$$a) \frac{y-x}{x} * 100 = \frac{4x-x}{x} * 100 = \frac{3x}{x} * 100 = 3 * 100 = 300\%$$

$$b) y = 4x \xrightarrow{x=5000} y = 4 * 5000 = 20000$$

$$c) y = 4x \Rightarrow x = \frac{y}{4} \xrightarrow{y=8000} x = \frac{8000}{4} = 2000$$

مثال: - طول ضلع هریک مکعب بر اثر گرما ۰/۲ واحد افزایش یافته اگر طول ضلع اولیه این مکعب ۳ واحد باشد .
درصد تغییر حجم مکعب را حساب کنید

A: طول یک ضلع V_1 : حجم قدیم V_2 : حجم جدید ΔV : درصد تغییر

$$V_1 = a^3 = 3^3 = 27$$

$$V_2 = (3 + 0.2)^3 = 3.2^3 = 32.768$$

$$\% \Delta v = \frac{V_2 - V_1}{V_1} * 100 = \frac{32.768 - 27}{27} * 100 = \frac{5.768}{27} * 100 = 21.36\%$$

نمونه سوال ریاضی ۲ پودمان ۲

۱- اگر در خرید کالا پس از ۲۰٪ تخفیف مبلغ ۱۰۰۰۰۰ تومان پرداخت کرده باشیم قیمت اصلی کالا چقدر است؟

۲- چند درصد از عدد ۱۵۰ میشود عدد ۶۰

۳- اگر دروازه بان از ۱۲ ضربه ۹ ضربه را مهار کند چند درصد توپها وارد دروازه شده است؟

۴- اگر ۳٪ از جمعیت شهری ۴۰۰۰۰ نفر باشد کل جمعیت شهر چند نفر بوده است؟

۵- اگر طول و عرض پارک ۳۰٪ افزایش یابد درصد تغییر مساحت این پارک را بدست آورید.

۶- کارمندی ماهانه ۸۰۰۰۰۰۰ تومان حقوق دریافت میکند از این مبلغ ۷٪ بیمه و ۱۰٪ مالیات کسر میشود دریافتی ماهانه کارمند چقدر است.

۷- اگر درصد تغییر قیمت کالایی ۲۰٪- و قیمت جدید کالا ۸۰۰۰۰ تومان باشد قیمت اولیه کالا چقدر بوده است.

۸- اگر درصد تغییر قیمت کالایی ۴۰٪ و قیمت جدید کالا ۸۰۰۰۰ تومان باشد قیمت اولیه کالا چقدر بوده است.

۹- اگر قیمت اولیه کالا را با x و قیمت جدید را با y نشان دهیم و رابطه $y=3x$ رابطه بین قیمت اولیه و قیمت جدید این کالا را نشان می دهد.

الف) درصد تغییر را بدست آورید.

ب) اگر قیمت کالا در سال گذشته ۵۰۰ تومان بوده باشد امسال چند تومان است.

پ) اگر قیمت کالایی امسال ۶۰۰۰ تومان باشد قیمت کالا سال گذشته چقدر بوده است

۱۰- اگر قیمت اولیه یک کالا را با x و قیمت جدید y باشد و رابطه بین قیمت جدید و اولیه به باشد

$$y = \frac{2}{5}x$$

الف) درصد تغییر قیمت

ب) اگر قیمت اولیه کالایی ۵۰۰۰۰ تومان باشد قیمت جدید کالا چقدر است

پ) اگر قیمت جدید کالایی ۱۲۰۰۰۰۰ تومان باشد قیمت اولیه کالا چقدر بوده است

۱۱- طول ضلع هریک مکعب بر اثر گرما ۱/۰ واحد افزایش یافته اگر طول ضلع اولیه این مکعب ۲ واحد باشد. درصد تغییر حجم مکعب را حساب کنید

ریاضی ۱ پودمان ۳

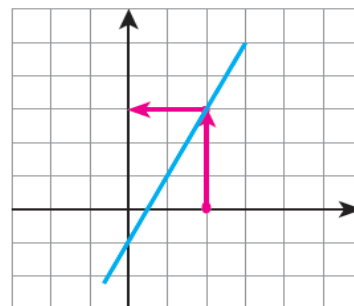
به بزرگترین توان در هر چند جمله ای **درجه معادله** گویند بنابراین به معادله به فرم $ax + b = 0$ که در آن $a \neq 0$ باشد معادله درجه یک گفته میشود. مانند $3x - 7 = 0$

توابع درجه یک دارای نمودار خطی هستند برای رسم این توابع کافیت دو نقطه دلخواه به x میدهم و y را بر اساس آن تعیین کرده و نمودار بر اساس آنها رسم میشود

مثال: نمودار تابع $y = 2x - 1$ را رسم کنید.

$$y = 2x - 1 \xrightarrow{x=1} y = 2*1 - 1 = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

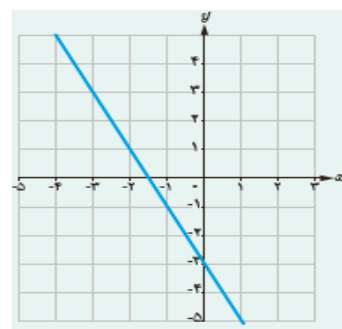
$$y = 2x - 1 \xrightarrow{x=2} y = 2*2 - 1 = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$



مثال: نمودار تابع $y = -6x - 3$ را رسم کنید.

$$y = -6x - 3 \xrightarrow{x=0} y = -6*0 - 3 = -3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

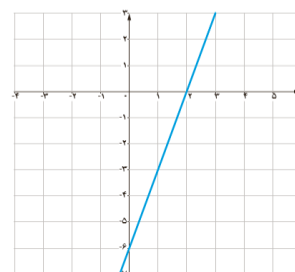
$$y = -6x - 3 \xrightarrow{y=0} 0 = -6x - 3 = 0 \Rightarrow -6x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$



مثال: نمودار تابع $6x - 2y = 12$ را رسم کنید

$$6x - 2y = 12 \xrightarrow{x=0} 6*0 - 2y = 12 \Rightarrow -2y = 12 \Rightarrow y = \frac{12}{-2} = -6 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$6x - 2y = 12 \xrightarrow{y=0} 6x - 2*0 = 12 \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{6} = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$



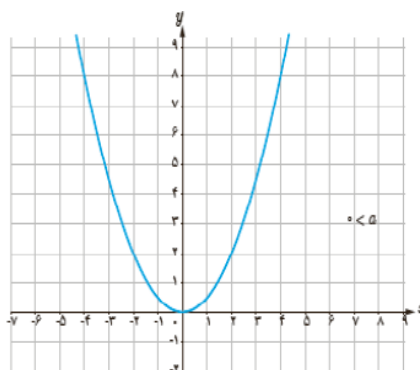
معادله درجه دو

به معادله $ax^2 + bx + c = 0$ معادله درجه دو گویند چون بزرگترین توان x دو است که در آن $a \neq 0$ میباشد. و a, b, c اعداد حقیقی هستند بنابراین معادله $2x^2 - 5x + 8 = 0$ یک معادله درجه دو کامل است چون توان x به ترتیب کم شده است

نمودارهای توابع درجه ۲ شبیه **U** میباشد که جهت آن بستگی به علامت **a** دارد

برای رسم این توابع حداقل سه نقطه به x میدهیم و y را بدست می آوریم و بر اساس آن نمودار را رسم میکنیم.

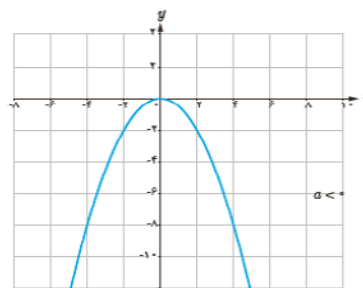
x	$y = x^2$
-۲	$(-2)^2 = +4$
-۱	$(-1)^2 = +1$
۰	$(0)^2 = 0$
۱	$(+1)^2 = +1$
۲	$(+2)^2 = 4$



چون ضریب x^2 مثبت است **U** به طرف بالا است

الف

x	$y = -x^2$
-۲	$-(-2)^2 = -4$
-۱	$-(-1)^2 = -1$
۰	$-(0)^2 = 0$
۱	$-(+1)^2 = -1$
۲	$-(+2)^2 = -4$

**ب**

چون ضریب x^2 منفی است **U** به طرف پایین است

در شکل الف ضریب x^2 مثبت است **U** به طرف بالا و در شکل ب ضریب x^2 منفی و **U** به طرف پایین است

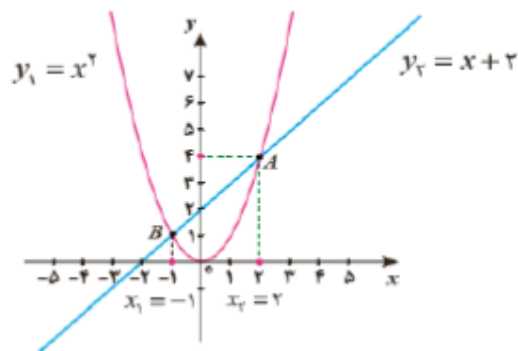
روش هندسی حل معادله درجه ۲ به فرم $x^2 + bx + c = 0$: x^2 را یک طرف معادله و باقی جملات را به طرف دیگر معادله می بریم که علامت آنها قرینه میشود. و نمودار هر طرف معادله را جداگانه رسم می کنیم محل تلاقی دو نمودار جواب معادله است به عبارتی به ازای هر x که y ها برابر باشد جواب معادله است.

مثال: معادله درجه دوم $x^2 - x - 2 = 0$ را به روش هندسی حل کنید

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = x + 2$$

y_1
 y_2

x	-2	-1	0	1	2
$y_1 = x^2$	4	1	0	1	4
$y_2 = x + 2$	0	1	2	3	4



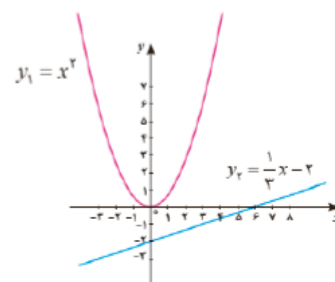
توجه: در جایی که y ها برابر است یعنی x ها جواب (ریشه) معادله است

مثال: معادله درجه دوم $3x^2 - x + 6 = 0$ را به روش هندسی حل کنید.

$$3x^2 - x + 6 = 0 \Rightarrow 3x^2 = x - 6 \xrightarrow{\div 3} x^2 = \frac{x}{3} - 2$$

y_1
 y_2

x	3	-2	-1	0	1	2	3
$y_1 = x^2$	9	4	1	0	1	4	
$y_2 = \frac{x}{3} - 2$	3	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{7}{3}$	-2	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{3}$	-1



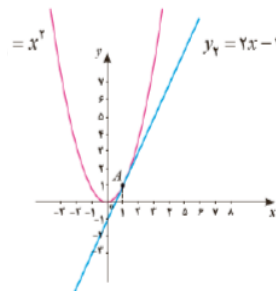
توجه: چون دو نمودار یکدیگر را قطع نمی کنند معادله دارای جواب نیست

مثال ۵: معادله درجه دوم $x^2 - 2x + 1 = 0$ را به روش هندسی حل کنید.

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 2x - 1$$

y_1
 y_2

x	-2	-1	0	1	2
$y_1 = x^2$	4	1	0	1	4
$y_2 = 2x - 1$	-5	-3	-1	1	3



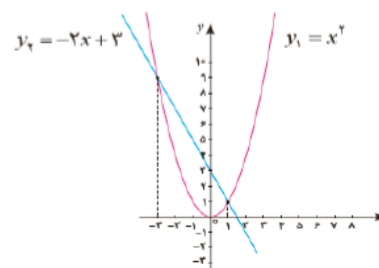
توجه: چون دو نمودار در یک نقطه یکدیگر را قطع می کنند معادله دارای یک جواب است

مثال ۶: معادله درجه دوم $x^2 + 2x - 3 = 0$ را به روش هندسی حل کنید.

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -2x + 3$$

$y_1 \qquad y_2$

x	-3	-2	-1	0	1	2
$y_1 = x^2$	9	4	1	0	1	4
$y_2 = -2x + 3$	9	7	5	3	1	3



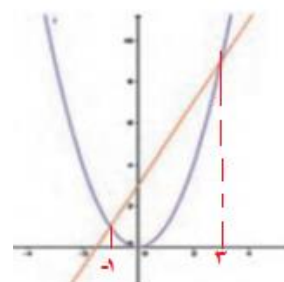
توجه: در جایی که y ها برابر است یعنی x ها جواب (ریشه) معادله است

مثال: معادله درجه دوم $x^2 - 2x - 3 = 0$ را به روش هندسی حل کنید.

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 2x + 3$$

$y_1 \qquad y_2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y_1 = x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$y_2 = 2x + 3$	-3	-1	1	3	5	7	9



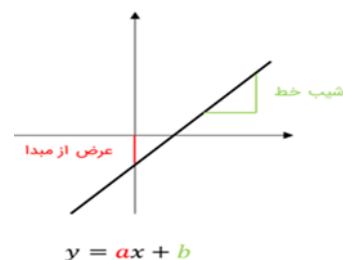
یادآوری

تابع خطی: فرم کلی توابع خطی به صورت $f(x) = ax + b$ و که رابطه و نمودار آنها به صورت زیر است.

$$y = ax + b$$

دامنه
↑
عرض از مبدا
شیب
برد

شیب = $\frac{\text{تغییرات } y}{\text{تغییرات } x}$



نوشتن معادله خط راست با داشتن مختصات دو نقطه

$$1) a = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$2) y - y_1 = m(x - x_1) \quad , \quad y - y_2 = m(x - x_2)$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $A \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ و $B \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$ بگذرد

$$1) m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{11 - 5}{5 - 2} = \frac{6}{3} = 2$$

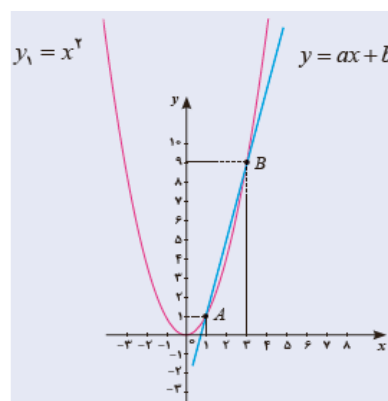
$$2) y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 5 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 4 + 5 \Rightarrow y = 2x + 1$$

مثال: در شکل زیر مقادیر a و b را محاسبه کنید

$$a = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 1}{3 - 1} = 4$$

$$x = 1 \Rightarrow x^2 = ax + b \Rightarrow 1^2 = 4 \times 1 + b \Rightarrow b = 1 - 4 = -3$$

$$x = 3 \Rightarrow x^2 = ax + b \Rightarrow 3^2 = 4 \times 3 + b \Rightarrow b = 9 - 12 = -3$$



حل معادله درجه دو به روش جبری $ax^2 + bx + c = 0$

برای حل معادله درجه دو به روش جبری با به ترتیب مراحل زیر را انجام دهیم

$$1) \Delta = b^2 - 4ac$$

$$2) x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

Δ : مبین معادله x_1 : ریشه اول (جواب اول) x_2 : ریشه دوم (جواب دوم)

پس از محاسبه معادله مقدار Δ سه حالت امکان دارد رخ دهد

۱) ممین معادله بزرگتر از صفر باشد ($0 < \Delta$) در این صورت معادله دارای دو جواب مختلف است. در واقع در روش هندسی نمودارها در دو نقطه یکدیگر را قطع میکنند

۲) ممین برابر صفر باشد ($\Delta = 0$) در این صورت معادله دارای یک جواب است. و میگوییم ریشه مضاعف دارد. در واقع در روش هندسی نمودارها در یک نقطه بر یکدیگر مماس میشوند

۳) ممین معادله کوچکتر از صفر باشد ($\Delta < 0$) در این صورت معادله دارای جواب نیست. در واقع در روش هندسی نمودارها یکدیگر را قطع نمیکند

توجه: جهت حل مسائل به روش جبری حتما باید معادله مساوی صفر باشد

مثال: معادله $x^2 - 5x + 6 = 0$ را به روش جبری حل کنید.

$$a=1, \quad b=-5, \quad c=+6$$

$$1) \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times (1) \times (+6) = 25 - 24 = +1 > 0$$

$$2) \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = +3 \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = +2 \end{cases}$$

چون ($0 < \Delta$) است معادله دو جواب دارد

مثال: معادله $x^2 - 2x - 24 = 0$ را به روش جبری حل کنید.

$$a=1, \quad b=-2, \quad c=-24$$

$$1) \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times (1) \times (-24) = 4 - 96 = +100 > 0$$

چون ($0 < \Delta$) است معادله دو جواب دارد

$$2) \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{100}}{2 \times 1} = \frac{2+10}{2} = \frac{12}{2} = +6 \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{100}}{2 \times 1} = \frac{2-10}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \end{cases}$$

مثال: معادله $x^2 - 4x = -4$ را به روش جبری حل کنید.

$$x^2 - 4x = -4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$a=1, \quad b=-4, \quad c=+4$$

$$1) \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times (1) \times (+4) = 16 - 16 = 0$$

چون ($\Delta = 0$) است معادله دارای ریشه مضاعف است

$$2) x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = 2$$

مثال: معادله $x^2 + 5x + 15 = 0$ را به روش جبری حل کنید.

$$a = 1, \quad b = +5, \quad c = +15$$

$$1) \Delta = b^2 - 4ac = (+5)^2 - 4 \times (1) \times (+15) = 25 - 60 = -35 < 0$$

چون منفی است یعنی $(\Delta < 0)$ است معادله دارای جواب حقیقی نیست

مثال: معادله $3x^2 - 5x - 2 = 0$ را به روش جبری حل کنید.

$$a = 3, \quad b = -5, \quad c = 2$$

$$1) \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times (3) \times (2) = 25 - 24 = 1 > 0$$

چون $(0 < \Delta)$ است معادله دو جواب دارد

$$2) \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 3} = \frac{5+1}{6} = \frac{6}{6} = 1 \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 3} = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0/67 \end{cases}$$

مثال: مقدار m را در معادله $x^2 + 8x + m = 0$ طوری تعیین کنید که معادله دارای ریشه مضاعف باشد.

$$a = 1, \quad b = +8, \quad c = m$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (+8)^2 - 4 \times (1) \times (m) = 64 - 4m = 0$$

$$64 - 4m = 0 \Rightarrow 4m = 64 \Rightarrow m = \frac{64}{4} = 16 \Rightarrow m = 16$$

روش های تجزیه برای حل معادلات درجه ۲

(۱) **روش فاکتورگیری:** در این روش از کوچکترین توان فاکتور میگیریم و مسئله را حل میکنیم

مثال: معادله $x^2 + 6x = 0$ را حل کنید.

$$x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(x + 6) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$$

مثال: معادله $x^3 + 6x^2 + 8x = 0$ را حل کنید.

$$x^3 + 6x^2 + 8x = 0$$

$$x(x^2 + 6x + 8) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

$$a = 1, \quad b = +6, \quad c = +8$$

$$1) \Delta = b^2 - 4ac = (+6)^2 - 4 \times (1) \times (+8) = 36 - 32 = 4 > 0$$

$$2) \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(6) + \sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{-6 + 2}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(6) - \sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{-6 - 2}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \end{cases}$$

(۲) تجزیه به کمک اتحادها

با استفاده از اتحاد جمله مشترک $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ برای سه جمله ای ها و اتحاد مزدوج برای دو جمله ای ها با علامت وسط منفی $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ میتوان معادله را حل کرد.

مثال: معادله $x^2 + 3x - 10 = 0$ را حل کنید.

چون سه جمله ای است اتحاد جمله مشترک $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ استفاده میکنیم

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x+5)(x-2) = 0 \Rightarrow x+5 = 0 \Rightarrow x = -5$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

مثال: معادله $x^2 - 25 = 0$ را حل کنید.

چون دو جمله ای است اتحاد مزدوج $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ استفاده میکنیم

$$x^2 - 25 = 0 \Rightarrow (x+5)(x-5) = 0 \Rightarrow x+5 = 0 \Rightarrow x = -5$$

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x = +5$$

$$x^2 + 7x = -10$$

$$4x^2 - 9x + 5 = 0$$

تمرین: معادلات زیر را حل کنید

نکته ۱: در معادله درجه دو اگر جمع ضرایب صفر شود یکی از ریشه ها یک و دیگری $\frac{c}{a}$ معادله است.

مثال: ریشه های معادله $2x^2 - 7x + 5 = 0$ را بدست آورید.

$$2x^2 - 7x + 5 = 0$$

a b c

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(2)(5) = 49 - 40 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-(-7) - \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{7-3}{4} = \frac{4}{4} = 1 \\ x_2 = \frac{-(-7) + \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{7+3}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

راه تستی: چون $a+b+c=0$ است یعنی $2-7+5=0$ بنابراین یکی از جواب ها یک و دیگری $\frac{c}{a} = \frac{5}{2}$ است

نکته ۲: حاصل جمع ریشه های معادله درجه دو $s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ است

نکته ۳: حاصل ضرب ریشه های معادله درجه دو $p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ است

نکته ۴: بر مبنای اتحاد جمله مشترک میتوان معادله درجه دو را به صورت $x^2 - sx + p = 0$ بدست آورد

مثال: حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه های معادله $x^2 - 5x + 6 = 0$ بدست آورید.

$$1x^2 - 5x + 6 = 0$$

a b c

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 2 + 3 = 5, x_1 \cdot x_2 = 2 \times 3 = 6$$

با توجه به نکته ۲ و ۳ $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\left(\frac{-5}{1}\right) = 5$ ، $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \left(\frac{6}{1}\right) = 6$

مثال: معادله درجه دومی بنویسید که جمع ریشه های آن ۱۲ و حاصل ضرب ریشه های آن ۳۲ باشد

$$s = 12, p = 32 \Rightarrow x^2 - sx + p = 0 \Rightarrow x^2 - 12x + 32 = 0$$

نکته: شرط آنکه در یک معادله درجه دو ریشه معکوس یکدیگر باشند این است که $c = a$ باشد چون

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \xrightarrow{x_1=k, x_2=\frac{1}{k}} k \cdot \frac{1}{k} = 1 = \frac{c}{a} \Rightarrow a = c$$

نکته: شرط آنکه در یک معادله درجه دو ریشه قرینه یکدیگر باشند این است که $b = 0$ باشد چون

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \xrightarrow{x_1=k, x_2=-k} k + (-k) = 0 = -\frac{b}{a} \Rightarrow b = 0$$

نکته: شرط آنکه در یک معادله درجه دو ریشه معکوس یکدیگر و مختلف علامت باشند این است که $c = -a$ باشد چون

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \xrightarrow{x_1=k, x_2=\frac{-1}{k}} k \cdot \frac{-1}{k} = -1 = \frac{c}{a} \Rightarrow a = -c$$

تمرین: جواب معادله های زیر را بدست آورید

$$1) 2x^2 + 5x = 0$$

$$a = 2, \quad b = +5, \quad c = +0$$

$$1) \Delta = b^2 - 4ac = (+5)^2 - 4 \times (2) \times (0) = 25 - 0 = 25 > 0$$

$$2) \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(5) + \sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{-5 + 5}{2} = \frac{0}{2} = 0 \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(5) - \sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{-5 - 5}{4} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$2) 3x^2 + 13x + 3 = 0$$

$$a = 3, \quad b = 13, \quad c = 3$$

$$1) \Delta = b^2 - 4ac = (13)^2 - 4 \times (3) \times (3) = 169 - 36 = 133 > 0$$

$$2) \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(13) + \sqrt{133}}{2 \times 3} = \frac{-13 + \sqrt{133}}{6} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(13) - \sqrt{133}}{2 \times 3} = \frac{-13 - \sqrt{133}}{6} \end{cases}$$

$$3) x^2 + x + 2 = 0$$

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 2$$

$$1) \Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times (1) \times (2) = -7 < 0$$

چون ممیز معادله منفی است بنابراین معادله دارای جواب نیست.

مثال: اگر یکی از جواب معادله $5x^2 + 13x + c = 0$ برابر (-3) باشد جواب دیگر معادله را بدست آورید

می دانیم ریشه های معادله در خود معادله صدق می کند بنابراین به جای x مقدار می گذاریم

$$5x^2 + 13x + c = 0 \Rightarrow 5(-3)^2 + 13(-3) + c = 0 \Rightarrow 45 - 39 + c = 0 \Rightarrow c = -6$$

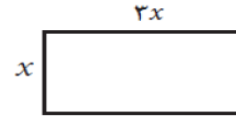
$$\Rightarrow 5x^2 + 13x - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 13^2 - 4 \times 5 \times (-6) = 289$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-(13) + \sqrt{289}}{2(5)} = \frac{-13 + 17}{10} = +0.4 \\ x_2 = \frac{-(13) - \sqrt{289}}{2(5)} = \frac{-13 - 17}{10} = -3 \end{cases}$$

که $x_2 = -3$ در خود سوال داده شده است

مثال: اگر طول مستطیلی سه برابر عرض آن باشد و مساحت مستطیل ۳۰۰ متر مربع باشد طول و عرض و محیط مستطیل را بدست آورید.

$$\text{مساحت} = \text{طول} \times \text{عرض} = x \times 3x = 3x^2 = 300 \Rightarrow x^2 = \frac{300}{3} = 100 \Rightarrow x = \pm 10$$



یا

$$s = x \times 3x = 3x^2 = 300 \Rightarrow 3x^2 - 300 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 100) = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \times 1 \times (-100) = 400$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-0 + \sqrt{400}}{2(1)} = \frac{+20}{2} = +10 \\ x_2 = \frac{-0 - \sqrt{400}}{2(1)} = \frac{-20}{2} = -10 \end{cases}$$

جواب منفی قابل قبول نیست بنابراین طول ۳۰ متر و عرض ۱۰ متر است $s = (x + y) \times 2 = (30 + 10) \times 2 = 80 \text{ m}$

مثال: در یک دوزنقه متساوی الساقین قاعده کوچک ۳x و قاعده بزرگ ۱۲ سانتی متر و ارتفاع ۴x است اگر مساحت دوزنقه ۱۰۸ سانتی متر مربع باشد مقدار x را بدست آورید.

$$\text{ارتفاع} \times \frac{(\text{قاعده بزرگ} + \text{قاعده کوچک})}{2} = \text{مساحت دوزنقه}$$

$$s = \frac{(3x + 12)(4x)}{2} \Rightarrow 108 = \frac{12x^2 + 48x}{2} \Rightarrow 216 = 12x^2 + 48x \Rightarrow 12x^2 + 48x - 216 = 0$$

طرفین را به ۱۲ تقسیم می کنیم

$$x^2 + 4x - 18 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 1 \times (-18) = 16 + 72 = 88$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-4 + \sqrt{88}}{2(1)} = \frac{-4 + \sqrt{4 \times 22}}{2} = \frac{-4 + 2\sqrt{22}}{2} = -2 + \sqrt{22} \\ x_2 = \frac{-4 - \sqrt{88}}{2(1)} = \frac{-4 - \sqrt{4 \times 22}}{2} = \frac{-4 - 2\sqrt{22}}{2} = -2 - \sqrt{22} \end{cases} \quad \text{ق}$$

مثال: حاصل ضرب دو عدد متوالی ۱۳۲ است دو عدد را بدست آورید.

$$(x) \times (x + 1) = 132 \Rightarrow x^2 + x = 132 \Rightarrow x^2 + x - 132 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-132) = 1 + 528 = 529$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1 + \sqrt{529}}{2(1)} = \frac{-1 + 23}{2} = 11 \\ x_2 = \frac{-1 - \sqrt{529}}{2(1)} = \frac{-1 - 23}{2} = -12 \end{cases}$$

هر دو عدد قابل قبول است

مثال: در یک مثلث ارتفاع $3x-1$ سانتی متر و قاعده بزرگ $x+3$ سانتی متر است اگر مساحت مثلث ۲۴ سانتی متر مربع باشد الف) مقدار x را بدست آورید. ب) اندازه قاعده و ارتفاع را بدست آورید.

$$\text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = \text{مساحت مثلث} \times 2$$

$$s = \frac{(3x-1) \times (x+3)}{2} \Rightarrow 24 = \frac{(3x-1) \times (x+3)}{2} \Rightarrow 48 = 3x^2 + 9x - x - 3 \Rightarrow 3x^2 + 8x - 51 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 3 \times (-51) = 64 + 612 = 676$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-(8) + \sqrt{676}}{2(3)} = \frac{-8 + 26}{6} = 3 \\ x_2 = \frac{-(8) - \sqrt{676}}{2(3)} = \frac{-8 - 26}{6} = -\frac{34}{6} = -\frac{17}{3} \end{cases}$$

$$\text{ارتفاع} = 3x-1 = 3 \times 3 - 1 = 8 \quad \text{قاعده} = x+3 = 3+3 = 6$$

نمونه سوالات ریاضی ۱ پودمان ۳

۱- حاصل عبارتهای جبری زیر را بدست آورید و درجه آن را بنویسید

$$a) (x^2 - 5x + 3) \cdot (2x^3 - 6x)$$

$$b) (3x^4 - 2) \cdot (2x^5 - 6x^3)$$

۲- معادله های زیر را به روش هندسی حل کنید.

$$a) x^2 - 2x - 3 = 0 \quad b) x^2 + x - 2 = 0$$

$$c) x^2 + 2x + 6 = 0 \quad d) x^2 - 2x + 1 = 0$$

۳- معادلات زیر را حل کنید.

$$a) x^2 - 8x - 20 = 0 \quad b) 2x^2 + 5x = 3 \quad c) x^3 + 7x^2 + 10x = 0$$

$$d) x^2 - 2x - 3 = 0 \quad e) x^2 + x - 2 = 0 \quad f) x^2 + 2x + 6 = 0$$

۴- در معادله $x^2 - 5x + m = 0$ مقدار m را طوری تعیین کنید که ریشه مضاعف داشته باشد.

۵- در معادله $x^2 - 3x + c = 0$ مقدار c را طوری تعیین کنید که (۲-) یکی از ریشه های آن باشد داشته باشد.

۶- در یک مثلث ارتفاع مثلث ۴ برابر قاعده آن است اگر مساحت مثلث ۲۰۰ سانتی متر مربع باشد اندازه ارتفاع و قاعده مثلث را بدست آورید

ریاضی ۱ پودمان ۴

یادآوری روابط توان

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \Rightarrow 8^9 \times 8^{10} = 8^{9+10} = 8^{19}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \Rightarrow 5^6 \div 5^4 = 5^{6-4} = 5^2 = 25$$

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m \Rightarrow 3^6 \times 5^6 = (3 \times 5)^6 = 15^6$$

$$a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m \Rightarrow 15^8 \div 5^8 = \left(\frac{15}{5}\right)^8 = 3^8$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \Rightarrow 7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$$

نمایش اعداد به صورت رادیکالی

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{ریشه } n \text{ ام } a \text{ به توان } m \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ است به عنوان مثال: } 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$$

سوال - تفاضل ریشه سوم عدد ۶۴ با عدد $(\frac{1}{4})^{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \times 4^{\frac{\sqrt{2}}{4}}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳ (سال ۱۴۰۳)

تقسیم باکتری

فرض کنیم جرم m_0 جرم اولیه یک نوع باکتری پس از n مرحله جرم آن به m برسد که در آن $n = \frac{t}{T}$ و t کل زمان و T زمان تقسیم باکتری باشد و a نسبتی است که باکتری افزایش یا کاهش

می یابد. در این صورت $m = m_0 \times a^n \Rightarrow m = m_0 \times a^{\frac{t}{T}}$ می یابد. در این صورت $a=5$ در نظر گرفته میشود.

مثال: وزن یک نوع باکتری پس از یک ساعت ۵ برابر میشود وزن چهارگرم از این باکتری پس از سه ساعت چقدر میشود؟

$$m_0=4, T=1h, t=3, a=5$$

$$4 \xrightarrow{T=1} 4 \times 5^1 = 20 \xrightarrow{T=1} 4 \times 5^2 = 100 \xrightarrow{T=1} 4 \times 5^3 = 500$$

$$m = m_0 \times a^{\frac{t}{T}} \Rightarrow m = 4 \times 5^{\frac{3}{1}} = 4 \times 125 = 500$$

مثال: وزن یک نوع باکتری پس از یک ساعت دو برابر میشود وزن یک گرم از این باکتری پس از نیم ساعت چقدر میشود؟

$$m_0=1, T=1h, t=\frac{1}{2}, a=2$$

$$m = m_0 \times a^{\frac{t}{T}} \Rightarrow m = 1 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

مثال: وزن یک نوع باکتری پس از یک ساعت ۲ برابر میشود وزن یک گرم از این باکتری پس از بیست دقیقه چقدر میشود؟

$$m_0=1, T=1h, t=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}, a=2$$

$$m = m_0 \times a^{\frac{t}{T}} \Rightarrow m = 1 \times 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$$

مثال: وزن یک نوع عنصر رادیواکتیو پس از یک ساعت نصف میشود وزن یک گرم از این عنصر پس از سه ساعت چقدر میشود؟

$$m_0=1, T=1h, t=3, a=\frac{1}{2}$$

$$m = m_0 \times a^{\frac{t}{T}} \Rightarrow m = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

سوال: وزن یک نوع باکتری پس از یک ساعت ۸ برابر میشود وزن ۵ گرم از این باکتری پس از بیست دقیقه چقدر میشود؟

تعریف: اگر a یک عدد حقیقی و k عدد زوج ($k=2n$) باشد آنگاه $\sqrt[k]{a^k} = |a|$

مثال: حاصل $\sqrt[4]{\left(\frac{2}{3}\right)^4}$, $\sqrt[4]{\left(-\frac{1}{5}\right)^4}$, $\sqrt[4]{(2-\sqrt{5})^4}$ را بدست آورید

$$\sqrt[4]{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \left|\left(\frac{2}{3}\right)\right| = \frac{2}{3} , \quad \sqrt[4]{\left(-\frac{1}{5}\right)^4} = \left|-\frac{1}{5}\right| = -\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

$$\sqrt[4]{(2-\sqrt{5})^4} = \underbrace{|(2-\sqrt{5})|}_{\text{مذف ی}} = -(2-\sqrt{5}) = -2 + \sqrt{5} = \sqrt{5} - 2$$

تعریف: اگر a یک عدد حقیقی و k عدد فرد ($k=2n+1$) باشد آنگاه $\sqrt[k]{a^k} = a$

مثال: حاصل رادیکال $\sqrt[7]{(1-\sqrt{8})^7}$ را محاسبه کنید

$$\sqrt[7]{(1-\sqrt{8})^7} = (1-\sqrt{8})$$

نکته ۱: شرط آنکه دو رادیکال با یکدیگر ضرب یا تقسیم شوند این است فرجه های آنها برابر باشد که در این صورت عبارات زیر رادیکال ضرب یا تقسیم می شوند.

مثال: حاصل رادیکال $\sqrt[3]{32} \times \sqrt[3]{2}$ را محاسبه کنید

$$\sqrt[3]{32} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{32 \times 2} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 2^3 = 8$$

نکته ۲: شرط آنکه دو رادیکال با یکدیگر جمع یا تفریق شوند این است (۱) فرجه های آنها برابر باشد. (۲) عبارات زیر رادیکال برابر باشد. که در این صورت عبارات زیر رادیکال جمع یا تفریق می شوند.

مثال: حاصل رادیکال $\sqrt{32} + \sqrt{18}$ را محاسبه کنید

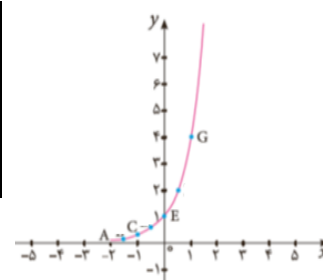
$$\sqrt{32} + \sqrt{18} = \sqrt{16 \times 2} + \sqrt{9 \times 2} = 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

رسم تابع نمایی:

برای رسم به متغیر x مقدار می دهیم و y را محاسبه می کنیم و در محورهای مختصات رسم می کنیم

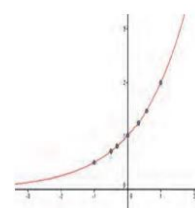
مثال: تابع: $y = 4^x$ را رسم کنید.

x	-2	-1	0	1	2
$y = 4^x$	$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$	$4^{-1} = \frac{1}{4^1} = 0.25$	$4^0 = 1$	$4^1 = 4$	$4^2 = 16$
نقاط	A	C	E	G	



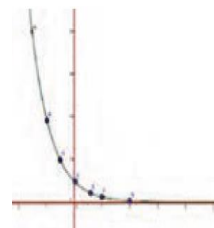
مثال ۱۱: تابع $y = 2^x$ را رسم کنید.

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2^x$	$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0.25$	$2^{-1} = \frac{1}{2^1} = 0.5$	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$



مثال ۱۲: تابع $y = (\frac{1}{4})^x$ را رسم کنید.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y = (\frac{1}{4})^x$	$(\frac{1}{4})^{-2} = 4^2 = ۱۶$	$(\frac{1}{4})^{-1} = 4^1 = ۴$	$(\frac{1}{4})^0 = ۱$	$(\frac{1}{4})^1 = ۰/۲۵$	$(\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{۱۶}$



نمونه سوالات پودمان ۴ ریاضی ۱

(۱) حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

$$a) 5^2 \times 4^2 \times 10^6 \times 2^6 \quad b) \sqrt[5]{2^3} \times 2^{\frac{-1}{3}}$$

$$c) \sqrt[8]{(-7)^8} \times \sqrt[4]{(1-\sqrt{5})^4} \quad d) (27^{-2})^{\frac{1}{6}}$$

(۲) ریشه سوم $-\frac{8}{۲۷}$ را بدست آورید.

(۳) وزن یک نوع باکتری پس از یک ساعت ۴ برابر میشود وزن ۵ گرم از این باکتری پس از چهل دقیقه چقدر میشود؟

(۴) وزن یک نوع باکتری پس از یک ساعت ۸ برابر میشود وزن ۵ گرم از این باکتری پس از بیست دقیقه چقدر میشود؟

(۵) جرم یک عنصر رادکتیو پس از بیست دقیقه ساعت نصف میشود وزن ۱۲۸ گرم از این عنصر پس از دو ساعت چقدر میشود؟

(۶) دارایی های یک شرکت در هر سال به میانگین ۱۸۰ درصد سال قبل میشود دارایی شرکت در پایان سال دهم چقدر میشود اگر در زمان تاسیس دارایی شرکت ۵ میلیارد دلار باشد.

(۷) نمودار تابع $y = (\frac{1}{2})^x$ و $y = (2)^x$ و $y = (\frac{1}{3})^x$ را جداگانه رسم کنید.

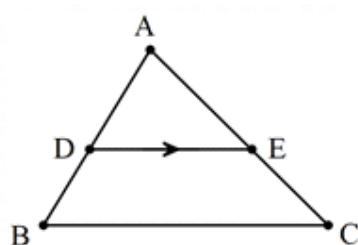
(۹) حاصل رادیکالهای زیر را محاسبه کنید.

$$a) \sqrt[7]{(3-\sqrt{12})^7} \quad b) \sqrt[8]{(5-\sqrt{29})^8}$$

$$c) \sqrt[4]{(8-\sqrt{67})^4} \quad d) \sqrt[10]{(6-\sqrt{39})^{10}}$$

پودمان ۵ ریاضی ۱

قضیه تالس: اگر دو خط راست موازی با یکدیگر، دو خط متقاطع را قطع کنند، آنگاه بر روی آن دو خط متقاطع پاره خط‌های متناسب ایجاد می‌شود.

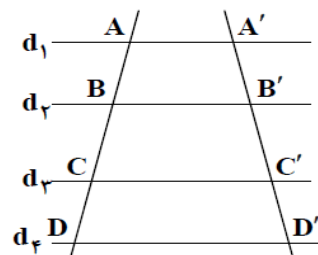


$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow DE \parallel BC$$

قضیه تالس در خطوط موازی: اگر چند خط موازی مفروض باشند و دو خط آن‌ها را قطع کنند، مطابق شکل، پاره خط‌های متناظر ایجاد شده، متناسب اند. در واقع داریم:

$$d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4 \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$$



حالت های تشابه دو مثلث: اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر مساوی باشند، آن دو مثلث متشابه هستند.

اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلثی دیگر متناسب بوده و زاویه بین این دو ضلع در دو مثلث مساوی باشند، آن دو مثلث متشابه هستند. اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلثی دیگر متناسب باشند، آن دو مثلث متشابه هستند.

به طور کلی سه روش برای اثبات این که دو مثلث با هم مساوی هستند وجود دارد.

۱- روش سه ضلع (ضضض): وقتی سه ضلع دو مثلث با هم برابر باشند، آن دو مثلث با هم برابرند.

۲- دو ضلع و زاویه بین آنها (ضض): وقتی در دو مثلث دو ضلع و زاویه بین آنها با هم برابر باشند، آن دو مثلث با هم برابرند.

۳- دو زاویه و ضلع بین آنها (ضز): وقتی در دو مثلث دو زاویه و ضلع بین آنها با هم برابر باشند، آن دو مثلث با هم برابرند.

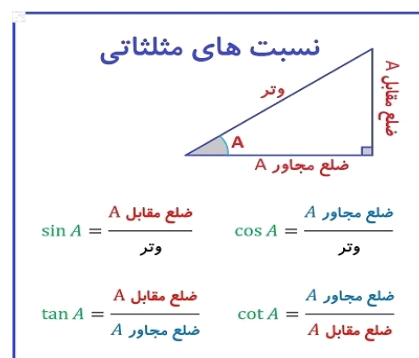
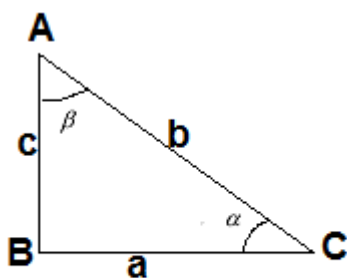
برابری دو مثلث قائم الزاویه

(الف) وتر و یک زاویه تند: اگر در دو مثلث قائم الزاویه وتر و یکی از زاویه‌های تند با هم برابر باشند، آن دو مثلث با هم برابرند.

(ب) وتر و یک ضلع: اگر در دو مثلث قائم الزاویه وتر و یکی از ضلع با هم برابر باشند، آن دو مثلث با هم برابرند.

مثلثات

نسبتهای مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه به صورت زیر تعریف میشود



←

دو زاویه α و β متمم یکدیگرند چون مجموع آنها 90° درجه است $\alpha + \beta = 90^\circ$ و نسبتهای آنها به صورت زیر است.

نسبتهای مثلثاتی α (آلفا)	نسبتهای مثلثاتی β (بتا)
$\sin \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$	$\sin \beta = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$
$\cos \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$	$\cos \beta = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$
$\tan \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$	$\tan \beta = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$
$\cot \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$	$\cot \beta = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$

روابط مهم:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow b^2 = c^2 + a^2$$

$$\sin^2 \alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

قضیه فیثاغورث

مثال: نسبتهای مثلثاتی زاویه α را بدست آورید.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow 10^2 = 6^2 + BC^2 \Rightarrow BC^2 = 10^2 - 6^2 \Rightarrow$$

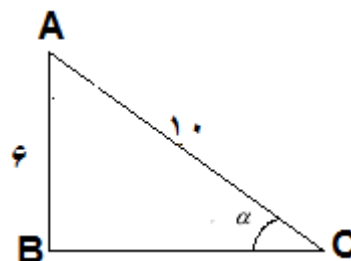
$$100 - 36 = 64 \Rightarrow BC = \sqrt{64} = 8$$

$$\sin \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} = \frac{6}{10} = 0.6$$

$$\cos \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b} = \frac{8}{10} = 0.8$$

$$\tan \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$\cot \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1.333$$



مثال: نسبتهای مثلثاتی زاویه α را بدست آورید.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow 5^2 = AB^2 + 3^2 \Rightarrow AB^2 = 5^2 - 3^2 \Rightarrow$$

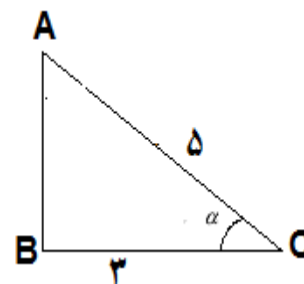
$$25 - 9 = 16 \Rightarrow AB = \sqrt{16} = 4$$

$$\sin \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$\cos \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$\tan \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a} = \frac{4}{3} = 1.33$$

$$\cot \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c} = \frac{3}{4} = 0.75$$



جدول مثلثاتی

زاویه نسبت مثلثاتی	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰
جهت حفظ شدن راحتر	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
sin	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱
cos	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰
tan	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	∞ نامعین
cot	∞ نامعین	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰

این جدول حفظ شود $180^\circ = \pi$

زاویه نسبت مثلثاتی	0	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞ نامعین
cot	∞ نامعین	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

نکته ۱) با زیاد شدن زاویه $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$ مقدار sin و tan افزایش می یابد. با زیاد شدن زاویه $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$ مقدار cos و cotg کاهش می یابد.

نکته ۲) بطور کلی sin و cos بین -۱ و +۱ است

مثال: در روابط زیر مقادیر را محاسبه کنید

$$\begin{aligned}
 a) \frac{\sin 60 + \tan 45 - \cos 30}{1 + \sin 30} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \\
 b) \frac{\tan 60 + 2\cos 30 - 2\sqrt{3}}{1 + \sin 60} &= \frac{\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} = 0 \\
 c) \sin 30 + \cos 30 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \\
 d) \frac{2\cos 30 - 2\sin 30}{2\tan 45 - 3\cos 60} &= \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \frac{1}{2}}{2 \times 1 - 3 \times \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\frac{4 - 3}{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\frac{1}{2}} = 2(\sqrt{3} - 1) \\
 e) 1 - 2\sin 30 &= 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 1 - 1 = 0
 \end{aligned}$$

کاربردهای مثلثات

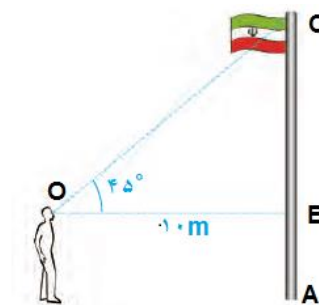
یکی از بیشترین کاربردها محاسبه اضلاع است با داشتن زاویه و یک ضلع

مثال: اگر فاصله شخصی از میله پرچم مطابق شکل زیر ۱۰m باشد و قد شخص ۱۷۰cm باشد ارتفاع میله پرچم تقریباً چقدر است.

تانژانت $\times$ ضلع مجاور = ضلع مقابل

$$\tan 45^\circ = \frac{BC}{OB} \Rightarrow BC = OB \cdot \tan 45^\circ = 10 \times 1 = 10m$$

$$AC = AB + BC = 1.7 + 10 = 11.7m$$

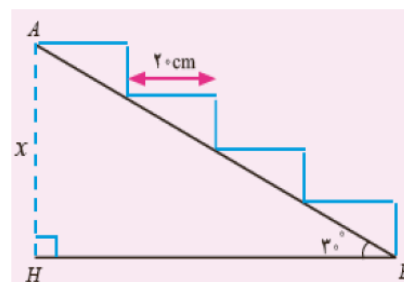


مثال: در شکل زیر ارتفاع AH را محاسبه کنید

$$BH = 4 \times 20 = 80cm$$

$$\tan 30^\circ = \frac{AH}{BH} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{x}{BH}$$

$$x = BH \cdot \tan 30^\circ = 80 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 80 \times 0.577 = 46.188cm$$



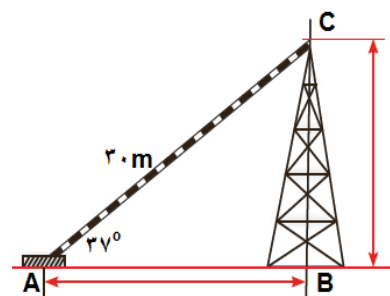
مثال: ارتفاع دکل و فاصله دکل تا پایه را محاسبه کنید. $\sin 37^\circ = 0.6, \cos 37^\circ = 0.8$

ضلع مجاور = وتر $\times$ کسینوس زاویه و ضلع مقابل = وتر $\times$ سینوس

زاویه

$$\sin 37^\circ = \frac{BC}{AC} \Rightarrow BC = AC \cdot \sin 37^\circ = 30 \times 0.6 = 24m$$

$$\cos 37^\circ = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = AC \cdot \cos 37^\circ = 30 \times 0.8 = 24m$$



نمونه سوال ریاضی ۱ پودمان ۵

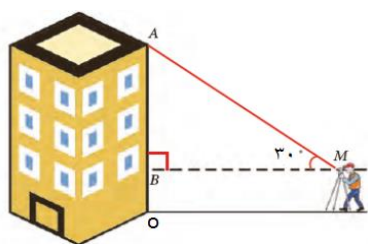
۱- حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$a) 1 - 2\sin 30 + \tan 60 \quad c) \frac{\tan 60 + 2\cos 30 - 2\sqrt{3}}{1 + \sin 60}$$

$$b) \frac{\sin 60 + \tan 45 - \cos 30}{1 + \sin 30} \quad d) \frac{2\cos 30 - 2\sin 30}{2\tan 45 + 3\cos 60}$$

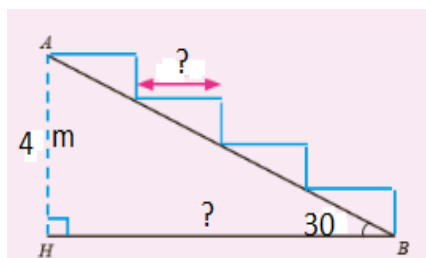
۲- مثلثی رسم کنید که $\tan \alpha = 0/4$ باشد. سایر نسبتهای مثلثاتی α را بدست آورید.۳- مثلثی رسم کنید که $\sin \alpha = 0/6$ باشد. سایر نسبتهای مثلثاتی α را بدست آورید.۴- مثلثی رسم کنید که $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ باشد. سایر نسبتهای مثلثاتی α را بدست آورید.۵- نردبانی به طول ۸ متر را به دیوار تکیه داده ایم مطابق شکل زیر اگر زاویه نردبان با سطح افقی زمین 53° درجه باشد

تعیین کنید الف) فاصله انتهای نردبان از سطح زمین ب) فاصله نردبان از دیوار

۶- اگر $BM = 20 \text{ m}$ و $OB = 170 \text{ cm}$ باشد OA را بدست آورید.

۷- کدامیک از روابط زیر صحیح است با ذکر دلیل

$$a) \sin 20^\circ > \sin 50 \quad b) \cos 35 < \cos 70$$

۸- در شکل زیر HB و عرض هر پله را بدست آورید.

ریاضی ۲ پودمان ۱

تابع:

رابطه بین کمیت ها:

همان گونه که در درس فیزیک خواندیم رابطه بین سرعت و مسافت و زمان $x = v.t$ و رابطه گرما به صورت $Q = m.c.\Delta\theta$ می باشد. و میدانیم که با داشتن بعضی از مقادیر میتوان مقادیر مجهول را با استفاده از عملیات ریاضی به دست آورد. در واقع بین این کمیتها رابطه وجود دارد.

مثال ۱: مفتولی به طول $x = 100\text{cm}$ را به شکل مربع در میاوریم رابطه بین طول میله x و مساحت $S_{(x)}$ را بدست آورید.

میدانیم طول میله همان محیط مربع است

طول هر ضلع میشود $a = \frac{x}{4}$ و مساحت مربع یک ضلع ضربدر خودش است بنابراین

$$s = a^2 \Rightarrow S_{(x)} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 \Rightarrow S_{(x)} = \frac{x^2}{16}$$

$$S_{(x)} = \frac{x^2}{16} \quad x = 100 \quad S_{(x)} = \frac{100^2}{16} = 625\text{cm}^2$$

مثال ۲: مفتولی به طول $L = x = 62.8\text{cm}$ را به شکل دایره در میاوریم رابطه بین طول میله L و مساحت $S_{(x)}$ را بدست آورید. میدانیم طول میله همان محیط دایره است

$$L = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{L}{2\pi}$$

$$s = \pi r^2 \Rightarrow S_{(L)} = \pi \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \Rightarrow S_{(L)} = \pi \frac{L^2}{4\pi^2} \Rightarrow S_{(L)} = \frac{L^2}{4\pi}$$

$$S_{(L)} = \frac{62.8^2}{4\pi} = \frac{3943.84}{4 \times 3.14} = 314\text{cm}^2$$

دامنه: مجموعه ای از مقادیر ورودی است که می توانند به یک تابع داده شوند. به عبارتی مجموعه مقادیر ورودی مجاز

برد: مجموعه ای از مقادیر خروجی است که تابع می تواند تولید کند. به عبارتی برد نشان می دهد که می دهد که پس از اعمال تابع بر روی مقادیر خروجی چه عدهایی ممکن است به دست آید. یعنی مجموعه مقادیر خروجی ممکن

در مثال یک و دو به مقادیری که طول میله میتواند داشته باشد **دامنه** گویند مجموعه مقادیری که مساحت به ازای مقدار طول میله (دامنه) بدست می آید **برد** گویند. و به فرمولهای به دست آمده برای مساحت **قانون یا ضابطه** تابع گویند.

مثال: الف) رابطه طول فنر (L یا x) و جرم آویزان شده از آن (m یا a) در یک فنر به صورت $L = \frac{m}{15} + 10$ است و حداکثر طول فنر 60cm است دامنه تابع را بنویسید و ضابطه جرم متصل به فنر با طول فنر را بدست آورید. ب) در صورتیکه طول 40cm باشد جرم متصل به آن چقدر است.

این مثال در واقع اساس کار ترازوهای فنری است که در وادتی ها هنگام خرید و فروش استفاده میشود

$$\{ L \in \mathbb{R} | 10 \leq L \leq 60 \}$$

دامنه تعریف

ضابطه تابع

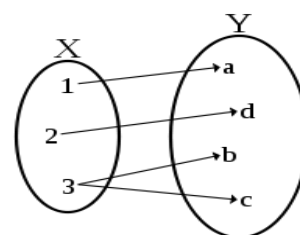
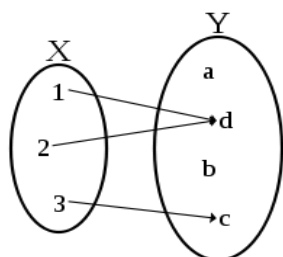
$$L = \frac{m}{15} + 10 \Rightarrow L = \frac{m+150}{15} \Rightarrow 15L = m + 150 \Rightarrow m = 15L - 150$$

$$m = 15L - 150 \quad L = 40 \quad m = 15 \cdot (40) - 150 \Rightarrow m = 450 \quad \text{مقدار تابع}$$

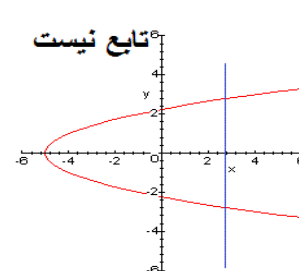
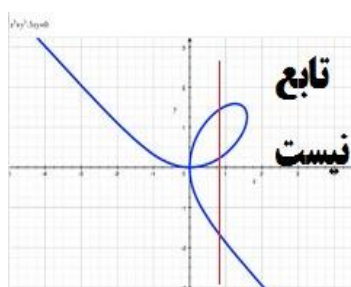
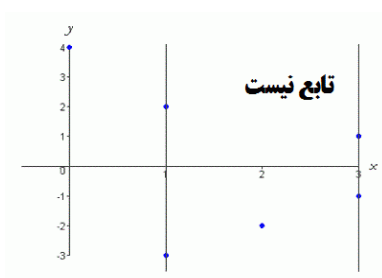
تعریف تابع: یک رابطه دوتایی روی دو مجموعه است که هر عنصر در مجموعه اول (D_f دامنه) را دقیقاً به یک عنصر در مجموعه دوم (R_f برد) مرتبط می کند با ضابطه یا قانون $f(x) = y$ مرتبط میکند. در مثال جرم متصل به فنر ازای هر طول یک جرم متصل به آن بوده است یعنی به ازای هر مقدار L در D_f یک مقدار برای m بردبست می آید

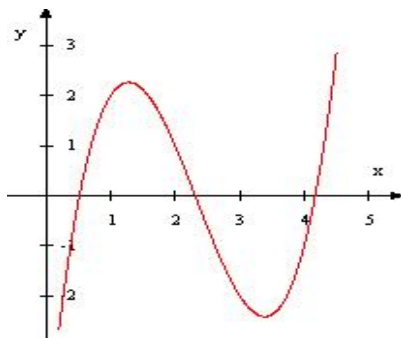
توجه: برای اینکه تابع باشد به ازای هر x فقط یک مقدار در y باید وجود داشته باشد

تابع نیست چون $x=3$ به دو نقطه در y یعنی b و c وصل شده است
تابع هست چون هر x به یک y متصل شده است و اینکه چند x به یک y متصل شود باز تابع هست

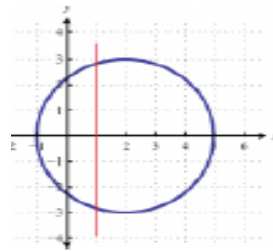


تشخیص تابع از روی نمودار: کافی است خطی به موازات محور $f(x) = y$ رسم کنیم اگر نمودار تابع را فقط در یک نقطه قطع کند تابع هست و اگر بیش از یک نقطه قطع کند تابع نیست.

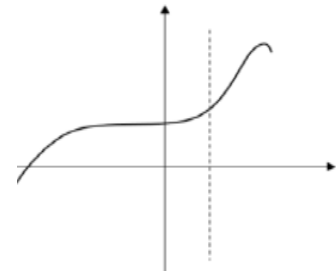




تابع هست



تابع نیست



تابع هست

بازه ها

همانطور که میدانیم این علامتها $[$ و $]$ و $\bullet$ و $\geq$ و $\leq$ یک مفهوم دارند یعنی آن مقدار متعلق به مجموعه هست

همانطور که میدانیم این علامتها $($ و $)$ و $<$ و $>$ یک مفهوم دارند یعنی آن مقدار متعلق به مجموعه نیست

مثال: مجموعه جواب نامعادله $3x - 5 \geq 7$ را به صورتهای زیر نمایش دهید.

ابتدا نامعادله را حل میکنیم

$$3x - 5 \geq 7 \Rightarrow 3x \geq 7 + 5 \Rightarrow 3x \geq 12 \Rightarrow x \geq \frac{12}{3} \Rightarrow x \geq 4$$

الف) توصیف مجموعه: مجموعه اعداد بزرگتر مساوی ۴

ب) نمایش با بازه: $[4 + \infty)$ چون ۴ علامت بزرگتر مساوی دارد علامت بسته گذاشتیم و بینهایت

همیشه علامت باز است

پ) نمایش با نماد مجموعه ها: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$

ج) نمایش روی محور اعداد: که در اینجا $a=4$ است



نکته: وقتی مقدار تابع را میخواهیم کفایت مقدار متغیر در دامنه تعریف D_f را در ضابطه تابع قرار دهیم

تعیین دامنه تعریف توابع از ضابطه تابع

۱) توابع چند جمله ای: این توابع به صورت $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots$ می باشند که دامنه تعریف آنها کل اعداد حقیقی میباشد

مثال: دامنه تعریف تابع $y = 5x^6 + 10x^3 - 2x + 5$ را بدست آورید.

چون تابع خطی هست بنابراین دامنه تعریف کل اعداد حقیقی است یعنی $D_f = \mathbb{R}$

۲) دامنه تعریف **توابع کسری** کل اعداد حقیقی است بجز ریشه های مخرج یعنی مخرج را مساوی صفر قرار می دهیم و جوابهای آن را محاسبه کرده سپس از اعداد حقیقی حذف میکنیم

مثال: دامنه تعریف تابع $f(x) = \frac{3x^2 - 5x}{4x - 8}$ را بدست آورید

باید ابتدا جواب مخرج را بدست آوریم

$$4x - 8 = 0 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

۳) **توابع رادیکالی بافرجه فرد**: با در نظر گرفتن دو شرط بالا محاسبه میشود به عبارتی رادیکال را در نظر نمیگیریم

مثال: دامنه تعریف تابع زیر $f(x) = \sqrt[5]{\frac{3x^2 + 8}{2x + 6}}$ را بدست آورید

چون فرجه فرد فقط باید مخالف صفر باشد

$$2x + 6 = 0 \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow x = \frac{-6}{2} = -3 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$$

۴) **توابع رادیکالی بافرجه زوج**: زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار می دهیم

مثال: دامنه تعریف تابع زیر $f(x) = \sqrt[6]{3x - 12}$ را بدست آورید.

چون فرجه زوج است باید عبارت زیر رادیکال بزرگتر مساوی صفر باشد

$$3x - 12 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 12 \Rightarrow x \geq \frac{12}{3} \Rightarrow x \geq 4 \Rightarrow D_f = [4, +\infty)$$

تست - برای بازه متناهی $[a, b]$ داریم $a + b = 4$ بازه $(1 - 2a, 2b + 1)$ کدام است؟

$$(1) (-1, 7) \quad (2) (-1, 5) \quad (3) (-3, 7) \quad (4) (-3, 3) \quad (\text{سال ۱۴۰۰})$$

$$2b + 1 = 5 \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = \frac{4}{2} = 2$$

$$a + b = 4 \Rightarrow a = 4 - b \Rightarrow a = 4 - 2 = 2 \Rightarrow 1 - 2a = 1 - 2(2) = -3$$

گزینه ۲ صحیح است

نمونه سوال ریاضی ۲ پودمان ۱

۱- با میله ای به طول L یک مربع درست کرده ایم تابعی بنویسید که نشان دهنده مساحت مربع باشد. اگر طول میله ۸۰ سانیمتر باشد مساحت مربع چقدر میشود

۲- با میله ای به طول L یک دایره درست کرده ایم تابعی بنویسید که نشان دهنده مساحت دایره باشد. اگر طول میله ۱۲۰ سانیمتر باشد مساحت دایره چقدر میشود

۳- وزن جلد کتابی با ۲۰۰ صفحه ۴۰ گرم است اگر وزن هر ورق $\frac{1}{8}$ گرم باشد تابعی بنویسید نشان دهنده وزن کتاب بر اساس برحسب تعداد ورق باشد. اگر کتاب ۱۵۰ صفحه باشد وزن آن چقدر است.

۴- اگر نرخ ورودیه تاکسی ۵۰۰۰ تومان باشد و به ازای هر ۲ کیلومتر ۱۵۰۰ تومان کرایه دریافت شود اگر تابعی بنویسید که نشان دهنده نرخ کرایه هر مسافر بر حسب کیلومتر باشد. اگر شخصی ۱۰ کیلومتر با این تاکسی حرکت کند چقدر کرایه باید بدهد.

۵- روی محور نشان دهید

الف) $[-2, 3]$ ب) اعداد بین ۱- تا ۲

پ) اعداد بزرگتر مساوی ۲- ج) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 3\}$

۶- اگر تابع $h(x)$ به صورت $h(x) = 2x^4 - 5x + 3$ در دامنه $[-7, 12]$ تعریف شده باشد مقادیر $h(-1)$ و $h(\frac{1}{2})$ و $h(2)$ را حساب کنید و توضیح دهید آیا $h(\sqrt{25})$ معنی دار است

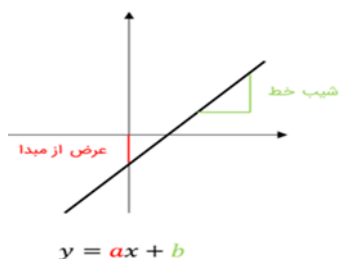
۷- دامنه تعریف تابع $f(x) = \frac{3x-7}{4x-24}$ را بدست آورید.

۸- اگر تابع $f(x) = 5x^2 + a$ با دامنه $[-1, 4]$ تعریف شده باشد و $f(-1) = 10$ باشد تعیین کنید.

الف) مقدار a ب) مقدار $f(3)$ پ) آیا $F(7)$ معنی دارد

ریاضی ۲ پودمان ۲

تابع خطی: فرم کلی توابع خطی به صورت $f(x) = ax + b$ که رابطه و نمودار آنها به صورت زیر است.



دامنه
↑
 $y = ax + b$
↓
عرض از مبدا شیب برد

تغییرات y
شیب = —————
تغییرات x

نکته: جهت رسم توابع خطی دو نقطه از دامنه تعریف را در تابع قرار داده و بر اساس آن تابع را رسم میکنیم

مثال ۱: تابع خطی $f(x) = -2x + 1$ را با دامنه $[-1, 3]$ را رسم کنید

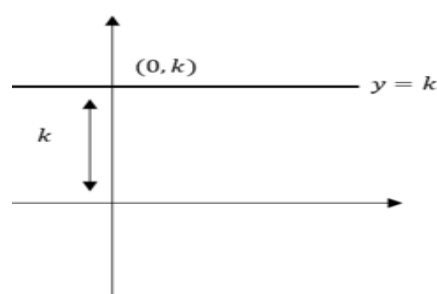
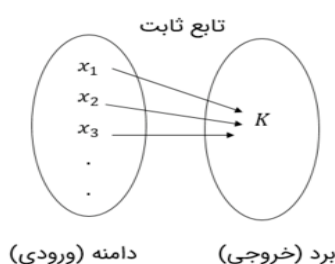
$$f(x) = -2x + 1 \xrightarrow{x=-1} f(-1) = -2 * (-1) + 1 = 3$$

$$f(x) = -2x + 1 \xrightarrow{x=3} f(3) = -2 * (3) + 1 = -5$$



تابع ثابت: تابعی را که به ازای تمام مقادیر متغیر مقداری ثابت داشته باشد تابع ثابت گویند

به عبارتی هر چه مقدار x تغییر کند مقدار y تابع ثابت میماند



معادله خط راست با داشتن مختصات دو نقطه

$$1) a = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$2) y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $A \left(\begin{matrix} 2 \\ 5 \end{matrix} \right)$ و $B \left(\begin{matrix} 5 \\ 11 \end{matrix} \right)$ بگذرد

$$1) m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{11 - 5}{5 - 2} = \frac{6}{3} = 2$$

$$2) y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 5 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 4 + 5 \Rightarrow y = 2x + 1$$

رسم به روش انتقال:

طریقه نوشتن قانون $f(x) = ax^2 + bx + c$ به فرم $f(x) = k(x - q)^2 + p$:

ابتدا $\frac{b}{2a}$ را محاسبه میکنیم سپس مقدار بدست آمده را به توان ۲ رسانده و به عبارت داده اضافه و کم میکنیم و

با استفاده از اتحاد اول $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ به فرم $f(x) = k(x - q)^2 + p$ تبدیل میکنیم.

مثال: معادله $f(x) = x^2 + 8x - 2$ را به فرم $f(x) = k(x - q)^2 + p$ بنویسید.

$$a = 1, b = 8, c = -2$$

$$\frac{b}{2a} = \frac{8}{2 \cdot 1} = 4$$

$$f(x) = x^2 + 8x - 2 \Rightarrow f(x) = x^2 + 8x \pm (4)^2 - 2 = \underbrace{x^2 + 8x + 16}_{(x+4)^2} - 16 - 2 = x^2 + 8x + 16 - 18$$

$$f(x) = (x + 4)^2 - 18 \Rightarrow k = 1, q = -4, p = -18$$

مثال: معادله $f(x) = x^2 - 6x + 5$ را به فرم $f(x) = k(x - q)^2 + p$ بنویسید.

$$a = 1, b = -6, c = +5$$

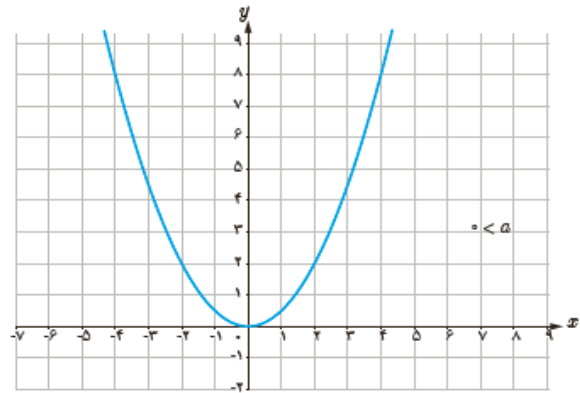
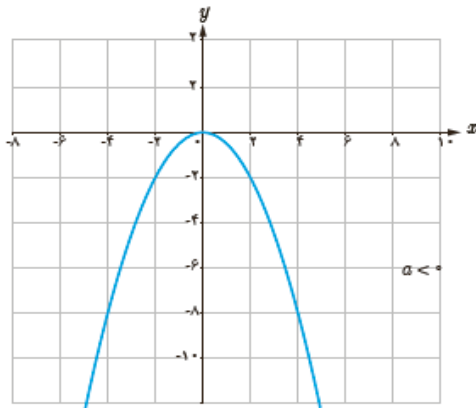
$$\frac{b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot 1} = -3$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 5 \Rightarrow f(x) = x^2 - 6x \pm (-3)^2 + 5 = x^2 - 6x + 9 - 9 + 5 = x^2 - 6x + 9 - 4$$

$$f(x) = (x - 3)^2 - 4 \Rightarrow k = 1, q = 3, p = -4$$

رسم نمودارهای درجه ۲:

همانگونه که میدانیم فرم کلی نمودار ax^2 به صورت زیر است



که برای رسم به روش انتقال به اندازه p روی محور y ها و به اندازه q روی محور x ها مشخص میکنیم که بر اساس ضریب x^2 یعنی k نقطه ماکزیمم یا مینیمم مشخص میشود (اگر $k > 0$ باشد نقطه $\min$ و اگر $k < 0$ باشد نقطه $\max$ است)

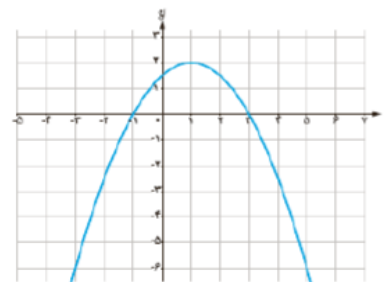
مثال ۵: نمودار تابع $y = (x-2)^2 - 1$ را رسم کنید.

$$y = (x-2)^2 - 1 \Rightarrow \begin{cases} k = +1 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2=q \\ p = -1 \end{cases}$$



مثال ۶: نمودار تابع $y = (x-1)^2 + 2$ را رسم کنید.

$$y = -(x-1)^2 + 2 \Rightarrow \begin{cases} k = -1 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1=q \\ p = +2 \end{cases}$$



مثال: معادله $f(x) = x^2 - 6x + 10$ را به فرم $f(x) = k(x-q)^2 + p$ بنویسید. سپس نمودار آن را رسم

کنید. با استفاده از روش مربع کامل

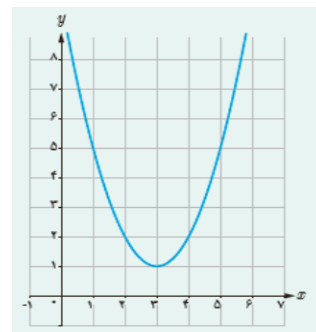
$$a=1, b=-6, c=+10$$

$$\frac{b}{2a} = \frac{-6}{2*1} = -3$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 10 \Rightarrow f(x) = x^2 - 6x \pm (-3)^2 + 10 \Rightarrow$$

$$x^2 - 6x + 9 - 9 + 10 = x^2 - 6x + 9 + 1 \Rightarrow f(x) = (x-3)^2 + 1$$

$$\Rightarrow k=1, q=3, p=+1 \Rightarrow \min \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix}$$



مثال: معادله $f(x) = -x^2 + 2x - 3$ را به فرم $f(x) = k(x-q)^2 + p$ بنویسید. و نمودار آن را رسم کنید

با استفاده از روش مربع کامل ابتدا از منفی یک فاکتور می گیریم

$$f(x) = -x^2 + 2x - 3 \Rightarrow f(x) = -(x^2 - 2x) - 3$$

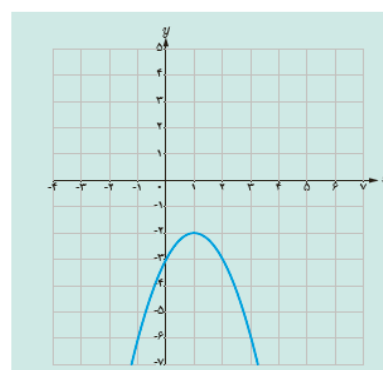
$$a=1, b=-2$$

$$\frac{b}{2a} = \frac{-2}{2*(1)} = -1$$

$$f(x) = -(x^2 - 2x) - 3 \Rightarrow$$

$$f(x) = -(x^2 - 2x \pm (-1)^2) - 3 = -(x^2 - 2x + 1 - 1) - 3 = -(x^2 - 2x + 1) + 1 - 3$$

$$f(x) = -(x-1)^2 - 2 \Rightarrow k=-1, q=+1, p=-2 \Rightarrow \max \begin{vmatrix} +1 \\ -2 \end{vmatrix}$$



سوال: معادله $f(x) = x^2 - 6x + 3$ را به فرم $f(x) = k(x-q)^2 + p$ بنویسید. و نمودار آن را رسم کنید

تشخیص جواب معادله از روی نمودار:

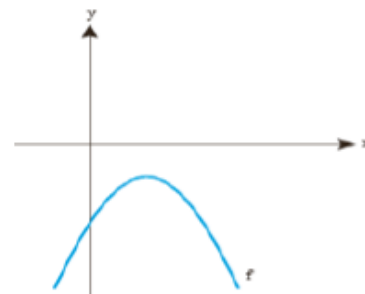
هر جا نمودار تابع $f(x) = 0$ محور xها را قطع کند یا مماس بر محور xها شود آن نقطه جواب معادله است

مثال ۶: نمودار معادله $-x^2 + 2x - 2 = 0$ را رسم کنید و از روی آن توضیح دهید آیا جواب دارد؟

روش محاسباتی

$$a=-1, b=2, c=-2$$

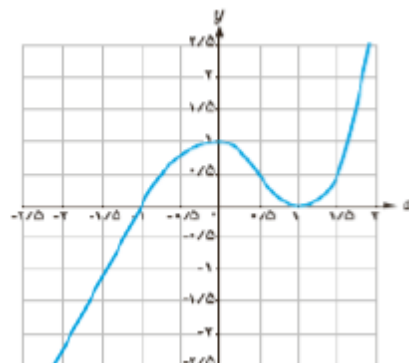
$$\Delta = b^2 - 4*a*c = 2^2 - 4*(-1)*(-2) = 4 - 8 = -4 < 0$$



به عبارتی چون دلتا کوچکتر از صفر است معادله جواب حقیقی ندارد

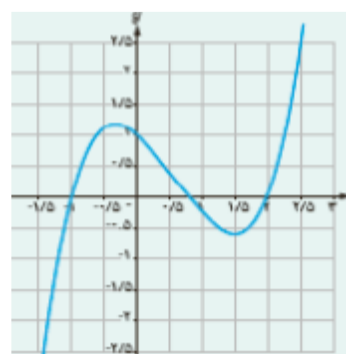
مثال ۷: ریشه معادله $y = x^3 - x^2 - x + 1$ با رسم نمودار بدست آورید

چون معادله درجه است حد اکثر سه جواب می تواند داشته باشد.
در نقطه $x = -1$ چون نمودار را قطع کرده یک جواب معادله است
و در نقطه $x = +1$ چون مماس شده ریشه مضاعف است بنابراین
ریشه های معادله $x = \pm 1$ است



مثال ۸: در نمودار زیر ریشه های تابع f را بدست آورید.

چون معادله درجه است حد اکثر سه جواب می تواند داشته باشد.
در نقاط $x = -1, x = +1, x = 2$ چون نمودار محور x ها را قطع
کرده ریشه های تابع f می باشد



نامعادله ها:

برای حل نامعادله ها مجهولات را به یک طرف نامساوی آورده و مانند یک معادله معمولی حل کرده و سپس با توجه به جهت نامساوی جواب نامعادله را تعیین میکنیم

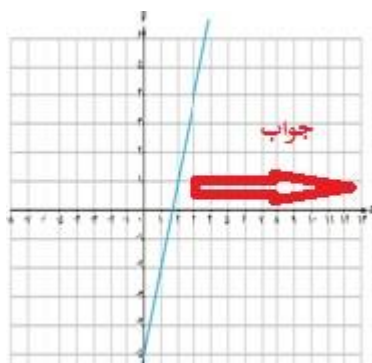
مثال ۹: نامعادله $2x - 1 \geq 4 - x$ را با رسم نمودار حل کنید

روش اول رسم نمودار: چون گفته بزرگتر از صفر نواحی مثبت را جواب در نظر بگیریم. این خط

$$2x - 1 \geq 4 - x \Rightarrow 2x + x \geq 4 + 1 \Rightarrow 3x \geq 5 \Rightarrow x \geq \frac{5}{3}$$

این خط در نقطه $x = \frac{5}{3}$ محور x ها را قطع می کند بنابراین جواب

$$\left[\frac{5}{3}, +\infty \right)$$



روش دوم:

$$2x - 1 \geq 4 - x \Rightarrow 2x + x \geq 4 + 1 \Rightarrow 3x \geq 5 \Rightarrow x \geq \frac{5}{3} \Rightarrow \left[\frac{5}{3}, +\infty \right)$$

روش سوم: با استفاده از جدول تعیین علامت

$$\frac{5}{3}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$3x-5$	قبل از ریشه مخالف ضریب x	بعد از ریشه موافق ضریب x
	-	+
جواب		ناحیه جواب

چون گفته بزرگتر جواب ناحیه مثبت است بنابراین ناحیه جواب $\left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$ است

مثال نمونه نامعادله $x^2 - 7x + 10 \leq 0$ را حل کنید.

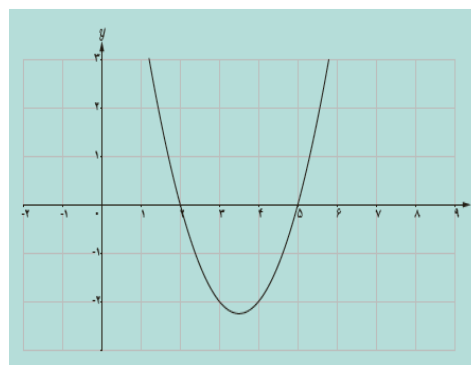
$$a=1, b=-7, c=10$$

$$\frac{b}{2a} = \frac{-7}{2*1} = -3.5$$

$$f(x) = x^2 - 7x + 10 \Rightarrow f(x) = x^2 - 7x \pm (3/5)^2 - 2 \Rightarrow$$

$$x^2 - 7x + 12/25 - 12/25 + 10 = x^2 - 7x + 12/25 - 2/25$$

$$f(x) = (x - 3/5)^2 - 2/25 \Rightarrow k=1, q=3/5, p=-2/25$$



چون گفته کوچکتر از صفر ناحیه زیر محور x ها جواب است یعنی $[2, 5]$

روش دوم روش تعیین علامت:

$$x^2 - 7x + 10 \leq 0$$

$$a=1, b=-7, c=10$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4*(1)*(10) = 49 - 40 = 9$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2*a} = \frac{-(-7) + \sqrt{9}}{2*(1)} = \frac{7+3}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2*a} = \frac{-(-7) - \sqrt{9}}{2*(1)} = \frac{7-3}{2} = 2$$

۲

۵

t	$-\infty$		$+\infty$
$x^2 - 7x + 10$	کنار دو ریشه موافق ضریب x^2	بین دو ریشه مخالف ضریب x^2	کنار دو ریشه موافق ضریب x^2
	+	-	+
جواب		جواب	

چون گفته کوچکتر از صفر ناحیه منفی جواب است یعنی $[2, 5]$

مثال ۱۰: نامعادله $-5t^2 + 12t + 5 \geq 2$ را حل کنید.

ابتدا مانند معادله معمولی حل میکنیم

$$-5t^2 + 12t + 5 \geq 2 \Rightarrow -5t^2 + 12t + 5 - 2 \geq 0 \Rightarrow -5t^2 + 12t + 3 \geq 0$$

$$a = -5, b = 12, c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 * (-5) * 3 = 144 + 60 = 204$$

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 * a} = \frac{-12 + \sqrt{204}}{2 * (-5)} = \frac{-12 + 14 / 2828}{2 * (-5)} = -0 / 23$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 * a} = \frac{-12 - \sqrt{204}}{2 * (-5)} = \frac{-12 - 14 / 2828}{2 * (-5)} = 2 / 63$$

-۰/۲۳

۲/۶۳

t	$-\infty$		$+\infty$
$-5t^2 + 12t + 3$	کنار دو ریشه موافق ضریب t^2 -	بین دو ریشه مخالف ضریب t^2 +	کنار دو ریشه موافق ضریب t^2 -
جواب		جواب	

چون گفته بزرگتر مساوی جواب ناحیه مثبت است بنابراین ناحیه جواب $[-0/23, 2/63]$ است

مثال: نمونه: نامعادله $x^2 - x \geq 6$ را به روش تعیین علامت حل کنید

$$x^2 - x \geq 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 \geq 0$$

$$a = 1, b = -1, c = -6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 * (1) * (-6) = 1 + 24 = 25$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 * a} = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 * (1)} = \frac{1 + 5}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 * a} = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 * (1)} = \frac{1 - 5}{2} = -2$$

-۲

۳

t	$-\infty$		$+\infty$
$x^2 - x - 6$	کنار دو ریشه موافق ضریب x^2 +	بین دو ریشه مخالف ضریب x^2 -	کنار دو ریشه موافق ضریب x^2 +
جواب	جواب		جواب

چون گفته بزرگتر مساوی جواب ناحیه مثبت است بنابراین ناحیه جواب $[-2, 3] \cup [3, +\infty)$ است

نمونه سوال ریاضی ۲ پودمان ۲

۱- سه خط $y = 3x - 1$, $y = 5x - 1$, $y = -2x - 1$ را در یک دستگاه مختصات را رسم کنید و نتیجه آن را بنویسید

۲- معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $A \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ و $B \begin{pmatrix} -2 \\ -15 \end{pmatrix}$ بگذرد. و نمودار آن را رسم کنید.

۳- معادله $f(x) = x^2 - 6x + 3$ را به فرم $f(x) = k(x - q)^2 + p$ را رسم کنید.

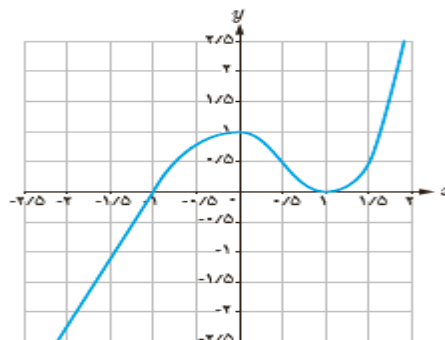
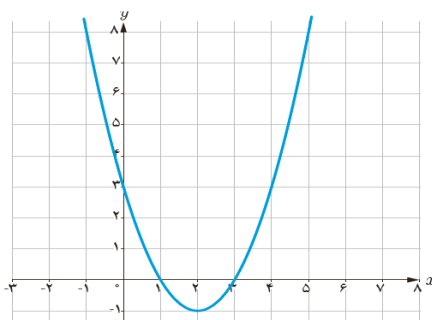
و مختصات نقطه max یا min را بنویسید

۴- نمودار تابع $f(x) = -x^2 - 6x + 2$ را رسم کنید و مختصات نقطه max یا min را بنویسید.

۵- اگر رابطه $h(t) = -5t^2 + 245$ رابطه فاصله از سطح زمین در فاصله ۲۴۵ متری زمین باشد تعیین کنید

الف) $h(3)$ ب) پس از چه مدت جسم رها شده به زمین می‌رسد

۶- مجموعه جواب تابع هر نمودار را از روی نمودار مشخص کنید.



۷- نامعادلات زیر را به روش تعیین علامت حل کنید.

a) $-x^2 + 4x + 3 \geq -2$

b) $6x - 7 \leq 5$

c) $x^2 - 6x + 3 \geq -5$

d) $4x + 7 \leq -5$

۸- نامعادله های زیر را به روش رسم نمودار حل کنید

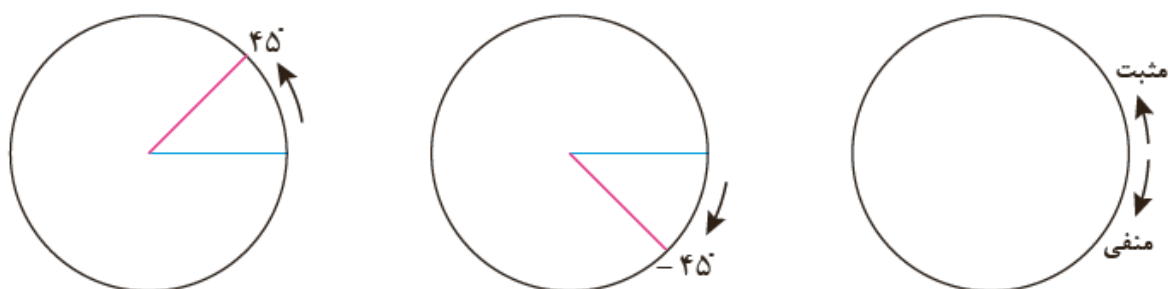
a) $2x - 7 \leq 5$

b) $x^2 - 4x - 5 \geq 0$

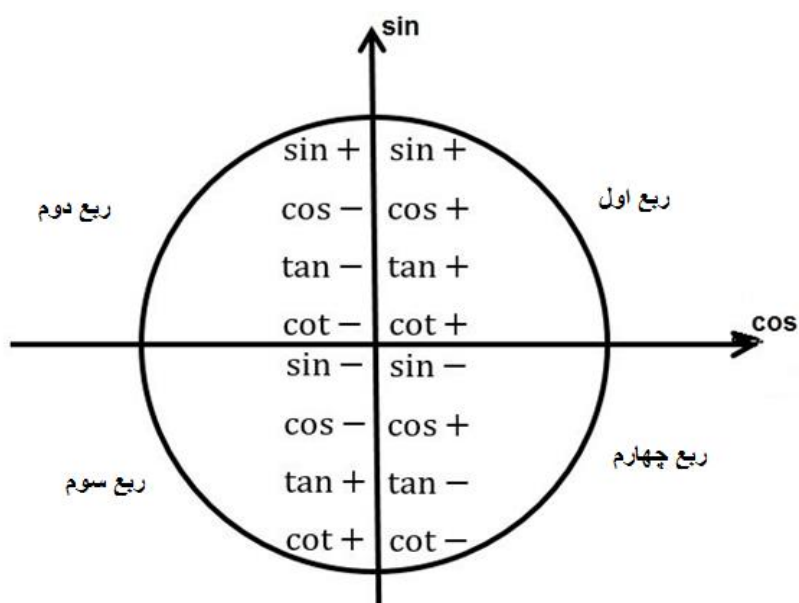
پودمان ۳ ریاضی ۲

تعریف دایره مثلثاتی: دایره مثلثاتی دایره ای است با شعاع واحد یعنی شعاع یک که در آن محور x ها در واقع محور cos ها و محور y ها در واقع محور sin ها است

نکته: در دایره مثلثاتی خلاف جهت گردش عقربه های ساعت جهت مثبت و جهت گردش عقربه های ساعت جهت منفی مثلثاتی در نظر گرفته میشود



بنابر این در دایره مثلثاتی علامت نسبتهای مثلثاتی به صورت زیر است



بنا براین

$$\sin 30 = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin(-30) = -\frac{1}{2} \quad \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos(-30) = +\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30 = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan(-30) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \cot 30 = \sqrt{3} \Rightarrow \cot(-30) = -\sqrt{3}$$

واحدهای مختلف زاویه

هر دایره ۳۶۰ درجه و 2π رادیان و ۴۰۰ گراد است بنابراین میتوان گفت

$$\frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi} \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

$$\frac{D}{360} = \frac{G}{400} \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{G}{200}$$

به طور کلی میتوان گفت: $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} = \frac{G}{200}$

مثال ۱: ۶۰ درجه چند رادیان است؟

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{60}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \pi \times \frac{60}{180} \Rightarrow R = \frac{\pi}{3}$$

مثال ۲: ۱۸۰ درجه چند رادیان است؟

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{180}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{180 \times \pi}{180} = \pi = 3.14$$

مثال ۳: $\frac{5\pi}{6}$ چند درجه است؟

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{\frac{5\pi}{6}}{\pi} \Rightarrow D = 180 \times \frac{5\pi}{6\pi} = 30 \times 5 = 150$$

مثال ۴: یک رادیان چند درجه است؟

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{1}{\pi} \Rightarrow D = \frac{1 \times 180}{\pi} = \frac{180}{3.14} \approx 57.3$$

مثال ۵ (۴۵°): ۴۵ درجه چند گراد است؟

$$\frac{D}{180} = \frac{G}{200} \Rightarrow \frac{45}{180} = \frac{G}{200} \Rightarrow G = \frac{200 \times 45}{180} = 50$$

توجه: می دانیم محیط دایره از رابطه $L = 2\pi r$ بدست می آید که در ۳۶۰ درجه دایره توزیع شده است
بنابراین میتوان گفت:

$$\frac{L}{D} = \frac{2\pi r}{360} \Rightarrow \frac{L}{D} = \frac{\pi r}{180} \Rightarrow D = \frac{\pi}{180} \times \frac{L}{r}$$

که در واقع $\frac{L}{r}$ تعریف رادیان است که در واقع L طول کمان و r دایره است

مثال: طول کمان مقابل یک زاویه ۵۰ cm است اگر شعاع دایره ۳۰ cm باشد زاویه چند درجه است

$$\frac{L}{D} = \frac{2\pi r}{360} \Rightarrow \frac{50}{D} = \frac{2\pi \times 30}{360} \Rightarrow D = \frac{360 \times 50}{60\pi} = \frac{300}{\pi = 3/14} = 95/50$$

مثال: طول کمان مقابل زاویه 120° درجه از دایره ای به شعاع 20 cm را بدست آورید

$$\frac{L}{D} = \frac{2\pi r}{360} \Rightarrow \frac{L}{120} = \frac{2\pi \times 20}{360} \Rightarrow L = \frac{40\pi \times 120}{360} = \frac{40\pi}{3} = \frac{40 \times 3/14}{3} = 41/86$$

تست - در دایره ای به شعاع r نقطه A کمانی به طول L را در جهت مثبت طی می کند زاویه چرخش آن نقطه بر حسب درجه کدام است؟

(سال ۱۳۹۸)

(۱)	$\frac{180L}{\pi r}$	(۲)	$\frac{180r}{\pi L}$	(۳)	$\frac{\pi L}{180r}$	(۴)	$\frac{\pi r}{180L}$ (سال ۱۳۹۸)
						محیط $2\pi r$	کل دایره
						زاویه 360°	جزء خواسته شده
						طول L	

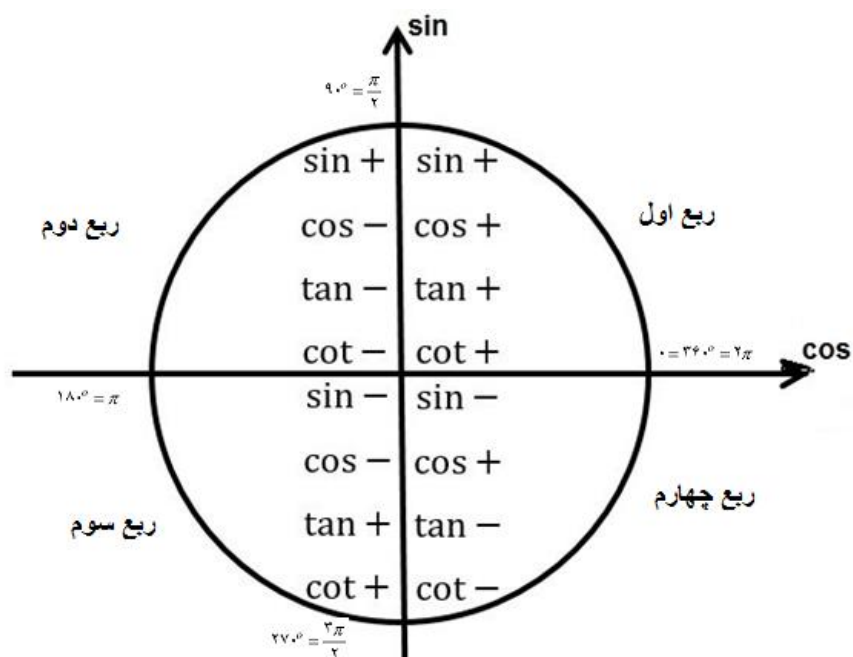
$$\Rightarrow D = \frac{L \times 360}{2\pi r} = \frac{L \times 180}{\pi r}$$

گزینه ۱ صحیح است

بنابر این جدول مثلثاتی در ربع اول به صورت زیر میشود

زاویه نسبت مثلثاتی	0	$30 = \frac{\pi}{6}$	$45 = \frac{\pi}{4}$	$60 = \frac{\pi}{3}$	$90 = \frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞ نامعین
cot	∞ نامعین	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

با توجه به مطالب گفته شده در دایره مثلثاتی به شکل زیر نقاط مشخص میشود



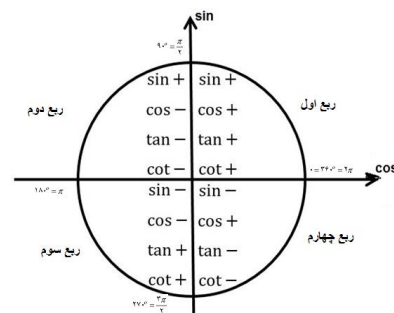
بنابر این جدول مثلثاتی در نقاط ابتدایی و انتهایی هر ربع به صورت زیر میشود

زاویه نسبت مثلثاتی	۰	$90 = \frac{\pi}{2}$	$180 = \pi$	$270 = \frac{3\pi}{2}$	$360 = 2\pi$
sin	۰	۱	۰	-۱	۰
cos	۱	۰	-۱	۰	۱
tan	۰	∞ نامعین	۰	∞ نامعین	۰
cot	∞ نامعین	۰	∞ نامعین	۰	∞ نامعین

محاسبه نسبت‌های مثلثاتی ربع دوم (۹۰ تا ۱۸۰ درجه یا $\frac{\pi}{2}$ تا π): علامتها را طبق دایره مثلثاتی که قبلاً

آموزش داده شده بود قرار میدهم

$$\begin{aligned}\sin(180 - \theta) &= \sin(\pi - \theta) = +\sin \theta \\ \cos(180 - \theta) &= \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta \\ \tan(180 - \theta) &= \tan(\pi - \theta) = -\tan \theta \\ \cot g(180 - \theta) &= \cot g(\pi - \theta) = -\cot g \theta\end{aligned}$$



روش دوم:

$$\sin(90 + \theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = +\cos \theta$$

$$\cos(90 + \theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$$

$$\tan(90 + \theta) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot \theta$$

$$\cot(90 + \theta) = \cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\tan \theta$$

مثال: نسبتهای مثلثاتی 120° را بنویسید.

$$\sin 120 = \sin(180 - 60) = +\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120 = \cos(180 - 60) = -\cos 60 = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120 = \tan(180 - 60) = -\tan 60 = -\sqrt{3}$$

$$\cot 120 = \cot(180 - 60) = -\cot 60 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

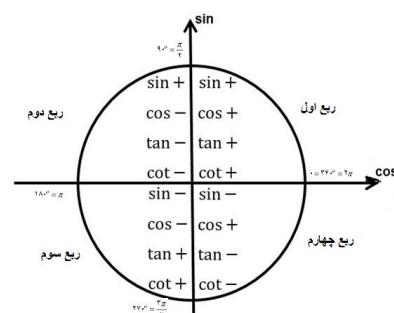
محاسبه نسبتهای مثلثاتی ربع سوم (180° تا 270° درجه یا π تا $\frac{3\pi}{2}$):

$$\sin(180 + \theta) = \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(180 + \theta) = \cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$$

$$\tan(180 + \theta) = \tan(\pi + \theta) = +\tan \theta$$

$$\cot(180 + \theta) = \cot(\pi + \theta) = +\cot \theta$$



مثال: نسبتهای مثلثاتی 240° را بنویسید.

$$\sin 240 = \sin(180 + 60) = -\sin 60 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

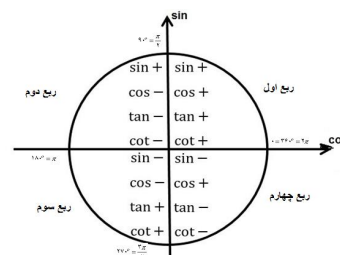
$$\cos 240 = \cos(180 + 60) = -\cos 60 = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 240 = \tan(180 + 60) = \tan 60 = \sqrt{3}$$

$$\cot 240 = \cot(180 + 60) = \cot 60 = +\frac{\sqrt{3}}{3}$$

محاسبه نسبت‌های مثلثاتی ربع چهارم (۲۷۰ تا ۳۶۰ یا صفر درجه یا $\frac{3\pi}{2}$ تا 2π):

$$\begin{aligned}\sin(360 - \theta) &= \sin(2\pi - \theta) = \sin(-\theta) = -\sin \theta \\ \cos(360 - \theta) &= \cos(2\pi - \theta) = \cos(-\theta) = +\cos \theta \\ \tan(360 - \theta) &= \tan(2\pi - \theta) = \tan(-\theta) = -\tan \theta \\ \cot g(360 - \theta) &= \cot g(2\pi - \theta) = \cot g(-\theta) = -\cot g \theta\end{aligned}$$



مثال سینوس و کسینوس -30° را محاسبه کنید

$$\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}, \quad \cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال: سینوس و کسینوس $-\frac{5\pi}{6}$ را محاسبه کنید

$$\begin{aligned}\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) &= -\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \\ \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) &= \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

مثال: حاصل روابط زیر را بدست آورید.

$$a) \sin^2 60 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad b) \tan^4 30 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4 = \frac{(\sqrt{3})^4}{3^4} = \frac{3^2}{3^4} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$c) (\sin 15 + \cos 15)^2 = \sin^2 15 + \cos^2 15 + 2\sin 15 \times \cos 15 = 1 + 2 \times 0 / 258 \times 0 / 965 = 1 + 0 / 49794 \approx 1 / 5$$

$$d) \cos 15^2 + \sin 15^2 = \cos 225 + \sin 225 = \cos(180 - 45) + \sin(180 - 45) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

محاسبه نسبت‌های مثلثاتی بیشتر از ۳۶۰ درجه:

کافی است زاویه مورد نظر را بخش بر ۳۶۰ یا 2π کنیم و برای باقیمانده نسبت‌های مثلثاتی بنویسیم همانطور که قبلاً گفتیم مضارب صحیح ۳۶۰ و 2π در مقدار نسبت مثلثاتی تاثیر ندارد.

مثال: نسبت‌های مثلثاتی ۱۸۶۰ درجه را بدست آورید.

$$\left. \begin{array}{l} 1860 \quad | \quad 360 \\ 1800 \quad | \quad 5 \\ 60 \end{array} \right\} 1800 = (360 \times 5) + 60 \Rightarrow$$

$$\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60 = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60 = \sqrt{3}, \quad \cot g = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

نوشتن معادله خط راست با داشتن مختصات یک نقطه و زاویه با محور طول ها:**نکته:** منظور از شیب خط همانطور که قبلاً گفته بودیم همان $\tan$ زاویه است

$$1) \tan \theta = a = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$2) y - y_1 = m(x - x_1) \quad , \quad y - y_2 = m(x - x_2)$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $A \left(\frac{2}{5} \right)$ و $B \left(\frac{5}{11} \right)$ بگذرد.

$$1) m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{11 - 5}{5 - 2} = \frac{6}{3} = 2$$

$$2) y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 5 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 4 + 5 \Rightarrow y = 2x + 1$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که با محور x زاویه 60° درجه ساخته و محور طولها را در نقطه ۵ قطع کند.

چون گفته محور طولها را قطع کند یعنی $y = 0$

$$x_1 = 5 \quad y_1 = 0 \quad \tan 60 = m = \sqrt{3}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = \sqrt{3}(x - 5) \Rightarrow y = \sqrt{3}x - 5\sqrt{3}$$

نکته: اگر گفته شود محور طولها را قطع کند یعنی $y = 0$ و اگر گفته شود محور عرضها قطع شود یعنی $x = 0$

استاندارد کردن معادله خط: فرم استاندارد معادله خط به صورت $y = mx + b$ است بنابراین اگر معادله به

فرم $Ax + By + C = 0$ باشد به صورت زیر عمل میکنیم. تا ضریب y مثبت یک شود.

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow By = -Ax - C \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \xrightarrow{m = -\frac{A}{B}, b = -\frac{C}{B}} y = mx + b$$

تست - زاویه بین دو خط به معادله $ax - by = 2$ و جهت مثبت محور طول ها برابر $\frac{5\pi}{6}$ است. اگر این خط

محور طول ها را در نقطه ۲- قطع کند. مقدار $a + b$ چقدر است؟

$$(1) \sqrt{3} - 1 \quad (2) 1 - \sqrt{3} \quad (3) 3 - \sqrt{3} \quad (4) \sqrt{3} - 3 \quad (\text{سال ۱۳۹۸})$$

ابتدا معادله خط را استاندارد می کنیم تا ضریب y مثبت یک شود.

$$ax - by = 2 \Rightarrow by = ax - 2 \Rightarrow y = \frac{a}{b}x - \frac{2}{b}$$

سپس شیب خط را محاسبه می کنیم

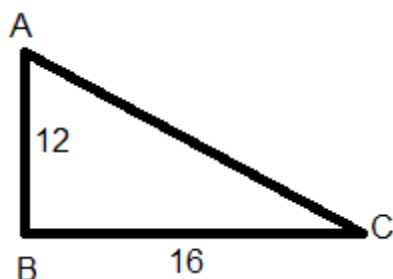
$$\theta = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{5 \times 180}{6} = 150^\circ \Rightarrow m = \tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

بنابر این پس از جایگذاری در روابط بدست آمده داریم:

$$\begin{aligned} m = \frac{a}{b} = -\frac{\sqrt{3}}{3} &\Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2}{b} \Rightarrow 0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(-2) - \frac{2}{b} \Rightarrow \frac{2}{b} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \Rightarrow b = \frac{2}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} \\ \frac{a}{b} = -\frac{\sqrt{3}}{3} &\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = \sqrt{3} \times -\frac{\sqrt{3}}{3} = -1 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} m = \frac{a}{b} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \Rightarrow b = \frac{2}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} \\ \frac{a}{b} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = \sqrt{3} \times -\frac{\sqrt{3}}{3} = -1 \end{aligned}} \right\} \Rightarrow a + b = -1 + \sqrt{3} = \sqrt{3} - 1$$

نمونه سوال ریاضی ۲ پودمان ۳

۱- نسبتهای مثلثاتی زاویه C را بدست آورید.



۲- طول کمان مقابل یک زاویه ۶۰ cm است اگر شعاع دایره ۵۰ cm باشد زاویه چند درجه است؟ $\pi \approx 3$

۳- ۵۰ درجه چند رادیان است؟

۴- $\frac{8\pi}{3}$ چند درجه است؟

۵- طول کمان مقابل زاویه ۱۵۰ درجه از دایره ای به شعاع ۴۰ cm چند سانتیمتر است؟

۶- نسبتهای مثلثاتی زاویه ۶۰- درجه را بنویسید.

۷- معادله خطی را بنویسید که با محور xها زاویه ۶۰ درجه ساخته و محور طولها را در نقطه ۵- قطع کند.

۸- معادله خطی را بنویسید که با محور xها زاویه ۲۱۰ درجه ساخته و محور عرضها را در نقطه ۲+ قطع کند.

۹- نسبتهای مثلثاتی ۲۵۸۰ درجه و $-\frac{15\pi}{4}$ را بدست آورید

۱۰- در صورتی که $\cos \theta = +\frac{4}{5}$ باشد انتهای کمان در ربع چهارم باشد سایر نسبتهای مثلثاتی را بدست آورید

۱۱- در صورتی که $\sin \theta = -\frac{5}{13}$ باشد انتهای کمان در ربع سوم باشد سایر نسبتهای مثلثاتی را بدست آورید.

۱۲- در صورتی که $\tan \theta = +\frac{5}{12}$ باشد انتهای کمان در ربع سوم باشد سایر نسبتهای مثلثاتی را بدست آورید

۱۳- شیب خط و عرض از مبدا معادله خط $6x - 3y = 9$ را بدست آورید.

۱۴- معادله خطی را بنویسید که با محور xها زاویه ۲۱۰- درجه ساخته و محور طولها را در نقطه ۴+ قطع کند.

ریاضی ۲ پودمان ۴

لگاریتم:

استفاده از اعداد توان دار و توجه به توان آنها برای انجام محاسبات موجب پیدایش مفهومی به نام لگاریتم (log) در ریاضی شده است. که بوسیله آن میتوان وارون تابع هایی که متغیر در توان آنها قرار دارد بدست آورد. مثلا توان پنجم ۲ میشود ۳۲ چون $2^5 = 32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ میگوییم لگاریتم ۳۲ در پایه ۲ میشود ۵ و مینویسیم $\log_2 32 = 5$

یادآوری روابط توان

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \Rightarrow 8^9 \times 8^{10} = 8^{9+10} = 8^{19}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \Rightarrow 5^6 \div 5^4 = 5^{6-4} = 5^2 = 25$$

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m \Rightarrow 3^6 \times 5^6 = (3 \times 5)^6 = 15^6$$

$$a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m \Rightarrow 15^8 \div 5^8 = \left(\frac{15}{5}\right)^8 = 3^8$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \Rightarrow 7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$$

$$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{نمایش اعداد به صورت رادیکالی: می دانیم است به عنوان مثال:}$$

تعریف لگاریتم: اگر d یک عدد حقیقی مثبت مخالف ۱ باشد و اعداد حقیقی bc بگونه ای باشند که $b = a^c$ آنگاه را لگاریتم در مبنای a می نامند و با نماد $\log_a b$ نمایش می دهیم و می گوئیم $\log_a b = c$

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

نکته: در حالت کلی $\log_a^b \neq \log_b^a$

$$\log_3^{2x-5} = 4 \quad \text{مثال: معادله را حل کنید.}$$

$$\log_a^b = c \Leftrightarrow b = a^c \Rightarrow 2x - 5 = 3^4 \Rightarrow 2x - 5 = 81 \Rightarrow 2x = 86 \Rightarrow x = \frac{86}{2} = 43$$

$$\log^{4x-20} = 2 \quad \text{مثال: معادله را حل کنید.}$$

توجه: اگر مبنا نوشته نشود یعنی مبنا ۱۰ است

$$\log_a^b = c \Leftrightarrow b = a^c \Rightarrow 4x - 20 = 10^2 \Rightarrow 4x - 20 = 100 \Rightarrow 4x = 120 \Rightarrow x = \frac{120}{4} = 30$$

مثال: معادله $3^{2x-1} = 243$ را حل کنید

$$\log_a^b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

$$3^{2x-1} = 243 \Rightarrow \log^{3^{2x-1}} = \log^{243} \Rightarrow (2x-1)\log^3 = \log^{3^5} \Rightarrow (2x-1) \times \log^3 = 5\log^3$$

$$2x-1=5 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=\frac{6}{2}=3$$

روابط مهم لگاریتم:

$$1) \log_a^a = 1 \Rightarrow \log_5^5 = 1$$

$$2) \log_a^{b^n} = n \log_a^b \Rightarrow \log_2^8 = \log_2^{2^3} = 3 \log_2^2 = 3 \times 1 = 3$$

$$3) \log^{(ab)} = \log^a + \log^b \Rightarrow \log^6 = \log^{(2 \times 3)} = \log^2 + \log^3$$

$$4) \log^{\frac{a}{b}} = \log^a - \log^b \Rightarrow \log^5 = \log^{\frac{10}{2}} = \log^{10} - \log^2 = 1 - \log^2$$

$$5) \log_a^b = \frac{\log^b}{\log^a} \Rightarrow \log_3^2 = \frac{\log^2}{\log^3}$$

$$6) \log_{a^m}^{b^n} = \frac{n}{m} \cdot \frac{\log^b}{\log^a} \Rightarrow \log_{3^8}^{2^7} = \frac{7}{8} \cdot \frac{\log^2}{\log^3}$$

$$7) a^{\log_a^n} = n \Rightarrow 7^{\log_7^4} = 4$$

فرمولهای لگاریتم

$$\log_a^a = 1 \quad \text{لگاریتم هر عدد در مبنای خودش یک میشود مثلاً} \quad \log_8^8 = 1 \quad (۱)$$

$$\log_a^{b^n} = n \log_a^b \quad \text{توان به ضریب لگاریتم تبدیل میشود} \quad (۲)$$

$$a) \log_a^{b^n} = n \log_a^b \Rightarrow \log_2^8 = \log_2^{2^3} = 3 \log_2^2 = 3 \times 1 = 3$$

$$b) \log_a^{b^n} = n \log_a^b \Rightarrow \log^{10000} = \log^{10^4} = 4 \log^{10} = 4 \times 1 = 4$$

$$c) \log_a^{b^n} = n \log_a^b \Rightarrow \log^{0/00001} = \log^{10^{-5}} = -5 \log^{10} = -5 \times 1 = -5$$

$$d) \log_a^{b^n} = n \log_a^b \Rightarrow \log_{10}^{\sqrt{10}} = \log_{10}^{10^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \log_{10}^{10} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} = 0/5$$

$$\log^{(ab)} = \log^a + \log^b \quad \text{لگاریتم حاصلضرب به حاصل جمع تبدیل میشود.} \quad (۳)$$

مثال: اگر $\log^2 = 0/3010$ و $\log^3 = 0/4771$ باشد $\log^6 = ?$ را محاسبه کنید.

$$\log^{(ab)} = \log^a + \log^b \Rightarrow \log^6 = \log^{(2 \times 3)} = \log^2 + \log^3 = 0/3010 + 0/4771 = 0/7781$$

در اینگونه مسائل عددی که لگاریتم آن خواسته تجزیه میکنیم به اعداد داده شده و بر مبنای آن محاسبات را انجام میدهیم

مثال: اگر $\log^2 = 0/3010$ و $\log^3 = 0/4771$ باشد $\log^{54} = ?$ را محاسبه کنید.

$$\log(ab) = \log a + \log b \Rightarrow \log^{54} = \log^{(2 \times 27)} = \log^2 + \log^{3^3} = 0/3010 + 3\log^3 \\ = 0/3010 + (3 \times 0/4771) = 1/7323$$

مثال: با استفاده از خواص لگاریتم بدون آنکه دو عدد را ضرب کنیم لگاریتم حاصل ضرب آنها را به دست آورید

$$\text{الف) } \log 100 \sqrt[5]{10} = \log (100 \times \sqrt[5]{10}) = \log 100 + \log \sqrt[5]{10} = 2 + \log 10^{\frac{1}{5}} = 2 + \frac{1}{5} = \frac{11}{5}$$

$$\text{ب) } \log 2 + \log 5 = \log(2 \times 5) = \log 10 = 1$$

$$\text{پ) } \log 125 + \log 4 + \log 2 = \log(125 \times 4 \times 2) = \log 1000 = 3$$

۴) $\log^{\frac{a}{b}} = \log^a - \log^b$ لگاریتم تقسیم به لگاریتم تفاضل تبدیل میشود

اگر $\log^2 = 0/3010$ باشد $\log^5 = ?$ را محاسبه کنید.

$$\log^{\frac{a}{b}} = \log^a - \log^b \Rightarrow \log^5 = \log^{\frac{10}{2}} = \log^{10} - \log^2 = 1 - \log^2 = 1 - 0/3010 = 0/699$$

مثال: در صورتیکه $\log 5 \approx 0/7$, $\log 20 \approx 1/3$ باشد مقدار تقریبی $\log 4 = ?$ را بدست آورید.

$$\log 4 = \log \frac{20}{5} = \log 20 - \log 5 = 1/3 - 0/7 = 0/6$$

$$\log 0/01 = \log \frac{1}{100} = \log 1 - \log 100 = 0 - 2 = -2$$

مثال: به کمک خواص لگاریتم عبارت های زیر به صورت یک لگاریتم بنویسید و در صورت امکان ساده کنید

$$\text{الف) } 3 \log \sqrt[3]{5} + 2 \log \sqrt{2} = \log (\sqrt[3]{5})^3 + \log (\sqrt{2})^2 = \log 5 + \log 2 = \log (5 \times 2) = \log 10 = 1$$

$$\text{ب) } \frac{1}{2} \log a + 2 \log b - 5 \log c = \log a^{\frac{1}{2}} + \log b^2 - \log c^5 = \log \frac{\sqrt{ab}^2}{c^5}$$

مثال: به کمک خواص لگاریتم عبارت های زیر به صورت مجموع یا تفاضل لگاریتم بنویسید و در صورت امکان ساده کنید

$x > 0, y > 0, z > 0$

$$\text{الف) } \log (5^6 \times 10^3) = \log 5^6 + \log 10^3 = 6 \log 5 + 3$$

$$\text{ب) } \log \frac{10x^2y^5}{z^4} = \log 10 + \log x^2 + \log y^5 - \log z^4 = 1 + 2 \log x + 5 \log y - 4 \log z$$

(۵) $\log_a^b = \frac{\log^b}{\log^a}$ رابطه تغییر مبنا است در مواقعی که در یک مبنا خاص لگاریتم داده نشده باشد با استفاده از

این رابطه لگاریتم در مبنا ۱۰ را بدست آورده و آن را محاسبه میکنیم

مثال: اگر $\log^2 = 0/3010$ و $\log^3 = 0/4771$ باشد $\log_3^2$ را محاسبه کنید

$$\log_a^b = \frac{\log^b}{\log^a} \Rightarrow \log_3^2 = \frac{\log^2}{\log^3} = \frac{0/3010}{0/4771} = 0/63$$

محاسبه تعداد مراحل تقسیم باکتری و زمان آن:

تقسیم باکتری (یاد آوری از پیمان ۴ ریاضی ۱)

فرض کنیم جرم m_0 جرم اولیه یک نوع باکتری پس از n مرحله جرم آن به m برسد که در آن $n = \frac{t}{T}$ و t

کل زمان و T زمان تقسیم باکتری باشد و a نسبتی است که باکتری افزایش یا کاهش

می یابد. در این صورت $m = m_0 \times a^n \Rightarrow m = m_0 \times a^{\frac{t}{T}}$ می یابد. در این صورت $a = 5$ در نظر گرفته میشود.

مثال: وزن یک نوع باکتری پس از یک ساعت ۵ برابر میشود وزن چهارگرم از این باکتری پس از سه ساعت چقدر میشود؟

$$m_0 = 4, T = 1h, t = 3, a = 5 \quad n = \frac{t}{T}$$

$$4 \xrightarrow{T=1} 4 \times 5^1 = 20 \xrightarrow{T=1} 4 \times 5^2 = 100 \xrightarrow{T=1} 4 \times 5^3 = 500 \Rightarrow m = m_0 \times a^{\frac{t}{T}} \Rightarrow m = 4 \times 5^3 = 4 \times 125 = 500$$

حالا با استفاده از لگاریتم برعکس عمل میکنیم یعنی تعداد مراحل n را بدست آوریم

$$m = m_0 \times a^n \Rightarrow \frac{m}{m_0} = a^n \Rightarrow \log_a \frac{m}{m_0} = \log_a a^n \Rightarrow \log_a \frac{m}{m_0} = n \log_a a$$

$$\Rightarrow n = \log_a \frac{m}{m_0}$$

$$n = \log_a \frac{m}{m_0} \Rightarrow n = \log_2 \frac{8}{1} = \log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = 3 \times 1 = 3$$

مثال: وزن یک باکتری پس از یک ساعت دو برابر میشود پس از چند ساعت وزن آن ۸ برابر میشود.

$$n = \log_a \frac{m}{m_0} \Rightarrow n = \log_2 \frac{8}{1} = \log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = 3 \times 1 = 3$$

$$n = \frac{t}{T} \Rightarrow t = n.T = 3 \times 1 = 3h$$

مثال: وزن یک باکتری پس از نیم ساعت سه برابر میشود پس از چند ساعت وزن یک گرم این باکتری ۸۱ گرم میشود.

$$T = \frac{1}{2}h, t = ?, m_0 = 1, m = 81, a = 3$$

$$n = \log_a \frac{m}{m_0} \Rightarrow n = \log_3 \frac{81}{1} \Rightarrow n = \log_3 81 \Rightarrow n = \log_3 3^4 = 4 \log_3 3 = 4$$

$$n = \frac{t}{T} \Rightarrow t = n.T = 4 \times \frac{1}{2} = 2h$$

مثال: حاصل $6 + \log_2^5$ را به صورت یک عبارت لگاریتمی بنویسید.

$$6 + \log_2^5 = 6 \log_2^2 + \log_2^5 = \log_2^{2^6} + \log_2^5 = \log_2^{64} + \log_2^5 = \log_2^{(64 \times 5)} = \log_2^{320}$$

مثال: حاصل $\log_{37} 24$ را محاسبه کنید اگر $\log^2 = 0/3010, \log^3 = 0/4771$ فرض شود.

$$\log_a^b = \frac{\log^b}{\log^a} \Rightarrow \log_{37}^{24} = \frac{\log^{24}}{\log^{37}} = \frac{4 \log^2}{7 \log^3} = \frac{4}{7} \times \frac{\log^2}{\log^3} = \frac{4}{7} \times \frac{0/3010}{0/4771} = \frac{4}{7} \times 0/63 = 3/6$$

نکته: $\log_b^{a^n} = \frac{n \log^a}{m \log^b}$ که در مسئله قبل میتوان از این رابطه استفاده کرد

نمونه سوال پودمان ۴

(۱) حاصل عبارت لگاریتمی زیر را با استفاده از قوانین لگاریتم بدست آورید.

$$\log^5 + \log^8 + \log 75 - \log 30$$

$$\log^{\sqrt{3}} + \log^{\sqrt{50}} + \log^{\sqrt{20}} - \log^{\sqrt{30}}$$

(۲) حاصل عبارت زیر را به صورت مجموع یا تفاضل لگاریتم ها و اعداد بنویسید.

$$\log \frac{10a^5b^3}{c^8} \quad \text{الف) } \log \frac{1000a^9b^8}{c^{12} \cdot z^{25}} \quad \text{ب)}$$

(۳) اگر $\log^2 = 0/3010$ و $\log^3 = 0/4771$ باشد $\log^{72} = ?$ را محاسبه کنید.

(۴) اگر $\log^2 = 0/3010$ و $\log^3 = 0/4771$ باشد $\log^{432} = ?$ را محاسبه کنید.

(۵) معادلات زیر را حل کنید.

$$\log_3^{2x-15} = 5 \quad \text{ب) } \log_2^{2x-4} = 5 \quad \text{الف)}$$

$$\text{معادله (۶) } 3^{2x-1} = 243 \quad \text{را حل کنید}$$

(۷) وزن یک نوع باکتری پس از بیست دقیقه ۴ برابر میشود وزن چهارگرم از این باکتری پس از چه مدت ۶۴ گرم میشود؟

(۸) وزن یک نوع باکتری پس از بیست دقیقه ۳ برابر میشود وزن این باکتری پس از چه مدت ۸۱ گرم میشود؟

(۹) جرم یک عنصر رادیو اکتیو پس از بیست دقیقه نصف میشود جرم ۱۲۸ گرم از این عنصر پس از چه مدت ۴ گرم میشود؟

(۱۰) حاصل $\log_{26}^{35}$ را محاسبه کنید اگر $\log^3 = 0/4771$ و $\log^2 = 0/3010$ فرض شود

ریاضی ۲ پودمان ۵

پارامترهای مرکزی

پارامترهای مرکزی عبارتند از: ۱- میانگین ۲- میانه و چندکها ۳- مد (نما)

تعریف میانگین حسابی: حاصل جمع متغیرهای $X_1, X_2, \dots, X_n$ تقسیم بر تعداد آنها را میانگین حسابی گویند.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

میانگین نمونه میانگین جامعه

مثال: میانگین داده‌های $X_1=4, X_2=6, X_3=10, X_4=20$ را به دست آورید.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{4+6+10+20}{4} = 10$$

مثال: میانگین اعداد ۲ و ۷ و ۹ و ۱۶ و ۲۰ و ۱۲ را به دست آورید.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{2+7+9+16+20+12}{6} = 11$$

تعریف میانه: مقدار صفتی است که حداقل از ۵٪ داده‌ها بزرگتر یا مساوی باشد و با M نشان می‌دهیم. برای به دست آوردن میانه ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم که دو حالت امکان دارد رخ دهد.

(الف) تعداد داده‌ها فرد باشد: در این صورت عدد وسط برابر میانه است.

مثال: میانه اعداد ۲ و ۳ و ۱ و ۶ و ۸ را به دست آورید.

ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم. $1, 2, \boxed{3}, 6, 8 \Rightarrow M=3$

(ب) تعداد داده‌ها زوج باشد: در این صورت پس از مرتب کردن دو عدد وسط را جمع کرده و بخش بر ۲ می‌کنیم.

مثال: میانه اعداد ۲ و ۱۰ و ۷ و ۶ و ۴ و ۸ را به دست آورید.

۲, ۴, ۶, ۷, ۸, ۱۰

$$M = \frac{6+7}{2} = 6.5$$

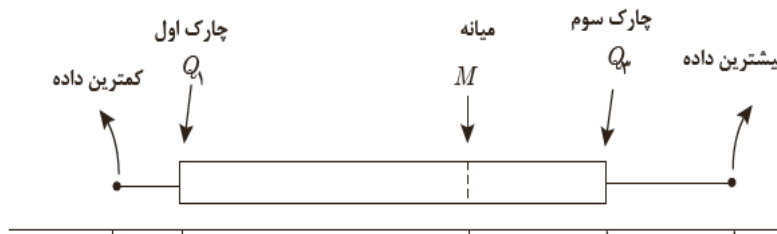
تعریف چارک اول: مقداری که ۲۵ درصد داده‌ها از آن کمتر یا مساوی باشد و با Q_1 نشان می‌دهیم که همان صدک ۲۵ ام است. ($p_{25} = Q_1$)

تعریف چارک دوم: مقداری که ۵۰ درصد داده‌ها از آن کمتر یا مساوی باشد و با Q_2 نشان می‌دهیم که همان صدک پنجاهام یا میانه است. ($P_{50} = Q_2 = Md$)

تعریف چارک سوم: مقداری که ۷۵ درصد داده‌ها از آن کمتر یا مساوی باشد و با Q_3 نشان می‌دهیم که همان صدک ۷۵ ام است. ($P_{75} = Q_3$)

نکته: برای محاسبه چارکها ابتدا داده ها را از کوچک به بزرگ مرتب میکنیم و میانه را محاسبه میکنیم در نتیجه داده داده ها به دو قسمت تقسیم میشوند میانه نیمه اول (سمت چپ) میشود چارک اول و میانه نیمه دوم (سمت راست) میشود چارک سوم

نمودار جعبه ای:



مثال: برای اعداد ۱۰، ۱۲، ۵، ۷، ۱۶، ۹، ۱۳ و ۱۱ و ۱۵ و ۱۴ و ۸ و ۶ مقادیر میانه و چارک اول . چارک سوم را بدست آورده و بر اساس آنها نمودار جعبه را رسم کنید.
ابتدا اعداد را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم

۱-۵-۶-۷-۸-۱۰-۱۱-۱۲-۱۳-۱۴-۱۵-۱۶-۱۹

چون تعداد داده ها فرد است عدد وسط میانه است یعنی $Md = 11$

$$Q_1 = \frac{6+7}{2} = 6.5 \quad \text{حال چارک اول میانه سمت راست است}$$

$$Q_3 = \frac{14+15}{2} = 14.5 \quad \text{و چارک سوم میانه سمت راست است}$$



مد یا نما: داده ای که بیشترین تکرار را داشته باشد مد یا نما گویند

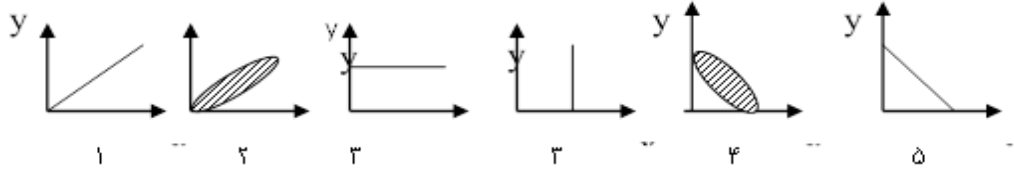
مثال: مد را برای اعداد ۲-۳-۷-۷-۹-۳-۶-۲-۳-۹-۳-۱۰ را بدست آورید.

چون عدد ۳ بیشترین تکرار را دارد $مد = 3$ است

ضریب همبستگی:

معیاری است برای تعیین ارتباط بین یک یا چند متغیر مستقل (X) با یک متغیر وابسته (Y) در صورتی که ارتباط بین دو متغیر همسو باشد مانند قد و وزن ضریب همبستگی مثبت و در صورتی که ارتباط بین دو متغیر غیر همسو باشد مانند رابطه فشار هوا و فاصله از سطح زمین ضریب همبستگی منفی می شود. ضریب همبستگی عددی بین -۱ و +۱ است و بدون واحد است ضریب همبستگی نمونه‌ای را با حرف r و ضریب همبستگی جامعه را با حرف ρ نشان می دهیم.

$$|r| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq r \leq +1 \Rightarrow \begin{cases} r = +1 & \text{رابطه خطی مستقیم کامل} \\ 0 < r < 1 & \text{همبستگی مستقیم نسبی} \\ r = 0 & \text{عدم همبستگی خطی} \\ -1 < r < 0 & \text{همبستگی معکوس نسبی} \\ r = -1 & \text{رابطه خطی معکوس کامل} \end{cases}$$



$$S_{xy} = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad , \quad S_{xx} = \sum (x_i - \bar{x})^2 \quad , \quad S_{yy} = \sum (y_i - \bar{y})^2$$

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}$$

مثال: ضریب همبستگی بین دو متغیر x, y را تعیین کنید و نوع آن را مشخص کنید

x	۲	۴	۶	۸	۱۰	$\sum x = 30$
y	۱۵	۱۰	۵	۰	-۵	$\sum y = 25$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{25}{5} = 5$$

$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x}) * (y - \bar{y})$
$2 - 6 = -4$	$15 - 5 = 10$	$(-4)^2 = 16$	$(10)^2 = 100$	$-4 * 10 = -40$
$4 - 6 = -2$	$10 - 5 = 5$	$(-2)^2 = 4$	$(5)^2 = 25$	$-2 * 5 = -10$
$6 - 6 = 0$	$5 - 5 = 0$	$(0)^2 = 0$	$(0)^2 = 0$	$0 * 0 = 0$
$8 - 6 = 2$	$0 - 5 = -5$	$(2)^2 = 4$	$(-5)^2 = 25$	$2 * -5 = -10$
$10 - 6 = 4$	$-5 - 5 = -10$	$(4)^2 = 16$	$(-10)^2 = 100$	$4 * -10 = -40$
		$s_{xx} = 40$	$s_{yy} = 250$	$s_{xy} = -100$

$$r = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_{xx}s_{yy}}} = r = \frac{-100}{\sqrt{40 \times 250}} = -1$$

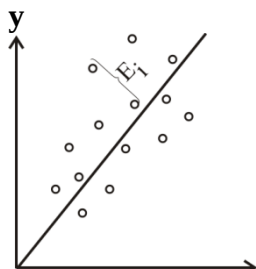
همبستگی معکوس کامل

رگرسیون:

رگرسیون به معنی بازگشت برای تعیین رابطه بین یک چند متغیر مستقل با یک متغیر وابسته است که رگرسیون

خطی ساده رابطه بین مستقل و یک متغیر وابسته را بررسی می‌کنیم. پارامترهای مدل به روش کمترین مربعات

(L.S) بدست می‌آید رگرسیون خطی به صورت $y_i = a + bx_i + e_i$ است که $e_i \sim N(0, \sigma_e^2)$ هستند.



x

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت برای نوشتن معادله خط رگرسیون y بر حسب x عمل می‌کنیم

$$۱) \hat{b} = \frac{s_{xy}}{s_{xx}}$$

$$۲) \hat{a} = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$۳) \hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$$

مثال: در سوال قبل معادله خط رگرسیون را بنویسید.

$$۱) \hat{b} = \frac{s_{xy}}{s_{xx}} = \frac{-۱۰۰}{۴۰} = -۲/۵$$

$$۲) \hat{a} = \bar{y} - b\bar{x} = ۵ - (-۲/۵ \times ۶) = ۲۰ \quad ۳) \hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x = ۲۰ + (-۲/۵)x = ۲۰ - ۲/۵x$$

مثال: نمودار پراکنش و خط برازش قد و وزن شش نفر اندازه گیری شده آن را رسم کنید. سپس خطا و مربع خطا را محاسبه کنید.

قد	وزن	پیش بینی وزن	خطا=وزن - پیش بینی	توان دوم خطا
۱۵۵	۶۰	۶۱.۱۱۳	-۱.۱۱۳	۱.۲۳۸۷۶۹
۱۶۰	۷۵	۶۴.۰۳۷	۱۰.۹۶۳	۱۲۰.۱۸۷۴
۱۷۵	۶۸	۷۲.۸۰۹	-۴.۸۰۹	۲۳.۱۲۶۴۸
۱۹۰	۸۲	۸۱.۵۸۱	۰.۴۱۹	۰.۱۷۵۵۶۱
۱۷۲	۷۵	۷۱.۰۵۴۶	۳.۹۴۵۴	۱۵.۵۶۶۱۸
۱۶۰	۵۵	۶۴.۰۳۷	-۹.۰۳۷	۸۱.۶۶۷۳۷
۱۴۰	۵۲	۵۲.۳۴۱	-۰.۳۴۱	۰.۱۱۶۲۸۱
			۰.۰۲۷۴	۲۴۲.۰۷۸

جمع

